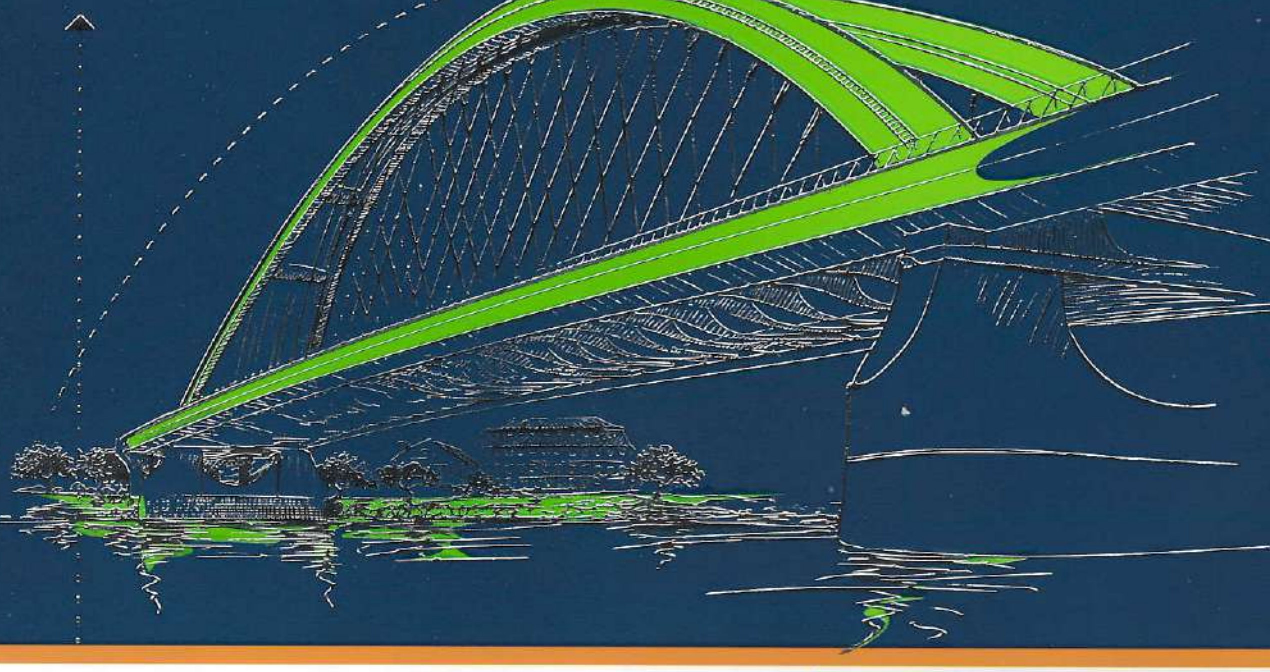
الرياضيات

الجزء الخاص
بالشرح و التمارين

امتحانات إلكترونية
باستخدام تقنية QR

GPS

تطبيق
التعلُّم التفاعلى



الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الأول

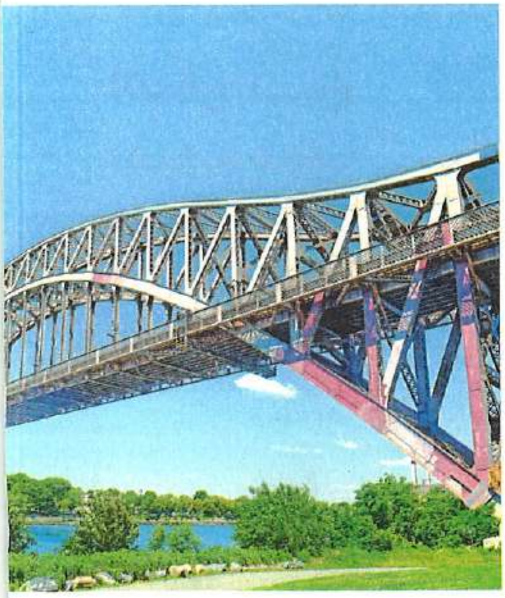
2024
المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

محتويات الكتاب

أولًا : الجبـر وحساب المثلثات

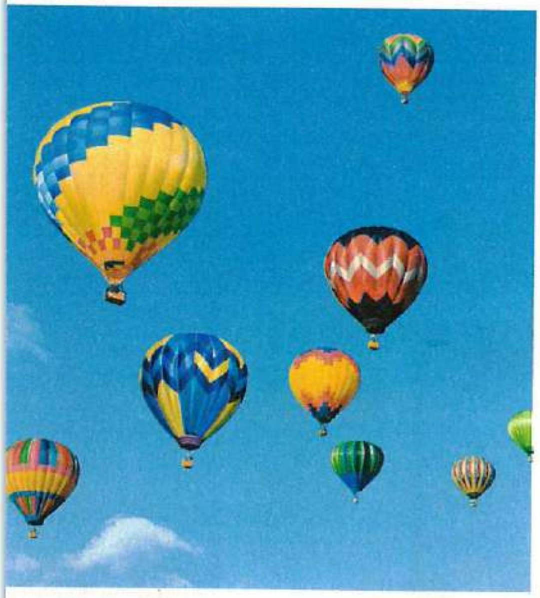
الوحدة 1 الجبـر والعلاقـات والـدوال



الوحدة 2 حسـاب المثـلثـات

ثانيًا : الهندسة

الوحدة 3 التشابه



الدرس الأول	تشابه المضلعات.
الدرس الثانى	تشابه المثلثات.
الدرس الثالث	العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين.
الدرس الرابع	تطبيقات التشابه فى الدائرة.

الوحدة 4 نظريات التناسب فى المثلث

الدرس الأول	المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.
الدرس الثانى	نظرية تاليس.
الدرس الثالث	منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة.
الدرس الرابع	تابع منصفى الزاوية والأجزاء المتناسبة (عكس نظرية ٣)
الدرس الخامس	تطبيقات التناسب فى الدائرة.

أولًا

الجبر وحساب المثلثات

الوحدة 1 الجبر والعلاقات والدوال.

الوحدة 2 حساب المثلثات.

الوحدة الأولى

الجبر والعلاقات والدوال

دروس الوحدة

متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

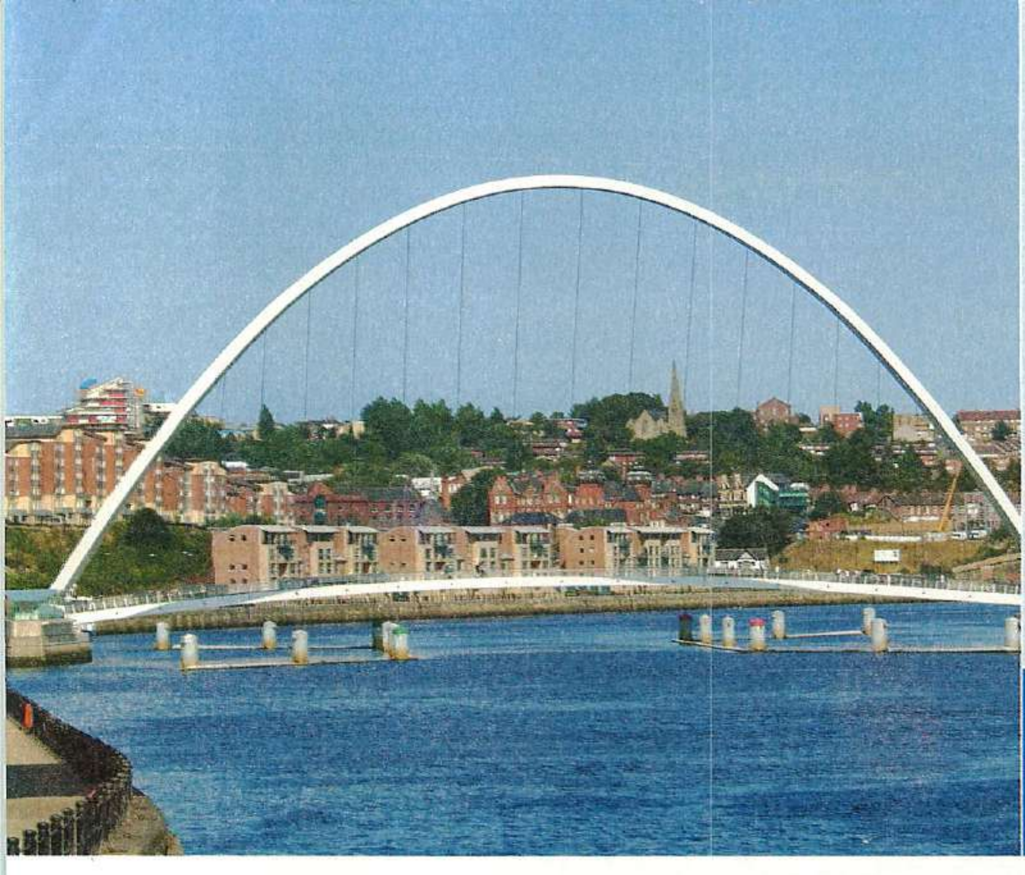
الدرس 1	مقـــدمـــــة عن الأعـــــداد المركبـــــة.
الدرس 2	تحديد نــوع جـــذرى المعادلة التربيعيــة.
الدرس 3	العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.
الدرس 4	تكويــن المعـــادلة التربيعيــة متى عُلم جذراهـا.
الدرس 5	إشـــارة الدالـــة.
الدرس 6	متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الأولى.

نـواتـج التعـلُّـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يحل معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًا وبيانيًا.
- يستخدم معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى حل بعض التطبيقات الحياتية.
- يتعرف مقدمة فى الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب ، قوى ت الصحيحة ، تساوى عددين مركبين).
- يُجرى العمليات على الأعداد المركبة.
- يتعرف العددين المترافقين فى الأعداد المركبة.
- يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث نوع جذرى معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
- يكوِّن معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد متى عُلم جذراها.
- يكوِّن معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية فى متغير واحد.
- يبحث إشارة دالة (ثابتة ، خطية ، تربيعية).
- يحل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد.



متطلبات قبلية
على الوحدة الأولى

أولًا حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبريًا

١ باستخدام التحليل

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

١ $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$ ٢ $٤ س^٢ = ٢٥$

الحل

١ ∵ $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$ ∴ $(س - ٦)(س + ١) = ٠$ [تحليل المقدار الثلاثى]

∴ $س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٦$

أ، $س + ١ = ٠$ ومنها $س = -١$

∴ مجموعة الحل = $\{٦ ، -١\}$

> **تذكر أن**
> معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد لها حلان على الأكثر فى ح

٢ ∵ $٤ س^٢ = ٢٥$ ∴ $٤ س^٢ - ٢٥ = ٠$

∴ $(٢ س + ٥)(٢ س - ٥) = ٠$ [تحليل الفرق بين مربعين]

∴ $٢ س + ٥ = ٠$ ومنها $س = -\frac{٥}{٢}$

أ، $٢ س - ٥ = ٠$ ومنها $س = \frac{٥}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\{-\frac{٥}{٢} ، \frac{٥}{٢}\}$

> **حل آخر باستخدام الجذر التربيعى :**
> ∵ $٤ س^٢ = ٢٥$ ∴ $س^٢ = \frac{٢٥}{٤}$
> ∴ $س = \pm \sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \pm \frac{٥}{٢}$
> ∴ مجموعة الحل = $\{-\frac{٥}{٢} ، \frac{٥}{٢}\}$

٢ باستخدام القانون العام

لإيجاد جذرى المعادلة التربيعية : أ س^{٢} + ب س + حـ = صفر حيث أ ≠ صفر

نستخدم القانون : $\boxed{س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}}$

مثال ٢

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين :

[١] س^{٢} − ٢ س − ٦ = ٠

[٢] س + $\frac{٥}{س}$ = ٤ حيث س ≠ صفر

الحل

[١] المقدار : س^{٢} − ٢ س − ٦ يتعذر تحليله لذلك نلجأ إلى استخدام القانون العام.

∵ أ = ١ ، ب = −٢ ، حـ = −٦

$$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times (-٦)}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٢٤}}{٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٨}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٧}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٧}$$

∴ مجموعة الحل = $\{١ + \sqrt{٧} ، ١ - \sqrt{٧}\}$

[٢] بضرب طرفى المعادلة فى س : ∴ س^{٢} + ٥ = ٤ س

∴ س^{٢} − ٤ س + ٥ = ٠ «لاحظ وضع المعادلة على الصورة : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠»

∴ أ = ١ ، ب = −٤ ، حـ = ٥

$$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$$

، ∵ $\sqrt{-٤} \notin$ ح

∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة : س^{٢} − ٤ س + ٥ = ٠ ∴ مجموعة الحل = ∅

حاول بنفسك

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

[١] س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠

[٢] ٥ س^{٢} + ٢ س = ٤

[٣] ٣ س^{٢} = ٢٧

[٤] س (س − ٤) = ٣

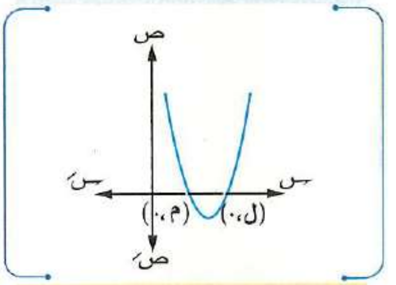
ثانيًا حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد بيانيًا

لحل المعادلة التربيعية فى متغير واحد بيانيًا نتبع الخطوات الآتية :

1. نضع المعادلة على الصورة : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠
2. نفرض أن : د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ
3. نرسم منحنى الدالة د
4. نعيِّن نقط تقاطع منحنى الدالة د مع محور السينات فتكون الإحداثيات السينية لنقط التقاطع هذه هى حلول المعادلة : د (س) = ٠ أى أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

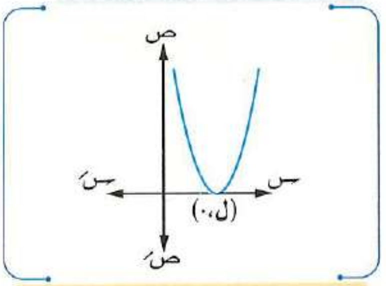
وعلى هذا فإنه توجد ثلاث حالات

١ المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين



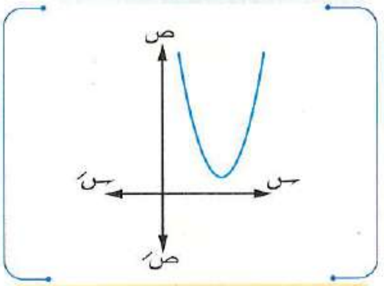
يوجد حلان للمعادلة فى ح
، م.ح = {ل ، م}

٢ المنحنى يمس محور السينات فى نقطة واحدة



يوجد حل وحيد للمعادلة فى ح
، م.ح = {ل}

٣ المنحنى لا يقطع محور السينات



لا يوجد حل للمعادلة فى ح
، م.ح = $\varnothing$

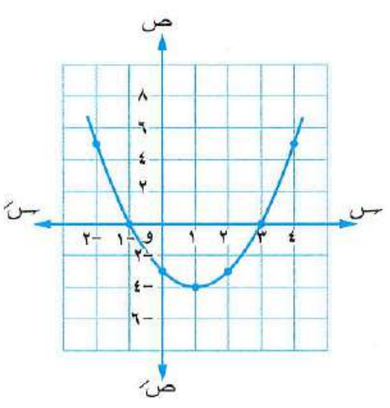
مثال ٣

أوجد بيانيًا فى ح مجموعة حل المعادلة : س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠ مستعينًا بالفترة [−٢ ، ٤]

الحل

نفرض أن : د (س) = س^{٢} − ٢ س − ٣

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥



من الرسم : مجموعة الحل = {٣ ، −١}

ملاحظة

في حالة عدم إعطائك فترة للتمثيل البياني فإنه يمكننا الحل بإيجاد نقطة رأس المنحنى وهي $\left(-\frac{\text{ب}}{\text{٢أ}} \text{ ، د}\left(-\frac{\text{ب}}{\text{٢أ}}\right)\right)$ ثم نوجد عدة نقاط أخرى على يمينها ومثلهم على يسارها.

مثال ٤

حل بيانيًا في ح المعادلة : ٤ س (س − ١) − ٥ = ٠ ثم حقق الناتج جبريًا [علمًا بأن $\sqrt{٦} \simeq ٢٫٤$]

الحل

∵ ٤ س (س − ١) − ٥ = ٠ ∴ ٤ س^2 − ٤ س − ٥ = ٠

أولًا : الحل البيانى

نفرض أن : د (س) = ٤ س^2 − ٤ س − ٥

- نوجد نقطة رأس المنحنى :

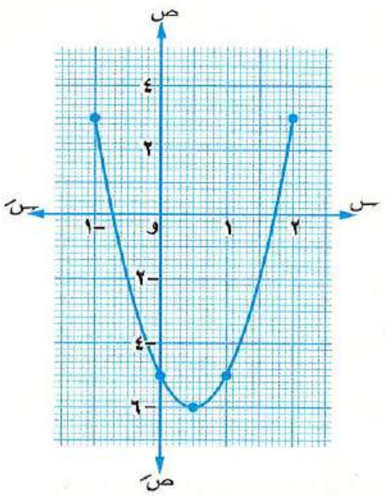
∵ الإحداثى السينى لرأس المنحنى = $\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

، د $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٤ $\left(\frac{١}{٢}\right)^2$ − ٤ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ − ٥ = −٦

∴ نقطة رأس المنحنى هى $\left(\frac{١}{٢} \text{ ، } -٦\right)$

- نكوّن الجدول :

س	−١	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢
ص	٣	−٥	−٦	−٥	٣



- **نلاحظ من الرسم أن :** جذرى المعادلة هما : −٠٫٧ ، ١٫٧ تقريبًا.

ثانيًا : الحل الجبرى

∵ س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - \text{٤ أ حـ}}}{\text{٢ أ}}$ حيث أ = ٤ ، ب = −٤ ، حـ = −٥

∴ س = $\frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^2 - ٤\,(٤)\,(-٥)}}{٢ \times ٤} = \frac{٤ \pm \sqrt{٩٦}}{٨}$

$= \frac{٤ \pm ٤\sqrt{٦}}{٨} = \frac{١ \pm \sqrt{٦}}{٢} \simeq \frac{١ \pm ٢٫٤}{٢}$

∴ جذرا المعادلة هما : ١٫٧ ، −٠٫٧ تقريبًا

حاول بنفسك

حل بيانيًا في ح المعادلة : س^2 − ٤ س + ٤ = ٠ متخذًا س ∈ [٠ ، ٤] ثم حقق الناتج جبريًا.

تمـارين
على متطلبات قبلية على الوحدة الأولى

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا / أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ١ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) ١ (جـ) ± ١ (د) {١ ، -١}

(٢) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - ٦ س + ٩ = ٠$ فى ح هى ....

(أ) {-٣} (ب) {٣} (جـ) ∅ (د) {٩}

(٣) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ - س = ٠$ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، -١} (ب) {٠} (جـ) {٠ ، ١} (د) {١}

(٤) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٣ س = ٠$ فى $ح^*$ هى ....

(أ) {٠ ، -٣} (ب) ∅ (جـ) (٠ ، -٣) (د) {-٣}

(٥) عدد حلول المعادلة : $س^٢ + ٩ = ٠$ فى ح هو ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) صفر

(٦) الشرط الذى يجعل المعادلة : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ تربيعية هو ....

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) أ ≠ ٠ (د) أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

(٧) المعادلتان التربيعيتان : $س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ ، $٢ س^٢ - ٥ س + ٢ = ٠$ لهما حل مشترك هو ....

(أ) س = ٢ (ب) س = ١ (جـ) س = -٢ (د) س = $\frac{١}{٢}$

(٨) إذا كان : $(ص - ٤)^٢ = ٣٦$ ، ص < ٠ فإن : ص + ٤ = ...

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(٩) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يقطع محور السينات فى النقطتين (٢ ، ٠) ، (-٣ ، ٠)

فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، ٠} (ب) {-٣ ، ٠} (جـ) {-٣ ، ٢} (د) {(٢ ، -٣)}

(١٠) أى من العبارات التالية تكون صحيحة بالنسبة لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س (أ − س) ؟

(١) المنحنى يقطع محور السينات عند النقطتين (٠ ، ٠) ، (أ ، ٠)

(٢) رأس المنحنى هو $\left(\frac{\text{أ}}{\text{٢}} ، \frac{\text{أ}^{\text{٢}}}{\text{٤}}\right)$

(٣) محور التماثل للمنحنى هو س = أ

(أ) (١) ، (٢) فقط. (ب) (١) ، (٣) فقط. (جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) جميع ما سبق.

(١١) فى المستوى الإحداثى رسم منحنى الدالة التربيعية د : د (س) = − أ $\text{س}^{\text{٢}}$ + ب س + حـ

وكان رأس منحنى الدالة (٣ ، ١) فقطع المنحنى محور السينات مرتين حيث أ ، ب ، حـ ثوابت

فأى من القيم الآتية يمكن أن تكون قيمة حـ ؟

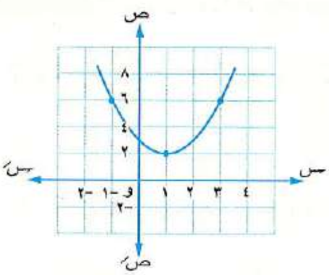
(أ) −٨ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٧

(١٢) قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ من الأمتار يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك

بزيادة كل بعد من بعديها بنفس المقدار فإن المقدار المضاف يساوى .... أمتار.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٩

(١٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

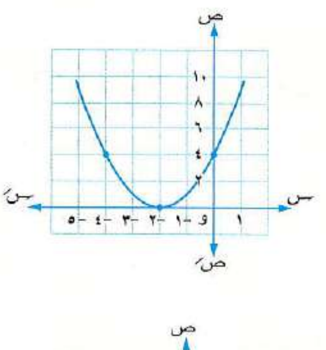


فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ فى ح هى ....

(أ) {٣ ، −١} (ب) [٢ ، ٨]

(جـ) ∅ (د) {٠}

(١٤) فى الشكل المقابل :

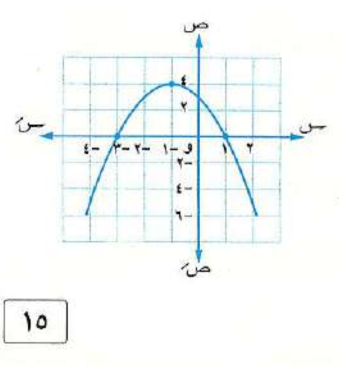


م.ح المعادلة د (س) = ٠ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، −٤} (ب) {(−٢ ، ٠)}

(جـ) ∅ (د) {−٢}

(١٥) فى الشكل المقابل :

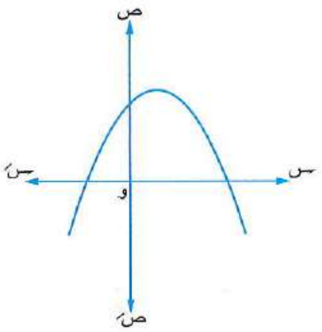


م.ح المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى ....

(أ) {−٣ ، ١} (ب) {−١ ، ٣}

(جـ) [−١ ، ٣] (د) [−٣ ، ١]

(١٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ



فأى مما يأتى صحيح ؟

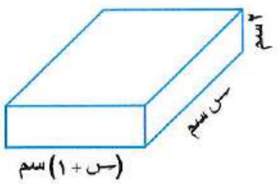
(أ) أ > ٠ ، جـ > ٠

(ب) أ > ٠ ، جـ < ٠

(جـ) أ < ٠ ، جـ > ٠

(د) أ < ٠ ، جـ < ٠

(١٧) فى الشكل المقابل :



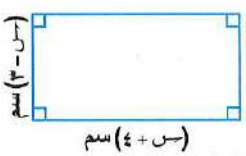
إذا كان حجم متوازى المستطيلات = ٤٠ سم^{٣}

فإن : س = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٦

(جـ) ٥ (د) ٤

(١٨) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة المستطيل = ٧٨ سم^{٢} فإن محيط المستطيل = ... سم

(أ) ٧٨ (ب) ٥٨ (جـ) ٣٨ (د) ١٩

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد :

(١) س^{٢} − ٦ س + ١ = ٠

(٢) س^{٢} + ٣ س + ٥ = ٠

(٣) ٢ س^{٢} + ٣ س − ٤ = ٠

(٤) ٣ س^{٢} − ٦٥ = ٠

(٥) س − $\frac{٥}{س}$ = ٣

(٦) $\frac{٣}{س - ٢}$ + $\frac{٢}{س + ٢}$ = ٢

٢ أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية جبريًا وحقق الناتج بيانيًا :

(١) س^{٢} − ٢ س − ٤ = ٠ ارسم بيانيًا فى الفترة [−٢ ، ٤]

(٢) ٣ س − س^{٢} + ٢ = ٠ ارسم بيانيًا فى الفترة [−١ ، ٤]

(٣) س^{٢} + ٣ = ٠ ارسم بيانيًا فى الفترة [−٣ ، ٣]

(٤) −٢ س^{٢} − ٤ س + ١ = ٠

٣ إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ + ... + ن) يعطى بالعلاقة : جـ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن)

فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا :

(١) ٧٨ (٢) ١٧١ (٣) ٢٥٣ (٤) ٤٦٥

الدرس

1

مقدمة عن الأعداد المركبة

الحاجة إلى مزيد من الأعداد

نعلم أن هناك معادلات ليس لها حل فى ح مثل المعادلة $س^{٢} = -١$ إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى سالب واحد ، لذلك كانت هناك ضرورة لتوسيع مجموعة الأعداد الحقيقية لنحصل على مجموعة جديدة من الأعداد نجد فيها حلًا لمثل هذه المعادلات ، هذه المجموعة الجديدة من الأعداد تسمى (مجموعة الأعداد المركبة) ، وقبل دراسة مجموعة الأعداد المركبة بشىء من التفصيل سنتعرف أولًا على العدد التخيلى «ت».

العدد التخيلى ت

يُعرف العدد التخيلى ت بأنه العدد الذى مربعه يساوى -١

أى أن $ت^{٢} = -١$

لاحظ أن

- $ت × ت = ت^{٢} = -١$
- $-ت × -ت = ت^{٢} = -١$

وعلى هذا فإنه يمكننا حل المعادلة : $س^{٢} = -١$ كالتالى :

$\because س^{٢} = -١$ $\therefore س^{٢} = ت^{٢}$

$\therefore س = \pm\sqrt{ت^{٢}}$ $\therefore س = \pm ت$ $\therefore$ مجموعة الحل = $\{ت ، -ت\}$

ملاحظات

- العدد ت ليس عددًا حقيقيًا (لا ينتمى لمجموعة الأعداد الحقيقية) **أى أن** $ت \notin ح$

وعلى ذلك يستحيل تمثيله على خط الأعداد الحقيقية.

- الأعداد : $٣ ت$ ، $-٢ ت$ ، $\sqrt{٥}\, ت$ ، ... أعداد تخيلية.

- إذا كان $أ$ عددًا حقيقيًا موجبًا فإن : $\sqrt{-أ} = \sqrt{أ}\,ت$

فمثلًا $\sqrt{-٢} = \sqrt{٢ ت^{٢}} = \sqrt{٢}\,ت$ ، $\sqrt{-٣} = \sqrt{٣ ت^{٢}} = \sqrt{٣}\,ت$ ، $\sqrt{-٢٥} = \sqrt{٢٥ ت^{٢}} = ٥\,ت$ ، ... وهكذا

- العمليات على الجذور التربيعية لا يمكن تعميمها على الأعداد التخيلية فإذا كان : $أ$ ، $ب$ عددين حقيقيين سالبين فإن : $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \neq \sqrt{أ\,ب}$

فمثلًا $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} \neq \sqrt{-١ \times -١}$

لأن $\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = \sqrt{ت^{٢}} \times \sqrt{ت^{٢}} = ت \times ت = ت^{٢} = -١$

بينما $\sqrt{-١ \times -١} = \sqrt{(-١)^{٢}} = \sqrt{١} = ١$

قوى ت الصحيحة

العدد ت يحقق قوانين الأسس الصحيحة التى سبق لك دراستها فى المرحلة الإعدادية

وحيث إن $\boxed{ت^{٢} = -١}$ **فبناءً على ذلك يكون :**

- $ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -١ \times ت = -ت$
- $ت^{٤} = ت^{٢} \times ت^{٢} = -١ \times -١ = ١$
- $ت^{٥} = ت^{٤} \times ت = ١ \times ت = ت$
- $ت^{٦} = ت^{٤} \times ت^{٢} = ١ \times -١ = -١$ ... وهكذا

مما سبق نجد أن

- القوى الصحيحة للعدد ت تعطى إحدى القيم الآتية : **ت** أ، **-١** أ، **-ت** أ، **١**
- هذه القيم تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٤ وبصفة عامة فإنه لكل $ن \in ص$ فإن :
  - $ت^{٤ن} = (ت^{٤})^{ن} = ١^{ن} = ١$
  - $ت^{٤ن+١} = ت^{٤ن} \times ت = ١ \times ت = ت$
  - $ت^{٤ن+٢} = ت^{٤ن} \times ت^{٢} = ١ \times -١ = -١$
  - $ت^{٤ن+٣} = ت^{٤ن} \times ت^{٣} = ١ \times -ت = -ت$
  - $ت^{٤ن+٤} = ت^{٤ن} \times ت^{٤} = ١ \times ١ = ١$ ... وهكذا

وبطريقة أخرى :

لإيجاد $ت^{م}$ حيث م عدد صحيح ← نوجد باقى قسمة م ÷ ٤ فإذا كان :

- الباقى = صفر **فإن** $ت^{م} = ١$
- الباقى = ١ **فإن** $ت^{م} = ت$
- الباقى = ٢ **فإن** $ت^{م} = ت^{٢} = -١$
- الباقى = ٣ **فإن** $ت^{م} = ت^{٣} = -ت$

فمثلًا :

- $ت^{١٦} = ١$ «لأن ١٦ ÷ ٤ = ٤ والباقى صفر»
- $ت^{٦٣} = -ت$ «لأن ٦٣ ÷ ٤ = ١٥ والباقى ٣»
- $ت^{٤٢} = -١$ «لأن ٤٢ ÷ ٤ = ١٠ والباقى ٢»
- $ت^{١٠١} = ت$ «لأن ١٠١ ÷ ٤ = ٢٥ والباقى ١»
- $ت^{٤ن + ٢٣} = -ت$ حيث $ن \in ص$ «لأن (٤ ن + ٢٣) ÷ ٤ = ن + ٥ والباقى ٣»

ملاحظات

١ يمكن التعبير عن الواحد الصحيح باستخدام العدد التخيلى ت مرفوعًا لقوى صحيحة من مضاعفات العدد ٤ ويساعد ذلك فى تبسيط بعض الأعداد التخيلية.

فمثلًا $ت^{-١٩} = \frac{١}{ت^{١٩}} = \frac{ت^{٢٠}}{ت^{١٩}} = ت$

٢ $ت^{ن} + ت^{ن+١} + ت^{ن+٢} + ت^{ن+٣} =$ صفر لكل $ن \in ص$

فمثلًا $ت^{٦} + ت^{٧} + ت^{٨} + ت^{٩} =$ صفر

العدد المركب

العدد المركب هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة : $أ + ب ت$ حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، $ت^{٢} = -١$

- يُسمى أ بالجزء الحقيقى.
- يُسمى ب بالجزء التخيلى.

ومن أمثلة الأعداد المركبة : ٢ − ت ، ٧ + ١٣ ت ، ٥ ت − ٤ ، $\sqrt{٢} + \sqrt{٣}$ ت

ملاحظات

لأى عدد مركب : $\boxed{ع = أ + ب ت}$ **فإن :**

١ إذا كان : ب = ٠ فإن : ع = أ ويكون ع عددًا حقيقيًا.

فمثلًا ع = ٥ عدد حقيقى وهو عدد مركب جزءه التخيلى = صفر.

٢ إذا كان : أ = ٠ فإن : ع = ب ت ويكون ع عددًا تخيليًا. (حيث ب ≠ ٠)

فمثلًا ع = ٢ ت عدد تخيلى وهو عدد مركب.

ومما سبق فإن كل عدد حقيقى هو عدد مركب جزءه التخيلى = صفر لذلك فإن مجموعة الأعداد الحقيقية جزئية من مجموعة الأعداد المركبة التى يمكن تعريفها كالتالى :

مجموعة الأعداد المركبة

مجموعة الأعداد المركبة والتى سنرمز لها بالرمز ك هى :

$$\boxed{ك = \{أ + ب ت : أ \in ح ، ب \in ح ، ت^{٢} = -١\}}$$

مثال ١

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين فى مجموعة الأعداد المركبة :

١ $٢ س^٢ + ١٨ = ٠$ ٢ $س^٢ + س + ١ = ٠$

الحل

١ ∵ $٢ س^٢ + ١٨ = ٠$ ∴ $٢ س^٢ = -١٨$

∴ $س^٢ = -٩$ ∴ $س = \pm \sqrt{-٩}$

∴ $س = \pm \sqrt{٩ ت^٢}$ ∴ $س = \pm ٣ ت$ ∴ مجموعة الحل = $\{٣ ت ، -٣ ت\}$

٢ ∵ $أ = ١$ ، $ب = ١$ ، $ح = ١$

$$∴ س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{٢ أ} = \frac{-١ \pm \sqrt{١^٢ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{٣} ت}{٢} = \frac{-١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$$

$$∴ \text{مجموعة الحل} = \left\{ \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت \right\}$$

حاول بنفسك

أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتى فى مجموعة الأعداد المركبة :

١ $٥ س^٢ + ١٨٠ = ٠$ ٢ $س^٢ - ٢ س + ٥ = ٠$

تساوى عددين مركبين

يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزآن الحقيقيان وتساوى الجزآن التخيليان.

أى أنه إذا كان : $(أ + ب ت)$ ، $(ح + ء ت)$ عددين مركبين وكان : $أ = ح$ ، $ب = ء$

فإن : $أ + ب ت = ح + ء ت$

والعكس صحيح أى أنه إذا كان : $أ + ب ت = ح + ء ت$ فإن : $أ = ح$ ، $ب = ء$

لاحظ أنه لا يوجد ترتيب للأعداد المركبة التى جزأها التخيلى لا يساوى الصفر فلا نعلم مثلًا أى العددين أكبر $(٥ + ٣ ت)$ أم $(-٤ + ٧ ت)$ ؟

مثال ٢

أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كلاً مما يأتى حيث $س \in ح$ ، $ص \in ح$ ، $ت^٢ = -١$:

١ $(٢ س - ٣) + ٥ ت = ٧ + (٣ - ٢ ص) ت$ ٢ $س + ت ص = \sqrt{-٤} + ت^{٢٣}$

٣ $س - ٣ ص + (٢ س + ص) ت = ٦ + ٥ ت$

الحـــل

[١] ∵ ٢ س − ٣ = ٧ ∴ ٢ س = ١٠ ∴ س = ٥

، ∵ ٣ − ٢ ص = ٥ ∴ −٢ ص = ٢ ∴ ص = −١

[٢] ∵ س + ت ص = ٢ ت + ت$^{٤(٥)+٢}$ ∴ س + ت ص = ٢ ت + ت^{٢} = ٢ ت + (−١)

∴ س + ت ص = −١ + ٢ ت ∴ س = −١ ، ص = ٢

[٣] ∵ س − ٣ ص = ٦ (١)

، ٢ س + ص = ٥ (٢)

بضرب المعادلة (٢) فى ٣ : ∴ ٦ س + ٣ ص = ١٥ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ ٧ س = ٢١ ∴ س = ٣

بالتعويض فى (٢) : ∴ ص = −١

حاول بنفسك

أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كلًّا مما يأتى :

[١] س + ت ص = ٣ ت$^{-١}$ + ٤

[٢] ٤ س − ص + (٢ س + ص) ت = ٥ + ٧ ت

جمع وطرح الأعداد المركبة

- عند جمع أو طرح عددين مركبين نجمع أو نطرح الجزأين الحقيقيين معًا والجزأين التخيليين معًا.

مثـــال ٣

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

[١] (٣ + ٧ ت^{١٣}) + (٥ − ٩ ت)

[٢] (٢ − $\sqrt{-١٦}$) − (٥ − ت)

الحـــل

[١] ∵ ت^{١٣} = ت ∴ المقدار = (٣ + ٧ ت) + (٥ − ٩ ت) = (٣ + ٥) + (٧ ت − ٩ ت)

= ٨ − ٢ ت

[٢] ∵ $\sqrt{-١٦}$ = ٤ ت ∴ المقدار = (٢ − ٤ ت) − (٥ − ت) = (٢ − ٤ ت) + (−٥ + ت)

= (٢ − ٥) + (−٤ ت + ت) = −٣ − ٣ ت

ضرب الأعداد المركبة

- عند ضرب عددين مركبين نتبع نفس الطرق المستخدمة فى ضرب المقادير الجبرية مع الأخذ فى الاعتبار أن ت^{٢} = −١

مثال ٤

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ (٤ + ٣ ت) (٢ − ٥ ت)

٢ (٥ − ٢ ت) (٥ + ٢ ت)

٣ (٣ + ٢ ت)^{٢}

٤ (١ − ت)^{٤}

الحل

١ (٤ + ٣ ت) (٢ − ٥ ت) = ٤ (٢ − ٥ ت) + ٣ ت (٢ − ٥ ت)

= ٨ − ٢٠ ت + ٦ ت − ١٥ ت^{٢}

= ٨ − ٢٠ ت + ٦ ت + ١٥ (حيث ت^{٢} = −١)

= (٨ + ١٥) + (−٢٠ ت + ٦ ت) = ٢٣ − ١٤ ت

لاحظ أنه يمكن الحل مباشرة باستخدام الضرب بمجرد النظر الذى سبق دراسته فى المرحلة الإعدادية كالتالى :

−٢٠ ت

(٤ + ٣ ت) (٢ − ٥ ت) = ٨ − ١٤ ت − ١٥ ت^{٢} (حيث ت^{٢} = −١)

+٦ ت

= ٨ − ١٤ ت + ١٥ = ٢٣ − ١٤ ت

تذكر أن (أ + ب) (أ − ب) = أ^{٢} − ب^{٢}

٢ (٥ − ٢ ت) (٥ + ٢ ت) = ٢٥ − ٤ ت^{٢}

= ٢٥ + ٤ (حيث ت^{٢} = −١) = ٢٩

تذكر أن (أ ± ب)^{٢} = أ^{٢} ± ٢ أ ب + ب^{٢}

٣ (٣ + ٢ ت)^{٢} = ٩ + ١٢ ت + ٤ ت^{٢}

= ٩ + ١٢ ت − ٤ (حيث ت^{٢} = −١) = ٥ + ١٢ ت

٤ (١ − ت)^{٤} = ((١ − ت)^{٢})^{٢} = (١ − ٢ ت + ت^{٢})^{٢} = (١ − ٢ ت − ١)^{٢} = (−٢ ت)^{٢} = ٤ ت^{٢} = −٤

ملاحظة

(١ ± ت)^{٢ن} = (± ٢ ت)^{ن} حيث ن ∈ ص

- الإثبات : (١ ± ت)^{٢ن} = [(١ ± ت)^{٢}]^{ن} = [١ ± ٢ ت − ١]^{ن} = (± ٢ ت)^{ن}
- وتستخدم هذه الملاحظة لتبسيط بعض الأعداد المركبة كالتالى :

١ (١ + ت)^{٢٠٠} = (٢ ت)^{١٠٠} = ٢^{١٠٠} ت^{١٠٠} = ٢^{١٠٠}

٢ (٣ − ٣ ت)^{٤} = ٣^{٤} × (١ − ت)^{٤} = ٣^{٤} × (−٢ ت)^{٢} = ٣^{٤} × ٢^{٢} ت^{٢} = −٣٢٤

حاول بنفسك

أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

١ ($\sqrt{٤}$ + $\sqrt{-٢٥}$) + (−٣ − ٤ ت)

٢ (٢ − ت) (٢ + $\sqrt{-١}$)

٣ (٢ + ٣ ت^{٢١}) (٥ + ت^{٣١})

٤ ت (٥ − ٣ ت)

٥ (١ − ت)^{٣٢}

العددان المترافقان

العددان : أ + ب ت ، أ − ب ت يُسميان بالعددين المترافقين ولاحظ أنهما لا يختلفان إلا فى إشارة الجزء التخيلى منهما.

فمثلًا العددان ٣ + ٤ ت ، ٣ − ٤ ت عددان مترافقان.

ملاحظات

- مرافق العدد ٢ ت − ٥ هو العدد −٢ ت − ٥ وليس ٢ ت + ٥
- مرافق العدد ٢ ت هو −٢ ت
- مرافق العدد ٣ هو ٣
- مجموع العددين المترافقين هو دائمًا عدد حقيقى ، وحاصل ضرب العددين المترافقين هو دائمًا عدد حقيقى

فمثلًا العدد المركب ٣ + ٤ ت مرافقه هو ٣ − ٤ ت ويكون :

* مجموعهما = (٣ + ٤ ت) + (٣ − ٤ ت) = (٣ + ٣) + (٤ ت − ٤ ت) = ٦ ∈ ح
* حاصل ضربهما = (٣ + ٤ ت) (٣ − ٤ ت) = ٩ − ١٦ ت^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥ ∈ ح

حاول بنفسك

اكتب مرافق العدد ٥ − ٤ ت ثم أوجد :

[١] مجموع العدد ومرافقه.　　[٢] حاصل ضرب العدد ومرافقه.

مثال ٥

اختصر إلى أبسط صورة :

[١] $\frac{٤ - ٣\,\text{ت}}{\text{ت}}$　　[٢] $\frac{١٠}{٣ + \text{ت}}$　　[٣] $\frac{٣ + ٢\,\text{ت}}{٢ - ٥\,\text{ت}}$　　[٤] $\frac{(٢ + \text{ت})\,(١ - \text{ت})}{(١ + \text{ت})\,(٣ - ٢\,\text{ت})}$

الحل

لاحظ أنه لاختصار الكسر الذى مقامه عدد مركب نضرب حدى الكسر فى مرافق المقام.

[١] $\frac{٤ - ٣\,\text{ت}}{\text{ت}} \times \frac{-\text{ت}}{-\text{ت}} = \frac{-٤\,\text{ت} + ٣\,\text{ت}^{٢}}{-\text{ت}^{٢}} = \frac{-٤\,\text{ت} - ٣}{-(-١)} = -٣ - ٤\,\text{ت}$

[٢] $\frac{١٠}{٣ + \text{ت}} = \frac{١٠\,(٣ - \text{ت})}{(٣ + \text{ت})\,(٣ - \text{ت})} = \frac{١٠\,(٣ - \text{ت})}{٩ - \text{ت}^{٢}} = \frac{١٠\,(٣ - \text{ت})}{٩ + ١} = \frac{١٠\,(٣ - \text{ت})}{١٠} = ٣ - \text{ت}$

٣ $\frac{٣+٢ت}{٢-٥ت} = \frac{(٣+٢ت)(٢+٥ت)}{(٢-٥ت)(٢+٥ت)} = \frac{٦+١٥ت+٤ت+١٠ت^{٢}}{٤-٢٥ت^{٢}}$

$= \frac{٦+١٩ت-١٠}{٤+٢٥} = \frac{-٤+١٩ت}{٢٩} = \frac{-٤}{٢٩} + \frac{١٩}{٢٩}ت$

٤ $\frac{(٢+ت)(١-ت)}{(١+ت)(٣-٢ت)} = \frac{٢-٢ت+ت-ت^{٢}}{٣-٢ت+٣ت-٢ت^{٢}} = \frac{٢-ت+١}{٣+ت+٢} = \frac{٣-ت}{٥+ت}$

، $\frac{٣-ت}{٥+ت} = \frac{(٣-ت)(٥-ت)}{(٥+ت)(٥-ت)} = \frac{١٥-٨ت-١}{٢٥-ت^{٢}} = \frac{١٤-٨ت}{٢٦} = \frac{٢(٧-٤ت)}{٢٦} = \frac{٧}{١٣} - \frac{٤}{١٣}ت$

حاول بنفسك

اختصر إلى أبسط صورة :

١ $\frac{٢+ت}{٣-٤ت}$

٢ $\frac{(٢+ت)(٣+ت)}{(٢-ت)(٣-ت)}$

مثال ٦

إذا كان : $س = \frac{٧-ت}{٢-ت}$ ، $ص = \frac{١٣-ت}{٤+ت}$

فأثبت أن : س ، ص مترافقان **ثم أثبت أن :** $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

الحل

$\because س = \frac{٧-ت}{٢-ت} = \frac{(٧-ت)(٢+ت)}{(٢-ت)(٢+ت)} = \frac{١٤+٧ت-٢ت-ت^{٢}}{٤-ت^{٢}} = \frac{١٤+٥ت+١}{٤+١} = \frac{١٥+٥ت}{٥} = ٣+ت$

، $ص = \frac{١٣-ت}{٤+ت} = \frac{(١٣-ت)(٤-ت)}{(٤+ت)(٤-ت)} = \frac{٥٢-١٣ت-٤ت+ت^{٢}}{١٦-ت^{٢}} = \frac{٥٢-١٧ت-١}{١٦+١} = \frac{٥١-١٧ت}{١٧} = ٣-ت$

$\therefore$ س ، ص مترافقان (لاحظ اختلاف إشارتي الجزأين التخيليين في س ، ص)

، $س^{٢} = (٣+ت)^{٢} = ٩+٦ت+ت^{٢} = ٨+٦ت$ ، $ص^{٢} = (٣-ت)^{٢} = ٩-٦ت+ت^{٢} = ٨-٦ت$

$\therefore س^{٢}+ص^{٢} = (٨+٦ت)+(٨-٦ت) = (٨+٨)+(٦ت-٦ت) = ١٦$

حاول بنفسك

أثبت أن العددين أ ، ب مترافقان إذا كان : $أ = \frac{١-٢ت}{١-٣ت}$ ، $ب = \frac{٢-ت}{٣-ت}$

تمـارين 1 على مقدمة عن الأعداد المركبة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم ○ تطبيق ❖ مستويات عليا

أولًا / أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى مما يأتى يكون عددًا تخيليًا ؟

(أ) π (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{-٥}$ (د) ت^{٢}

(٢) ت^{٢٤} = ...

(أ) -١ (ب) ت^{٩} (جـ) $-$ ت   (د) ١

(٣) أبسط صورة للعدد التخيلى ت^{٤٥} هى ....

(أ) ت   (ب) -١ (جـ) $-$ ت   (د) ١

(٤) ت$^{-٣٠}$ = ...

(أ) ١   (ب) -١ (جـ) $-$ ت   (د) ت

(٥) $\frac{١}{\text{ت}^{١٩٩}}$ = ...

(أ) ١   (ب) $-$ ت   (جـ) ت   (د) $-$ ١

(٦) ت^{٢٦} + ت^{٢٨} = ...

(أ) ت^{٥٤} (ب) $-$ ت   (جـ) صفر   (د) ٢

(٧) $\frac{١}{\text{ت}^{١٥}}$ + ت^{٢١} = ...

(أ) صفر   (ب) ٢ ت   (جـ) -٢ ت   (د) $-$ ت

(٨) ٥ ت^{٧} + ٤ ت$^{-١}$ = ...

(أ) ٩ ت   (ب) -٩ ت   (جـ) ت   (د) $-$ ت

(٩) ١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} = ...

(أ) ٤ ت + ١   (ب) -١ (جـ) ١   (د) ٥

(١٠) إذا كان : ن $\in$ ص   فإن : ت$^{٨ن - ٣}$ = ...

(أ) ت   (ب) $-$ ت   (جـ) -١ (د) ١

(١١) إذا كان : ن $\in$ ص   فإن : ت$^{٤ن + ٤٢}$ = ...

(أ) ١   (ب) -١ (جـ) $-$ ت   (د) ت

(١٢) المعكوس الجمعى للعدد المركب (٤ − ٧ ت) هو ....

(أ) ٤ + ٧ ت   (ب) −٤ + ٧ ت   (جـ) −٤ − ٧ ت   (د) ٤ − ٧ ت

(١٣) مرافق العدد (٣ ت − ٤) هو ....

(أ) ٣ ت + ٤   (ب) −٣ ت − ٤   (جـ) −٣ ت + ٤   (د) ٣ ت − ٤

(١٤) مرافق العدد (ت − ت^{٢}) هو ....

(أ) ١ − ت   (ب) ١ + ت   (جـ) − ت − ١   (د) ت − ١

(١٥) مرافق العدد (−٨) هو ....

(أ) ٨ ت   (ب) −٨ ت   (جـ) −٨   (د) ٨

(١٦) مرافق العدد (٢ + ت)^{٢} هو ....

(أ) ٢ + ت   (ب) (٢ + ت)$^{-١}$ (جـ) ٣ + ٤ ت   (د) ٣ − ٤ ت

(١٧) $\sqrt{٢} \times \sqrt{-٨}$ = ...

(أ) ت   (ب) −٢ ت   (جـ) ٤ ت   (د) −٤ ت

(١٨) $\sqrt{-١٨} \times \sqrt{-١٢}$ = ...

(أ) ٦ $\sqrt{٦}$ ت   (ب) ٦ $\sqrt{٦}$ (جـ) −٦ $\sqrt{٦}$ (د) −٦ $\sqrt{٦}$ ت

(١٩) $\sqrt{-٩} \times \sqrt{\frac{-١}{٩}}$ = ...

(أ) ت   (ب) − ت   (جـ) −١   (د) ١

(٢٠) (−٤ ت) (−٦ ت) = ...

(أ) −١٠ ت   (ب) ٢٤ ت   (جـ) −٢٤ ت   (د) −٢٤

(٢١) (−٢ ت)^{٢} (−٣ ت)^{٢} = ...

(أ) −٧٢ ت   (ب) ٧٢ ت   (جـ) ٧٢   (د) −٧٢

(٢٢) (٣ + ٢ ت) + (٢ − ٥ ت) = ...

(أ) ٥ + ٢ ت   (ب) ٥ − ٣ ت   (جـ) ٣ − ٥ ت   (د) ٥ + ٣ ت

(٢٣) إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين وكان : (٢ + ٥ ت) − (٤ − ٢ ت) = س + ت ص
فإن : س + ص = ...

(أ) ٩   (ب) −١   (جـ) ١   (د) ٥

(٢٤) (١٢ − ٥ ت^{١٧}) − (٧ − $\sqrt{-٨١}$) = ...

(أ) ٥ − ٤ ت   (ب) −٥ + ٤ ت   (جـ) ٥ + ٤ ت   (د) −٥ − ٤ ت

(٢٥) ٢ − (١ − ٢ ت) + (٤ − ٥ ت) − (١ − ٣ ت) = ...

(أ) ٤ ت (ب) −٥ ت (جـ) ٧ ت (د) ٤

(٢٦) (٤ − ٣ ت) (٤ + ٣ ت) = ...

(أ) ٢٥ ت (ب) ١٤ (جـ) ١٤ ت (د) ٢٥

(٢٧) إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين وكان : $(١ + ت^{٤})(١ − ت^{٧})$ = س + ت ص

فإن : س + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٢٨) إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين وكان : س + ت ص = $ت^{٤٣} + ٣\sqrt{-٤}$

فإن : س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٣ + ٢ ت (د) ٥ ت

(٢٩) إذا كان : س + ص ت = $\frac{١}{ت}$ حيث س ، ص ∈ ح فإن : س + ص = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٣٠) إذا كان : ١٢ + ٣ ﺃ ت = ٤ ب − ٢٧ ت فإن : ﺃ + ب = ...

(أ) −٩ (ب) ١٢ (جـ) −٦ (د) ٦

(٣١) إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين وكان : ٣ س − ٢ ص ت = $(٥ − ٢ ت)^{٢}$

فإن : ص − س = ...

(أ) ١٧ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٢١ − ٢٠ ت

(٣٢) مجموعة حل المعادلة : ٩ $س^{٢}$ + ٤ = ٠ في مجموعة الأعداد المركبة هي ....

(أ) $\{\frac{-٢}{٣}\}$ (ب) $\{\frac{-٢}{٣} ، \frac{٢}{٣}\}$ (جـ) $\{\frac{٢}{٣}\}$ (د) $\{\frac{-٢}{٣}ت ، \frac{٢}{٣}ت\}$

(٣٣) إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين وكان : س − ٢ ت = ٣ + ص ت

فإن مرافق العدد س + ص ت هو ....

(أ) ٣ − ٢ ت (ب) ٣ + ٢ ت (جـ) −٣ − ٢ ت (د) −٣ + ٢ ت

(٣٤) إذا كان : $س^{٢}$ − ٢ س + ٢ = ٠ فإن : س = ...

(أ) ٢ ± ٢ ت (ب) ٢ ± ت (جـ) ١ ± ت (د) ١ ± ٢ ت

(٣٥) المعكوس الضربي للعدد $\frac{ت}{٢ ت + ١}$ هو ....

(أ) −٢ + ت (ب) −٢ − ت (جـ) ٢ − ت (د) ٢ + ت

(٣٦) إذا كان : $ع_{١}$ هو مرافق $ع_{٢}$ فإن : $ع_{١} ع_{٢} + (ع_{١} + ع_{٢})$ = ...

(أ) عدد حقيقي. (ب) عدد تخيلي.

(جـ) عدد مركب غير حقيقي. (د) غير محدد.

(٣٧) كل ما يلى أعدادًا تخيليه ما عدا ....

(أ) $\sqrt{-١٨}$ (ب) $\text{ت}^{١٩}$ (جـ) $(٢ + ٢\text{ت})^{٤}$ (د) $(١ + \text{ت})^{٦}$

(٣٨) كل الأعداد الآتية غير حقيقية ما عدا ....

(أ) $(١ + \text{ت})^{٤}$ (ب) $\sqrt{-٨}$ (جـ) $\text{ت}^{٣}$ (د) $\sqrt{-\pi^{٢}}$

(٣٩) $٣ + ٣\text{ت} + ٣\text{ت}^{٢} + ٣\text{ت}^{٣} =$ ....

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ١٢ (د) ١٢ ت

(٤٠) $٣ \times ٣\text{ت} \times ٣\text{ت}^{٢} \times ٣\text{ت}^{٣} =$ ....

(أ) ٨١ (ب) −٨١ (جـ) ٨١ ت (د) −٨١ ت

(٤١) إذا كانت : أ ، ب ، جـ ، ء أربعة أعداد صحيحة متتالية

فإن : $\text{ت}^{\text{أ}} + \text{ت}^{\text{ب}} + \text{ت}^{\text{جـ}} + \text{ت}^{\text{ء}} =$ ....

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ت

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد ناتج كل مما يأتى فى أبسط صورة :

(١) $(٢ + \sqrt{-٩})(٣ - ٤\text{ت})$

(٢) $(٢ - ٥\text{ت})^{٢}$

(٣) $(٣ - ٢\text{ت})^{٢} + (٣ + ٢\text{ت})$

(٤) $(١ + \text{ت})^{٤}$

(٥) $(١ + \sqrt{-١})^{٤} - (١ - \sqrt{-١})^{٤}$

(٦) $(١ - \text{ت})^{١٠}$

(٧) $(١ + ٢\text{ت}^{٢})(٢ + ٣\text{ت}^{٥} + ٤\text{ت}^{٦})$

٢ ضع كلًا مما يأتى على صورة أ + ب ت حيث أ ، ب عددان حقيقيان :

(١) $\frac{٤ - ٥\text{ت}}{٧\text{ت}}$

(٢) $\frac{٢٦}{٣ - ٢\text{ت}}$

(٣) $\frac{٢ - ٣\text{ت}}{٣ + \text{ت}}$

(٤) $\frac{٣ + ٤\text{ت}}{٥ - ٢\text{ت}}$

(٥) $\frac{(٣ + ٢\text{ت})(٢ - \text{ت})}{٣ + \text{ت}}$

(٦) $\frac{(٣ + \text{ت})(٣ - \text{ت})}{٣ - ٤\text{ت}}$

(٧) $\frac{١}{(١ + ٢\text{ت})^{٢}}$

(٨) $\frac{١ + \text{ت} + ٢\text{ت}^{٢} + ٢\text{ت}^{٣}}{١ - ٥\text{ت} + ٣\text{ت}^{٢} - ٣\text{ت}^{٣}}$

(٩) $\frac{٢\sqrt{٣} + \sqrt{-٨}}{\sqrt{٣} - \sqrt{-١٨}}$

٣ حل كلًا من المعادلات الآتية فى مجموعة الأعداد المركبة :

(١) $٣\text{س}^{٢} + ١٢ = ٠$

(٢) $٤\text{س}^{٢} + ١٠٠ = ٧٥$

(٣) $\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٥ = ٠$

(٤) $٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٥ = ٠$

٤ **أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان كلاً من المعادلات الآتية حيث س ، ص عددان حقيقيان :**

(١) (٢ س − ٣) + (٣ ص + ١) ت = ٧ + ١٠ ت

(٢) (٢ س − ص) + (س − ٢ ص) ت = ٥ + ت

(٣) ٣ س + س ت − ٢ ص + ص ت = ٥

(٤) س^{٢} − ص^{٢} + (س + ص) ت = ٤ ت

(٥) $\frac{١٠}{٢ + ت}$ = س + ص ت

(٦) (١ − ت) (س + ت ص) = ٦ − ٤ ت

(٧) $\frac{(٢ + ت)\ (٢ - ت)}{٣ + ٤\ ت}$ = س + ت ص

---

٥ إذا كان : س ، ص عددين حقيقيين وكان : س = $\frac{١٣}{٥ - ت}$ ، ص = $\frac{٣ + ٢\ ت}{١ + ت}$

فأثبت أن : س ، ص مترافقان.

---

٦ إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين وكان : أ + ب ت = $\frac{٢ + ت}{٢ - ت}$ **فأثبت أن :** أ^{٢} + ب^{٢} = ١

اكتشف الخطأ

٧ **أوجد فى أبسط صورة المقدار :** (٢ + ٣ ت)^{٢} (٢ − ٣ ت)

إجابة أحمد

(٢ + ٣ ت) (٢ + ٣ ت) (٢ − ٣ ت)

= (٢ + ٣ ت) (٤ − ٩ ت^{٢})

= (٢ + ٣ ت) (٤ + ٩) = ١٣ (٢ + ٣ ت)

= ٢٦ + ٣٩ ت

إجابة كريم

(٢ + ٣ ت)^{٢} (٢ − ٣ ت)

= (٤ + ٩ ت^{٢}) (٢ − ٣ ت)

= (٤ − ٩) (٢ − ٣ ت)

= − ٥ (٢ − ٣ ت) = − ١٠ + ١٥ ت

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : س^{٢} + ١ = ٠ فإن : ل^{٢٠١٨} + م^{٢٠١٨} = ...

(أ) −٢ ت (ب) ٢ ت (جـ) −٢ (د) ٢٠١٨

(٢) (١ + ت)^{٢٠٢٠} = ...

(أ) (١ − ت)^{٢٠٢٠} (ب) ٢^{١٠١٠} (جـ) ٢^{١٠١٠} ت (د) ت^{٢٠٢٠}

(٣) إذا كان: $\left(\frac{١ - ت}{١ + ت}\right)^{١٠٠}$ = س + ص ت فإن: (س ، ص) = ...

(أ) (٠ ، ١) (ب) (−١ ، ٠) (جـ) (٠ ، −١) (د) (١ ، ٠)

(٤) مرافق العدد $(٢ + ت)^{-١}$ هو ....

(أ) ٢ + ت (ب) ٢ − ت (جـ) $\frac{٢ - ت}{٥}$ (د) $\frac{٢ + ت}{٥}$

(٥) أي مما يأتي يعتبر تحليلًا للمقدار: س^{٢} + ٤ ؟

(أ) (س − ٢) (س + ٢) (ب) (س + ٢)^{٢}

(جـ) (س − ٢ ت)^{٢} (د) (س − ٢ ت) (س + ٢ ت)

(٦) ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + ... + ت^{١٠٠} = ...

(أ) ت (ب) −١ (جـ) صفر (د) ت$^{١ + ٢ + ٣ + ...}$

(٧) (١ + ت) (١ + ت^{٢}) (١ + ت^{٣}) (١ + ت^{٤}) ... (١ + ت^{١٠٠}) = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) صفر (د) لا شيء مما سبق.

(٨) إذا كان: ت^{م} = ت^{ن} فأي مما يأتي دائمًا صحيح ؟

① م = ن ② (م + ن) عدد زوجي. ③ (ن − م) مضاعف للعدد ٤

(أ) ① فقط. (ب) ① ، ③ فقط.

(جـ) ② ، ③ فقط. (د) جميع ما سبق.

(٩) إذا كان: أ < ب < ٠ < حـ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية

وكان: $\sqrt{ب\,(حـ - أ)}$ + $\sqrt{أ\,ب}$ = ٢ + ٣ ت فإن: ب حـ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) −٥

(١٠) أي من الآتي صحيح ؟

(أ) ٢ + ٣ ت < ٣ + ٤ ت (ب) ٣ − ٤ ت < ٢ − ٣ ت

(جـ) ١ + ت < −١ − ت (د) لا شيء مما سبق.

---

2 إذا كانت: ٧ ت = (س + ٣ ت) (ص − ت) − ٩

فأوجد قيم: س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة السابقة.

---

3 إذا كانت: س ، ص ، أ ، ب أعداد حقيقية وكان: س = $\frac{٢ + ت}{٢ - ت}$ ، ص = $\frac{٢ + ٣ ت}{٢ + ت}$

وكان: ٢ س − ص = أ + ب ت **فأثبت أن:** ٩ أ^{٢} + ب^{٢} = ١

الدرس

2

تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

سبق أن درسنا كيفية حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) فى متغير واحد فى ح وعلمنا أنه عند حلها فإننا نحصل على حلين على الأكثر ولكن بصفة عامة هذه المعادلة التربيعية لها جذران بالضبط ، والسؤال الذى سنتطرق له فى هذا الدرس هو :

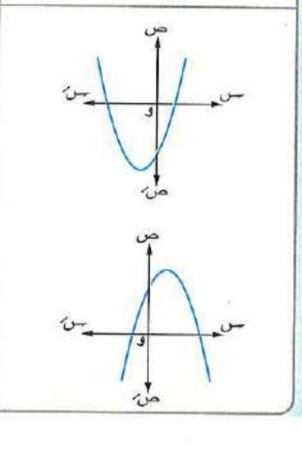
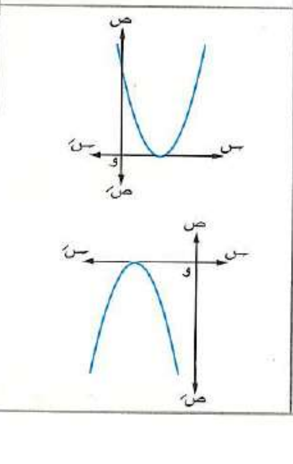
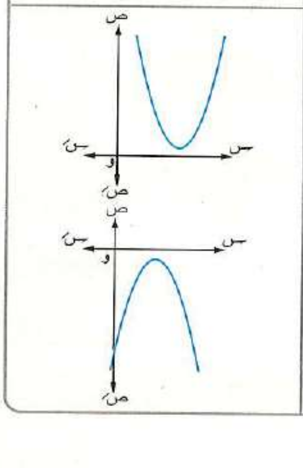
هل يمكن تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية دون حلها ؟!

نعم ، يمكن أن نفعل هذا باستخدام **مميز المعادلة** والذى سنتعرف عليه فيما يلى :

- عند حل المعادلة التربيعية : $أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ = ٠$ حيث $أ \neq ٠$ باستخدام القانون العام

فإننا نحصل على جذرين هما : $\dfrac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ}}{٢\,أ}$ ، $\dfrac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ}}{٢\,أ}$

- وكلا الجذرين يحتوى على المقدار : $\sqrt{ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ}$ ، ويُسمى المقدار : $ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ$ مميز المعادلة التربيعية لأنه يستخدم لتمييز نوع جذرى المعادلة التربيعية ، كالتالى :

المميز	موجب $(ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ) > ٠$	مساويًا للصفر $ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ = ٠$	سالب $(ب^{٢} - ٤\,أ\,جـ) < ٠$
نوع الجذرين	حقيقيان مختلفان	حقيقيان متساويان	مركبان وغير حقيقيين
رسم توضيحى للدالة المرتبطة بالمعادلة			

والمثال التالى يوضح الحالات الثلاثة بالجدول السابق :

مثـال ١

عيِّن نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية :

[١] $س^٢ - ٣ س + ٥ = ٠$ [٢] $س^٢ + ١٠ س + ٢٥ = ٠$ [٣] $٣ س^٢ + ١٠ س = ٤$

الحـل

[١] ∵ $أ = ١$ ، $ب = -٣$ ، $ح = ٥$

∴ المميز $= ب^٢ - ٤ أ ح$

$= (-٣)^٢ - ٤ × ١ × ٥ = -١١$ (كمية سالبة) ∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين.

[٢] ∵ $أ = ١$ ، $ب = ١٠$ ، $ح = ٢٥$

∴ المميز $= ب^٢ - ٤ أ ح = (١٠)^٢ - ٤ × ١ × ٢٥ = ٠$ ∴ الجذران حقيقيان متساويان.

[٣] ∵ $٣ س^٢ + ١٠ س - ٤ = ٠$ ∴ $أ = ٣$ ، $ب = ١٠$ ، $ح = -٤$

∴ المميز $= ب^٢ - ٤ أ ح = (١٠)^٢ - ٤ × ٣ × (-٤) = ١٤٨$ (كمية موجبة)

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

حاول بنفسك

عيِّن نوع جذرى كل معادلة من المعادلات الآتية :

[١] $س^٢ - ٧ س + ١٠ = ٠$ [٢] $س^٢ + ٤ س + ٥ = ٠$ [٣] $٤ س^٢ - ١٢ س = -٩$

مثـال ٢

أثبت أن جذرى المعادلة : $٧ س^٢ - ١١ س + ٥ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحـل

∵ $أ = ٧$ ، $ب = -١١$ ، $ح = ٥$

∴ المميز $= ب^٢ - ٤ أ ح = (-١١)^٢ - ٤ × ٧ × ٥ = -١٩ < ٠$ ∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين.

، ∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ ح}}{٢ أ} = \frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{١٤} = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}\, ت}{١٤}$

∴ الجذران هما : $\frac{١١ + \sqrt{١٩}\, ت}{١٤}$ ، $\frac{١١ - \sqrt{١٩}\, ت}{١٤}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$

فأثبت أن : جذرى المعادلة مركبان وغير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

مثال ٣

إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} − ك س + ٢ ك − ٤ س + ٥ = ٠ متساويين فأوجد قيمة ك الحقيقية ثم أوجد الجذرين.

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة : ∴ س^{٢} − (ك + ٤) س + (٢ ك + ٥) = ٠

∴ المميز = (ك + ٤)^{٢} − ٤ × ١ × (٢ ك + ٥) = ك^{٢} + ٨ ك + ١٦ − ٨ ك − ٢٠ = ك^{٢} − ٤

، ∵ جذرى المعادلة متساويان. ∴ المميز = ٠

∴ ك^{٢} − ٤ = ٠ ∴ ك^{٢} = ٤ ∴ ك = ± ٢

عند ك = ٢ : ∴ المعادلة هى : س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠ ∴ (س − ٣)^{٢} = ٠ ∴ س = ٣

∴ عند ك = ٢ يكون الجذران متساويين وكل منهما = ٣

، عند ك = −٢ : ∴ المعادلة هى : س^{٢} − ٢ س + ١ = ٠ ∴ (س − ١)^{٢} = ٠ ∴ س = ١

∴ عند ك = −٢ يكون الجذران متساويين وكل منهما = ١

حاول بنفسك

أوجد قيمة ك الحقيقية التى تجعل جذرى المعادلة : ٤ س^{٢} − ٨ س + ك = ٠ متساويين ثم أوجد هذين الجذرين.

مثال ٤

١ أوجد قيم م الحقيقية التى تحقق أن المعادلة : س^{٢} − (٢ م − ١) س + م^{٢} = ٠

ليس لها جذور حقيقية. (أى : ليس لها حل فى ح)

٢ أوجد قيم ك الحقيقية التى تحقق أن المعادلة : س^{٢} + ٢ (ك − ١) س + ك^{٢} = ٠

لها جذران حقيقيان. (أى : لها حل فى ح)

الحل

١ ∵ المعادلة ليس لها جذور حقيقية. ∴ ب^{٢} − ٤ أ جـ < ٠ ∴ (٢ م − ١)^{٢} − ٤ م^{٢} < ٠

∴ ٤ م^{٢} − ٤ م + ١ − ٤ م^{٢} < ٠ ∴ −٤ م < −١ ∴ م > $\frac{١}{٤}$

∴ المعادلة لا يكون لها جذور حقيقية إذا كانت م ∈]$\frac{١}{٤}$ ، ∞[

٢ ∵ المعادلة لها جذران حقيقيان.

∴ $ب^٢ - ٤ ا حـ \geq ٠$.

∴ $٤ (ك^٢ - ٢ ك + ١) - ٤ ك^٢ \geq ٠$.

∴ $-٨ ك \geq -٤$

∴ الجذران إما أن يكونا مختلفين أو متساويين.

∴ $٤ (ك - ١)^٢ - ٤ \times ١ \times ٤ ك^٢ \geq ٠$.

∴ $٤ ك^٢ - ٨ ك + ٤ - ٤ ك^٢ \geq ٠$.

∴ $ك \leq \frac{١}{٢}$

∴ المعادلة لها جذران حقيقيان إذا كانت $ك \in]-\infty ، \frac{١}{٢}]$

حاول بنفسك

إذا كانت المعادلة : $م^٢ س^٢ + (٢ م - ٢) س + ١ = ٠$ ليس لها حل فى ح فأوجد قيم م الحقيقية.

مثال ٥

أثبت أنه لجميع قيم ا الحقيقية لا يكون للمعادلة : $٤ س^٢ - ١٢ ا س + ٩ ا^٢ + ٤ = ٠$ جذور حقيقية.

الحل

المميز = $(-١٢ ا)^٢ - ٤ (٤) (٩ ا^٢ + ٤) = ١٤٤ ا^٢ - ١٤٤ ا^٢ - ٦٤$

= -٦٤ (كمية سالبة لجميع قيم ا) ∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة.

ملاحظة

إذا كانت المعاملات ا ، ب ، حـ فى المعادلة التربيعية : $ا س^٢ + ب س + حـ = ٠$ أعدادًا نسبية وكان المميز مربعًا كاملاً كان الجذران حقيقيين نسبيين.

فمثلًا

١ المعادلة : $٣ س^٢ - ٥ س - ٢ = ٠$.

- معاملات الحدود هى :
٣ ، -٥ ، -٢ (أعداد نسبية)
- المميز = ٤٩ (مربع كامل)
∴ الجذران حقيقيان نسبيان.

وللتحقق من ذلك :

بالتعويض فى القانون العام نجد أن الجذرين هما
٢ ، $-\frac{١}{٣}$ (حقيقيان نسبيان)

٢ المعادلة : $س^٢ - ٢ \sqrt{٥} س + ١ = ٠$.

- معاملات الحدود هى : ١ ، $-٢\sqrt{٥}$ ، ١
(معامل الحد الأوسط حقيقى وغير نسبى)
- المميز = ١٦ (مربع كامل)
∴ الجذران حقيقيان غير نسبيين.

وللتحقق من ذلك :

بالتعويض فى القانون العام نجد أن الجذرين هما
$\sqrt{٥} + ٢$ ، $\sqrt{٥} - ٢$ (حقيقيان غير نسبيين)

لاحظ أنه فى المعادلة $س^{٢} - ٢\sqrt{٥}\,س + ١ = ٠$ بالرغم من أن المميز مربع كامل إلا أن الجذرين حقيقيان غير نسبيين وذلك لكون معامل الحد الأوسط غير نسبى.

مثال ٦

إذا كان : أ ، ب عددين نسبيين أثبت أن جذرى المعادلة : $أ س^{٢} + (أ^{٢} + ب^{٢})\,س + أ ب^{٢} = ٠$ نسبيان.

الحل

$\because$ المميز $= (أ^{٢} + ب^{٢})^{٢} - ٤ \times أ \times أ ب^{٢} = أ^{٤} + ٢ أ^{٢} ب^{٢} + ب^{٤} - ٤ أ^{٢} ب^{٢}$

$= أ^{٤} - ٢ أ^{٢} ب^{٢} + ب^{٤} = (أ^{٢} - ب^{٢})^{٢}$ «مربع كامل»

$\therefore$ المعاملات أعداد نسبية والمميز مربع كامل.

$\therefore$ جذرا المعادلة عددان نسبيان.

حاول بنفسك

إذا كان أ عددًا نسبيًا فأثبت أن جذرى المعادلة : $١٥ س^{٢} - (١٠ + ٣ أ)\,س + ٢ أ = ٠$ يكونان نسبيين.

ملاحظة

إذا كان مميز المعادلة التربيعية (ذات المعاملات الحقيقية) غير موجب فإن جذرى المعادلة التربيعية يكونان عددين مركبين مترافقين.

فمثلًا المعادلة $س^{٢} - ٢ س + ٢ = ٠$

- معاملات الحدود هى : ١ ، −٢ ، ٢ (أعداد حقيقية)
- المميز = −٤ (غير موجب)

$\therefore$ الجذران مركبان مترافقان

وللتحقق من ذلك بالتعويض فى القانون العام نجد أن الجذرين هما

$١ + ت$ ، $١ - ت$ (مركبان مترافقان)

تمارين 2

على تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جذرا المعادلة : $س^{٢} - ٥ س + ١١ = ٠$ هما ....

(أ) مركبان وغير حقيقيين. (ب) نسبيان.

(جـ) حقيقيان مختلفان. (د) حقيقيان متساويان.

(٢) جذرا المعادلة : $س (س - ٢) = ٥$ يكونان ....

(أ) مركبان غير حقيقيين. (ب) حقيقيان متساويان.

(جـ) حقيقيان مختلفان. (د) ٢ ، ٠

(٣) جذرا المعادلة : $س + \frac{٩}{س} = ٦$ يكونان ....

(أ) حقيقيان متساويان. (ب) مركبان غير حقيقيين.

(جـ) حقيقيان مختلفان. (د) تخيليان متساويان.

(٤) جذرا المعادلة : $٦ س^{٢} = ١٩ س - ١٥$ يكونان ....

(أ) مركبان غير حقيقيين. (ب) حقيقيين متساويين.

(جـ) نسبيين مختلفين. (د) تخيليين مترافقين.

(٥) عدد قيم س الحقيقية التى تحقق أن : $٢ س^{٢} - ٧ س = ٥$

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٦) المميز للمعادلة : $(س + ٢)^{٢} + ٥ = ٠$ يكون ....

(أ) مربع كامل. (ب) أكبر من الصفر.

(جـ) عدد سالب. (د) عدد غير نسبى.

(٧) المعادلة التربيعية : $أ^{٢} س^{٢} + ٢ أ ب س + ب^{٢} = ٠$ حيث $أ \in ح^{*}$ ، $ب \in ح$ ....

(أ) لها جذران حقيقيان مختلفان. (ب) لها جذران حقيقيان متساويان.

(جـ) ليس لها جذور حقيقية. (د) لا يمكن تحديد نوع جذريها.

(٨) جذرا المعادلة : $حـ س^{٢} + أ س + ب = ٠$ يكونان عددان مركبان وغير حقيقيان إذا كان ....

(أ) $ب^{٢} - ٤ أ حـ < ٠$. (ب) $أ^{٢} - ٤ ب حـ < ٠$.

(جـ) $حـ^{٢} - ٤ أ ب < ٠$. (د) $ب^{٢} - ٤ أ حـ > ٠$.

(٩) إذا كان جذرا المعادلة : أ س^{٢} + ب = ٠ حقيقيين ومختلفين فإن ....

(أ) أ ب > صفر　　(ب) أ = صفر

(جـ) أ > صفر ، ب > صفر　　(د) أ ب < صفر

(١٠) إذا كان : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ وكان : أ جـ < ٠ فإن جذرى المعادلة يكونان ....

(أ) حقيقيان متساويان.　　(ب) حقيقيان مختلفان.

(جـ) مركبان مترافقان.　　(د) نسبيان.

(١١) إذا كانت : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ معادلة من الدرجة الثانية فإن أى من المتباينات الآتية يحقق أن المعادلة لها جذران حقيقيان ؟

(أ) ب^{٢} + ٤ أ جـ ≤ ٠　　(ب) ب^{٢} − ٤ أ جـ > ٠

(جـ) ب^{٢} ≤ ٥ أ جـ　　(د) ب^{٢} − ٤ أ جـ ≥ ٠

(١٢) إذا كان : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ، ب ، جـ أعداد نسبية وكان : ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٢٥ فإن جذرى المعادلة ....

(أ) حقيقيين متساويين.　　(ب) مركبين وغير حقيقيين.

(جـ) مركبين مترافقين.　　(د) نسبيين مختلفين.

(١٣) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} − ك س + ٢٥ = ٠ حقيقيان متساويان　فإن : ك = ...

(أ) ١٠ فقط　　(ب) −١٠ فقط　　(جـ) ± ١٠　　(د) ± ٥

(١٤) إذا كان جذرى المعادلة التربيعية : ك س^{٢} − ٢ ك س + ٣ = ٠ حقيقيين متساويين فإن : ك = ...

(أ) صفر أ، ٣　　(ب) ± ١　　(جـ) صفر فقط.　　(د) ٣ فقط.

(١٥) إذا كان المميز للمعادلة التربيعية : ٢ س^{٢} + ٥ س + ٤ ك = ٠ يساوى صفر فإن : ك = ...

(أ) ± ١٤　　(ب) صفر　　(جـ) ± $\frac{٢٥}{٣٢}$　　(د) $\frac{٢٥}{٣٢}$

(١٦) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} − ٤ س + ك = ٠ حقيقيين　فإن : ك ∈ ....

(أ) [٤ ، ∞[　　(ب)]−∞ ، ٤]　　(جـ)]٤ ، ∞[　　(د)]−∞ ، ٤[

(١٧) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} + ٣ س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين فإن : ك لايمكن أن تساوى ....

(أ) −١　　(ب) ٣　　(جـ) ٢　　(د) ١

(١٨) إذا كان جذرا المعادلة : ك س^{٢} − ٨ س + ١٦ = ٠ مركبين وغير حقيقيين　فإن : ....

(أ) ك < ٢　　(ب) ك > ٢　　(جـ) ك ∈]١ ، ١٠[　　(د) ك < ١

(١٩) فى المعادلة : ٧٥ س^{٢} + ٧ ك س + ٣ = ٠ إذا كان : ك ≤ ٥ فإن جذرا المعادلة ....

(أ) حقيقيين متساويين. (ب) مركبين وغير حقيقيين.

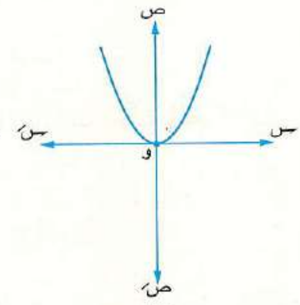
(جـ) نسبيان مختلفان. (د) حقيقيين مختلفين.

(٢٠) إذا كان التمثيل البيانى للدالة التربيعية د : د (س) لا يقطع محور السينات فأى مما يأتى يمكن أن تكون قاعدة الدالة ؟

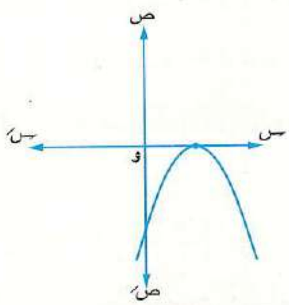
(أ) ٢ س^{٢} + ٣ س − ٥ (ب) − س^{٢} + ٥ س + ١

(جـ) ٤ س^{٢} − ٢٠ س + ٢٥ (د) ٣ س^{٢} − س + ٢

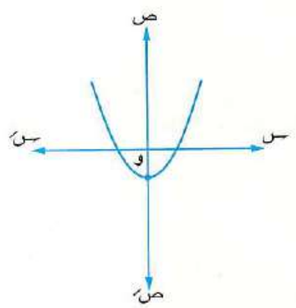
(٢١) فى المعادلة التربيعية د (س) = ٠ إذا كان المميز سالب فأى مما يأتى يمكن أن يكون التمثيل البيانى للدالة د ؟



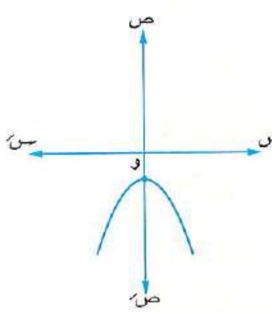
(أ)



(ب)

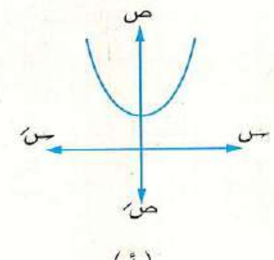


(جـ)

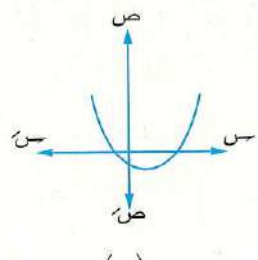


(د)

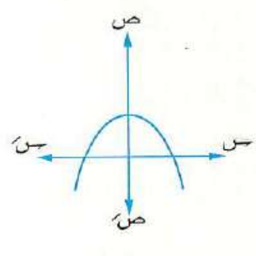
(٢٢) كلًا من الأشكال الآتية تمثل منحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، فى أى من الأشكال يكون ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠ .



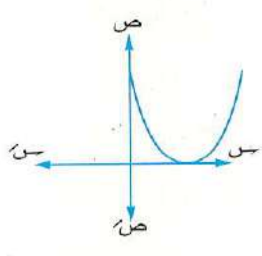
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

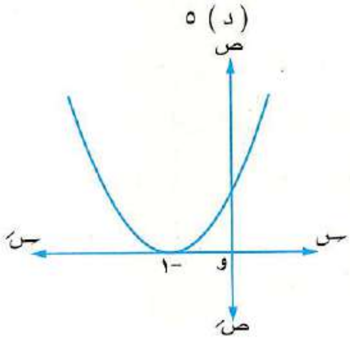
(٢٣) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د : د (س) = س^{٢} − ٢ (م − ٢) س + م^{٢} − ٨ يمس محور السينات فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٤) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

فإن : (ب^{٢} − ٤ أ جـ) × د (٣) = ...



(أ) ٣ (ب) −١

(جـ) −٣ (د) صفر

(٢٥) إذا كان للمعادلة : $س^٢ = ك - ٢$ جذران تخيليان مختلفان فإن ....

(أ) $ك < ٢$ (ب) $ك > ٢$ (جـ) $ك \geq ٤$ (د) $٢ < ك < ٤$

(٢٦) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ + ك س + ك^٢ = ٠$ مركبان وغير حقيقيان

فإن : $ك \in$ ....

(أ) $ح - \{٠\}$ (ب) $ح$ (جـ) $]٠ ، \infty[$ (د) $]-\infty ، ٠]$

(٢٧) للمعادلة : $س^٢ - ٣ س + ك = ٠$ جذران غير متساويان إذا كانت $ك \neq$ ....

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) -٣

(٢٨) المعادلة : $س^٢ - (٢ م - ١) س + م^٢ = ٠$ ليس لها جذور حقيقية إذا كانت $م \in$ ....

(أ) $]\frac{١}{٤} ، \infty[$ (ب) $]-\infty ، \frac{١}{٤}[$ (جـ) $]٤ ، \infty[$ (د) $]-\infty ، ٤[$

(٢٩) جذرا المعادلة : $س^٢ + ك = ٠$ حيث $ك > ٠$ يكونان ....

(أ) مركبان مترافقان وغير حقيقيان. (ب) حقيقيان مختلفان.

(جـ) حقيقيان متساويان. (د) نسبيان.

(٣٠) المعادلة : $(س - ٣)^٢ + (س - ٤)^٢ = ٠$ لها ....

(أ) جذران حقيقيان غير متساويان. (ب) جذران حقيقيان متساويان.

(جـ) جذران نسبيان. (د) جذران مركبان غير حقيقيان.

(٣١) جذرا المعادلة : $(أ^٢ + ١) س^٢ - ٢ أ^٢ س + أ^٤ = ٠$ حيث $أ \in ح - \{٠\}$ ....

(أ) حقيقيان مختلفان. (ب) مركبان غير حقيقيان.

(جـ) حقيقيان متساويان. (د) نسبيان مختلفان.

(٣٢) إذا كان : أ ، ب عددان حقيقيان ، $أ \neq ب$ فإن جذرا المعادلة :

$(أ - ب) س^٢ - ٥ (أ + ب) س - ٢ (أ - ب) = ٠$ يكونان ....

(أ) حقيقيان متساويان. (ب) مركبان غير حقيقيان.

(جـ) حقيقيان غير متساويان. (د) لاشىء مما سبق.

(٣٣) عدد الحلول المختلفة للمعادلة : $س (س - أ) = أ^٢$ فى ح حيث $أ \in ح - \{٠\}$

يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٣٤) إذا كان أ ، ب ، جـ أعداد نسبية ، $أ \neq ٠$ فإن للمعادلة : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ جذران نسبيان

إذا كان : $ب^٢ - ٤ أ جـ =$ ....

(أ) عدد حقيقى موجب. (ب) عدد حقيقى سالب.

(جـ) عدد حقيقى مربع كامل. (د) صفر.

(٣٥) إذا كان جذرا المعادلة : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ هما ل ، ل حيث ل ∋ ح فإن : ....

(أ) أ = جـ (ب) جـ = ل (جـ) ب = ٠ (د) $\frac{ب^٢}{٤ أ جـ} = ١$

(٣٦) إذا كان جذرا المعادلة : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ حيث أ > ٠ حقيقيان متساويان

فإن جذرا المعادلة : $أ س^٢ + ب س + جـ + ١ = ٠$ يكونان ....

(أ) حقيقيان متساويان. (ب) حقيقيان مختلفان.

(جـ) مركبان وغير حقيقيين. (د) نسبيان.

(٣٧) قيم جـ الصحيحة التى تجعل للمعادلة : $س^٢ + ٣ س + جـ = ٠$ جذران حقيقيان مختلفان وللمعادلة : $س^٢ + ٣ س + جـ + ٢ = ٠$ جذران مركبان وغير حقيقيان هى ....

(أ) ٢ أ، ٣ (ب) ٢ أ، ١ (جـ) −٢ أ، −٣ (د) −٢ أ، −١

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ حدد نوع جذرى كل من المعادلات الآتية :

(١) $س^٢ - ٢ س + ٥ = ٠$

(٢) $س^٢ - ١٠ س + ٢٥ = ٠$

(٣) $- س^٢ + ٥ س - ٣٠ = ٠$

(٤) $(س - ١١) س - (س - ٦) = ٠$

(٥) $س - \frac{٢}{س - ١} = ٤$

(٦) $\frac{س}{س + ١} + \frac{س}{س - ١} = ٣$

(٧) $(س - ١) (س - ٧) = ٢ (س - ٣) (س - ٤)$

٢ أثبت أن جذرى المعادلة : $٢ س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

٣ إذا كان جذرا كل معادلة من المعادلات الآتية حقيقيين متساويين ، فأوجد قيم ك فى كل حالة :

(١) $س^٢ - ٣ س + ٢ + \frac{١}{ك} = ٠$ «٤»

(٢) $س^٢ + (٢ ك + ٣) س + ك^٢ = ٠$ «$-\frac{٣}{٤}$»

(٣) $س^٢ + ٢ (ك - ١) س + (٢ ك + ١) = ٠$ ثم أوجد الجذرين. «٠ ، ١ ، ١ أ ، ٤ ، −٣ ، −٣»

(٤) $س^٢ - ٢ ك س + ٧ ك - ٦ س + ٩ = ٠$ ثم أوجد الجذرين. «٠ ، ٣ ، ٣ أ ، ١ ، ٤ ، ٤»

٤ أوجد قيم العدد الحقيقى م التى تحقق أن المعادلة :

$(م - ١) س^٢ - ٢ م س + م = ٠$ ليس لها جذور حقيقية. «م ∋]−∞ ، ٠[»

٥ **بدون حل أى من المعادلات الآتية بيِّن أيًا منها لها جذران نسبيان وأيها لها جذران غير نسبيين ثم حقق إجابتك بإيجاد الجذرين :**

(١) ٢ س^٢ − ٣ س − ٢ = ٠

(٢) س^٢ + $\sqrt{٥}$ س − ٥ = ٠

(٣) ٢ (س + ٣) + س (س − ١) = ٩

٦ إذا كان : ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذرى المعادلة : ل س^٢ + (ل − م) س − م = ٠ عددان نسبيان.

٧ **أثبت أن جذرى المعادلة :** س^٢ + ك س + ك = ١ دائمًا نسبيان حيث ك ∈ ن

٨ **أوجد الفترة التى تنتمى إليها أ والتى تجعل جذرى المعادلة :**

(أ + ٢) س^٢ + (٢ أ + ٣) س + أ − ١ = ٠ حقيقيين. «أ ∈ $[-\frac{١٧}{٨} ، \infty[$»

٩ **أثبت أنه لجميع قيم أ ، ب الحقيقية يكون جذرا المعادلة :** (س − أ) (س − ب) = ٥ حقيقيين.

١٠ **أثبت أنه لجميع قيم أ الحقيقية ما عدا (أ = ٢) يكون للمعادلة :**

(أ − ١) س^٢ − أ س + ١ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) جذرا المعادلة : س^٢ − ٢ $\sqrt{٥}$ س + ١ = ٠ يكونان ....

(أ) حقيقيين نسبيين. (ب) غير حقيقيين.

(جـ) حقيقيين متساويين. (د) حقيقيين وغير نسبيين.

(٢) إذا كان : أ س^٢ + ب س + جـ = ٠ ، أ ∈ ح* ، ب ∈ ح ، جـ ∈ ح وكان (ب^٢ − ٤ أ جـ) غير موجب فإن جذرى المعادلة يكونان ....

(أ) متساويين. (ب) غير حقيقيين. (جـ) مركبين مترافقين. (د) حقيقيين مختلفين.

(٣) فى أى من المعادلات التربيعية الآتية يكون الجذران مركبين مترافقين ؟

(أ) س^٢ − ٤ س − ٥ = ٠ (ب) $\sqrt{٣}$ س^٢ + $\sqrt{٥}$ س − ١ = ٠

(جـ) س^٢ − ٣ $\sqrt{٢}$ س + ٤ = ٠ (د) ٣ س^٢ − $\sqrt{٧}$ س + ٥ = ٠

(٤) إذا كان للمعادلة : س^٢ − ٢ $\sqrt{٢}$ س + أ = ٠ جذران مركبان مترافقان فإن : أ ∈ ....

(أ) $]-٢ ، ٢[$ (ب) $]-\infty ، ٢[$ (جـ) $]٢ ، \infty[$ (د) $[٢ ، \infty[$

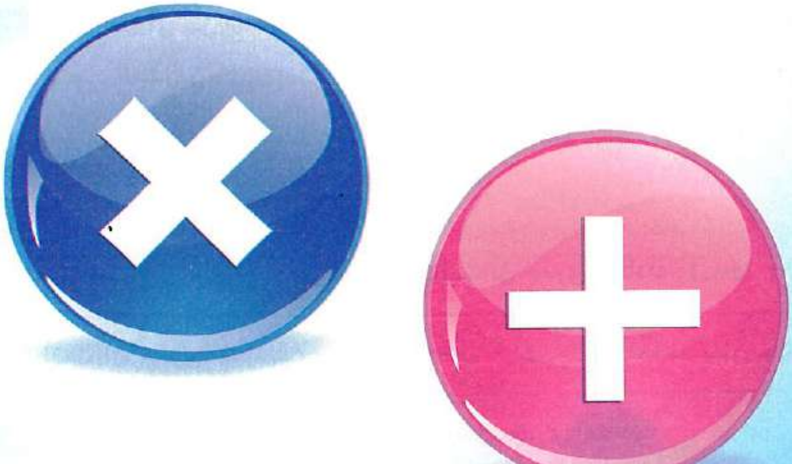
٢ إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادًا حقيقية فأثبت أن جذرى المعادلة : س^٢ + ٢ أ س + أ^٢ = ب^٢ + جـ^٢ حقيقيان.

٣ **أثبت أن جذرى المعادلة :** $\frac{١}{س + أ} = \frac{١}{س} + \frac{١}{أ}$ دائمًا غير حقيقيين إذا كانت أ ∈ ح* ، س ∉ {٠ ، − أ}

الدرس

3

العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها



نعلم أن جذرى المعادلة التربيعية : $أ س^{٢} + ب س + ح = ٠$ ، $أ \neq$ صفر هما :

$$\frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}}{٢ أ} ، \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}}{٢ أ}$$ ويكون :

١ مجموع الجذرين $= \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}}{٢ أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}}{٢ أ} = \frac{-٢ ب}{٢ أ} = \frac{-ب}{أ}$

أى أن مجموع الجذرين $= \frac{- \text{معامل } س}{\text{معامل } س^{٢}}$

٢ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{-ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}}{٢ أ} \times \frac{-ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ح}}{٢ أ}$

$$= \frac{ب^{٢} - (ب^{٢} - ٤ أ ح)}{٤ أ^{٢}} = \frac{ب^{٢} - ب^{٢} + ٤ أ ح}{٤ أ^{٢}} = \frac{٤ أ ح}{٤ أ^{٢}} = \frac{ح}{أ}$$

أى أن حاصل ضرب الجذرين $= \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{٢}}$

وبصورة رمزية نكتب :

إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة التربيعية : $أ س^{٢} + ب س + ح = ٠$ فإن :

١ $ل + م = \frac{-ب}{أ}$ ٢ $ل م = \frac{ح}{أ}$

مثال ١

دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة : ٦ س^{٢} − ١١ س = ١٠

الحل

∵ ٦ س^{٢} − ١١ س − ١٠ = ٠ ∴ أ = ٦ ، ب = −١١ ، جـ = −١٠

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-(-١١)}{٦}$ = $\frac{١١}{٦}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{-١٠}{٦}$ = $-\frac{٥}{٣}$

حاول بنفسك

إذا كانت : ٣ س^{٢} + ٥ = ٤ س فأوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما.

مثال ٢

في كل مما يأتي أوجد قيمة ك ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة :

١ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} + ك س + ١ = ٠ هو $-\frac{٣}{٢}$

٢ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} − ٤ س + ك = ٠ هو ٤ $\frac{١}{٢}$

الحل

١ ∵ مجموع الجذرين = $-\frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{-ك}{٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$ ∴ $\boxed{ك = ٣}$

∴ المعادلة هى : ٢ س^{٢} + ٣ س + ١ = ٠ ∴ (٢ س + ١) (س + ١) = ٠

∴ $\boxed{س = -\frac{١}{٢}}$ أ، $\boxed{س = -١}$

٢ ∵ حاصل ضرب الجذرين = ٤ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ ∴ $\frac{ك}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ ∴ $\boxed{ك = ٩}$

∴ المعادلة هى : ٢ س^{٢} − ٤ س + ٩ = ٠ ∴ أ = ٢ ، ب = −٤ ، جـ = ٩

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ = $\frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٩}}{٢ \times ٢}$ = $\frac{٤ \pm \sqrt{-٥٦}}{٤}$ = ١ ± $\frac{\sqrt{١٤}}{٢}$ ت

∴ $\boxed{س = ١ + \frac{\sqrt{١٤}}{٢} ت}$ أ، $\boxed{س = ١ - \frac{\sqrt{١٤}}{٢} ت}$

حاول بنفسك

في كل مما يأتي أوجد قيمة أ ، ثم حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة :

١ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} − أ س + ٦ = ٠ هو ٣ $\frac{١}{٢}$

٢ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : س^{٢} + ٣ س + أ = ٠ هو ٥

مثال ٣

[١] إذا كان : $س = -٣$ أحد جذرى المعادلة : $٢س^٢ + ك س - ٣ = ٠$ **فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد قيمة : ك**

[٢] إذا كان : $س = ٦$ أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - ٥س + ك = ٠$ **فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد قيمة : ك**

[٣] إذا كان : -١ ، ٥ هما جذرا المعادلة : $أس^٢ + ب س - ٥ = ٠$ **فأوجد قيمة كل من : أ ، ب**

الحل

[١] ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ} = \frac{-٣}{٢}$ ∴ $-٣ \times$ الجذر الآخر $= \frac{-٣}{٢}$

∴ الجذر الآخر $= -\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{-٣}$ ∴ $\boxed{\text{الجذر الآخر} = \frac{١}{٢}}$

، ∵ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \frac{-ك}{٢}$ ، ∵ الجذرين هما : -٣ ، $\frac{١}{٢}$

∴ $-٣ + \frac{١}{٢} = \frac{-ك}{٢}$ ∴ $\frac{-٥}{٢} = \frac{-ك}{٢}$ ∴ $\boxed{ك = ٥}$

حل آخر:

∵ $س = -٣$ أحد جذرى المعادلة : $٢س^٢ + ك س - ٣ = ٠$ فهو يحققها.

∴ $٢(-٣)^٢ + ك(-٣) - ٣ = ٠$ ∴ $١٨ - ٣ك - ٣ = ٠$ ومنها $\boxed{ك = ٥}$

∴ المعادلة هى : $٢س^٢ + ٥س - ٣ = ٠$

وبالتحليل : ∴ $(٢س - ١)(س + ٣) = ٠$ ∴ $٢س - ١ = ٠$ ومنها $س = \frac{١}{٢}$

أ، $س + ٣ = ٠$ ومنها $س = -٣$ ∴ $\boxed{\text{الجذر الآخر} = \frac{١}{٢}}$

[٢] ∵ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ} = \frac{-(-٥)}{١} = ٥$

∴ $٦ +$ الجذر الآخر $= ٥$ ∴ $\boxed{\text{الجذر الآخر} = -١}$

، ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ} = \frac{ك}{١} = ك$ ، ∵ الجذرين هما : ٦ ، -١

∴ $٦ \times (-١) = ك$ ∴ $\boxed{ك = -٦}$

حاول حل المثال بطريقة أخرى كما فى رقم [١]

[٣] ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{جـ}{أ}$ ∴ $-١ \times ٥ = \frac{-٥}{أ}$ ∴ $\boxed{أ = ١}$

، ∵ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$ ∴ $-١ + ٥ = \frac{-ب}{١}$ ∴ $\boxed{ب = -٤}$

حل آخر:

∵ -١ جذر للمعادلة ∴ $أ(-١)^٢ + ب(-١) - ٥ = ٠$ ∴ $أ - ب = ٥$ (١)

، ∵ ٥ جذر للمعادلة ∴ $أ(٥)^٢ + ب(٥) - ٥ = ٠$

∴ $٢٥أ + ٥ب = ٥$ وبالقسمة على ٥ ∴ $٥أ + ب = ١$ (٢)

وبجمع المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ $٦أ = ٦$ ∴ $\boxed{أ = ١}$

وبالتعويض فى (١) : ∴ $١ - ب = ٥$ ∴ $\boxed{ب = -٤}$

حاول بنفسك

أوجد الجذر الآخر لكل من المعادلتين الآتيتين ، ثم أوجد قيمة ك فى كل حالة :

[1] إذا كان : س = −١ أحد جذرى المعادلة : $س^٢ + ك س - ٧ = ٠$

[2] إذا كان : $س = \frac{٥}{٣}$ أحد جذرى المعادلة : $٩ س^٢ - ٩ س + ك = ٠$

مثال ٤

إذا كان : $(١ + \sqrt{٢}\, ت)$ هو أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - ٢ س + حـ = ٠$ حيث حـ $\in$ ح

فأوجد : [1] قيمة الجذر الآخر. [2] قيمة حـ

الحل

$\because$ مجموع الجذرين $= \frac{-(-٢)}{١} = ٢$

$\therefore (١ + \sqrt{٢}\, ت) +$ الجذر الآخر $= ٢$ $\therefore$ الجذر الآخر $= ٢ - (١ + \sqrt{٢}\, ت)$

$\therefore$ $\boxed{\text{الجذر الآخر} = ١ - \sqrt{٢}\, ت}$

، $\because$ حاصل ضرب الجذرين = حـ

$\therefore$ حـ $= (١ - \sqrt{٢}\, ت)(١ + \sqrt{٢}\, ت) = ١^٢ - (\sqrt{٢}\, ت)^٢ = ١ - ٢ ت^٢ = ٣$ $\therefore$ $\boxed{حـ = ٣}$

لاحظ مباشرة أنه :

$\because$ معاملات الحدود $\in$ ح ، أحد الجذرين مركب غير حقيقى

$\therefore$ الجذر الآخر هو مرافق الجذر المعطى أى أنه يساوى $١ - \sqrt{٢}\, ت$

حل آخر :

$\because (١ + \sqrt{٢}\, ت)$ أحد جذرى المعادلة المعطاة ، فهو يحققها.

$\therefore (١ + \sqrt{٢}\, ت)^٢ - ٢ (١ + \sqrt{٢}\, ت) + حـ = ٠$

$\therefore ١ + ٢ \sqrt{٢}\, ت + (\sqrt{٢}\, ت)^٢ - ٢ - ٢ \sqrt{٢}\, ت + حـ = ٠$

$\therefore ١ + \cancel{٢ \sqrt{٢}\, ت} - ٢ - ٢ - \cancel{٢ \sqrt{٢}\, ت} + حـ = ٠$

$\therefore -٣ + حـ = ٠$ $\therefore$ $\boxed{حـ = ٣}$

أى أن $س^٢ - ٢ س + ٣ = ٠$

ويمكن باستخدام القانون العام إيجاد الجذر الآخر المطلوب.

حاول بنفسك

إذا كان : $(\sqrt{٢} + ت)$ هو أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - ٢ \sqrt{٢} س + حـ = ٠$ حيث حـ $\in$ ح

فأوجد : [1] قيمة الجذر الآخر. [2] قيمة حـ

ملاحظات

في المعادلة التربيعية : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$

[١] إذا كان : $أ = ١$ فإن : $ل + م = -ب$ ، $ل م = جـ$

أي أن مجموع الجذرين = المعكوس الجمعي لمعامل س ، حاصل ضرب الجذرين = الحد المطلق.

[٢] إذا كان : $ب = ٠$ فإن : $ل + م = ٠$ **أي** $ل = -م$

أي أن أحد جذري المعادلة معكوس جمعي للآخر.

[٣] إذا كان : $أ = جـ$ فإن : $ل م = ١$ **أي** $ل = \frac{١}{م}$

أي أن أحد جذري المعادلة معكوس ضربي للآخر.

مثال ٥

[١] أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة : $٣ س^٢ + (ك - ٣) س + ٧ = ٠$

هو المعكوس الجمعي للجذر الآخر.

[٢] أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة : $٢ ك س^٢ + ٧ س + ك^٢ + ١ = ٠$

هو المعكوس الضربي للجذر الآخر.

الحل

[١] ∵ أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر. ∴ $ب = ٠$

∴ $ك - ٣ = ٠$ ∴ $\boxed{ك = ٣}$

[٢] ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر. ∴ $أ = جـ$

∴ $ك^٢ + ١ = ٢ ك$ ∴ $ك^٢ - ٢ ك + ١ = ٠$

∴ $(ك - ١)^٢ = ٠$ ∴ $\boxed{ك = ١}$

حاول بنفسك

أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذري المعادلة :

[١] $س^٢ + (ك - ٥) س - ٩ = ٠$ معكوسًا جمعيًا للآخر.

[٢] $س^٢ + ٣ س + ك = ٠$ معكوسًا ضربيًا للآخر.

مثال ٦

أوجد قيمة ء التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $س^٢ + ء س - ٥٠ = ٠$ ضعف المعكوس الجمعى للجذر الآخر.

الحل

نفرض أن أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = -٢ ل

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^٢}$ ∴ ل $(-٢ ل) = \frac{-٥٠}{١}$

∴ $-٢ ل^٢ = -٥٠$ ∴ $ل^٢ = ٢٥$ ∴ ل $= \pm ٥$

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } س^٢}$ ∴ ل $+ (-٢ ل) = \frac{-ء}{١}$

∴ $-ل = -ء$ ∴ ل $= ء$ ∴ $ء = \pm ٥$

حاول بنفسك

أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - ك س + ١٢ = ٠$ ثلاثة أمثال الجذر الآخر.

مثال ٧

أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$

مساويًا المعكوس الجمعى لضعف الجذر الآخر.

الحل

بفرض أن أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = -٢ ل

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ∴ ل $+ (-٢ ل) = \frac{-ب}{أ}$ ∴ ل $= \frac{ب}{أ}$ (١)

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$ ∴ ل $\times (-٢ ل) = \frac{حـ}{أ}$ ∴ $ل^٢ = \frac{-حـ}{٢ أ}$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ $\left(\frac{ب}{أ}\right)^٢ = \frac{-حـ}{٢ أ}$ ∴ $\frac{ب^٢}{أ^٢} = \frac{-حـ}{٢ أ}$

∴ $\frac{ب^٢}{أ} = \frac{-حـ}{٢}$ ∴ $٢ ب^٢ + أ حـ = ٠$ (وهذا هو الشرط اللازم)

حاول بنفسك

أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$

مساويًا أربعة أمثال الجذر الآخر.

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموع جذرى المعادلة : س^٢ + ٣ س − ١٠ = ٠ هو ....

(أ) ١٠ (ب) −١٠ (جـ) ٣ (د) −٣

(٢) مجموع جذرى المعادلة : ٥ س^٢ − ٣ = ٠ هو ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) صفر (د) $\frac{٥}{٣}$

(٣) حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ س^٢ − ٧ س − ٦ = ٠ يساوى ....

(أ) −٦ (ب) $\frac{٧}{٢}$ (جـ) ٣ (د) −٣

(٤) حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٣ + ٢ س − $\frac{١}{٤}$ س^٢ = ٠ يساوى ....

(أ) −$\frac{٢}{٣}$ (ب) ١٢ (جـ) −١٢ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٥) حاصل ضرب الجذرين فى المعادلة : ٣ س^٢ − ٤ = ٠ مضروبًا فى مجموع الجذرين فى المعادلة :
س^٢ − ٣ س = ٠ هو ....

(أ) ١٢ (ب) −٣ (جـ) −٤ (د) ٣

(٦) إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٣ س^٢ + ب س + ١٤ = ٠ هو $\frac{-٧}{٣}$ فإن : ب = ...

(أ) −٧ (ب) ٧ (جـ) $\frac{١٤}{٣}$ (د) −١٤

(٧) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : (ك − ٢) س^٢ − ٦ س + ١٢ = ٠ هو ٣
فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣٨

(٨) إذا كان : م ، (٥ − م) هما جذرا المعادلة : س^٢ − ك س + ٦ = ٠ فإن : ك = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) −٨

(٩) فى المعادلة التربيعية : ب س^٢ + حـ س + أ = ٠ إذا كان مجموع جذريها يساوى حاصل ضربهما
فإن : حـ = ...

(أ) ب (ب) أ (جـ) − ب (د) − أ

(١٠) إذا كانت س = −١ أحد جذرى المعادلة : س^٢ − ك س − ٦ = ٠
فإن مجموع جذرى المعادلة = ...

(أ) −٥ (ب) ٦ (جـ) −٦ (د) ٥

(١١) إذا كان (٢ − ت) أحد جذرى المعادلة : $س^٢ + ب س + حـ =$ صفر حيث ب ، حـ ∈ ع
فإن (ب ، حـ) = ...

(أ) (٤ ، ٥) (ب) (−٤ ، −٥) (جـ) (٤ ، −٥) (د) (−٤ ، ٥)

(١٢) إذا كان ل ، م جذرا المعادلة : $س^٢ -$ (ك + ٢) س − ٣ = ٠ ، وكان : ل + م = ٠
فإن : ك = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٣) إذا كان : م ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة : $أ س^٢ + ب س + ١٢ = ٠$ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٩

(١٤) إذا كان : ل + ١ ، م + ١ جذرا المعادلة : $س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ وكان : ل < م
فإن : ل = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(١٥) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ + س + ١ = ٠$ فإن : ل + م + ل م = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(١٦) إذا كانت : ل ، م جذرا المعادلة : $س^٢ - ٢١ س + ٤ = ٠$ فإن : $\sqrt{ل} + \sqrt{م}$ = ...

(أ) ٢٥ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) ± ٥

(١٧) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ + ب س + حـ =$ صفر هما ل ، ل فإن : $ب^٢ + ٤ حـ$ = ...

(أ) صفر (ب) ٤ $ل^٢$ (جـ) ٨ ل (د) ٨ $ل^٢$

(١٨) حاصل ضرب جذور المعادلات : $أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ ، $ب س^٢ + حـ س + أ = ٠$
، $حـ س^٢ + أ س + ب = ٠$ يساوى .... (حيث أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية غير صفرية)

(أ) أ ب حـ (ب) −١ (جـ) ١ (د) صفر

(١٩) إذا كان : ل ، $ل^٢$ هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ + ب س + ٥٤ = ٠$ فإن : ب = ...

(أ) −١٢ (ب) −٢٤ (جـ) ٦ (د) ٩

(٢٠) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ن = ٠$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ١
فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٢ أ، ٣ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢١) إذا كان أحد جذور المعادلة : $س^٢ - ٣ س + حـ = ٠$ ضعف الجذر الآخر فإن : حـ = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٤

(٢٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ +$ ك س − ٩٨ = ٠ هو ضعف المعكوس الجمعى للجذر الآخر
فإن : ك = ...

(أ) ± ١٤ (ب) ± ٧ (جـ) ± ٨ (د) ٤٩

(٢٣) إذا كان أحد جذرى المعادلة : س^{٢} − (ب − ٣) س + ٥ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : ب = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٥

(٢٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : س^{٢} − (ب^{٢} − ٢ ب + ١) س − ٩ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : ب = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ١ (د) −١

(٢٥) إذا كان أحد جذرى المعادلة : (٢ س + ك)^{٢} − ١٢ س = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١٢

(٢٦) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة : (ك − ٣) س^{٢} − ٥ س + ٢ ك = ٨ معكوس ضربى للجذر الآخر

فإن : قيمة ك = ...

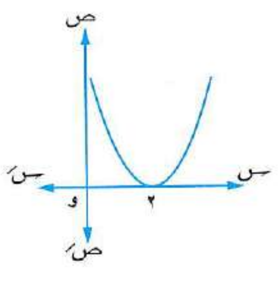
(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) −٥ (د) −٣

(٢٨) إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٣ س^{٢} − (ك + ٢) س + ك^{٢} + ٢ ك = ٠ معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر

فإن : ك = ...

(أ) −٣ أ، ١ (ب) −٣ أ، −١ (جـ) ٣ أ، −١ (د) ٣ أ، ١

(٢٩) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

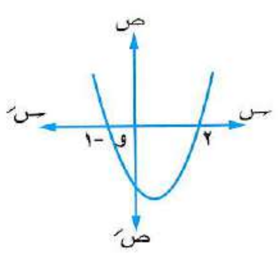


فإن : ب + جـ = ...

(أ) صفر (ب) ٢

(جـ) ٤ (د) ٨

(٣٠) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} + ك س + ن

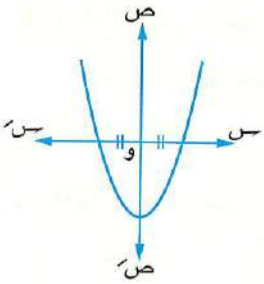


فإن : ك + ن = ...

(أ) ١ (ب) −١

(جـ) ٧ (د) −٧

(٣١) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د : $د(س) = أ س^٢ + ب س + ج$



فإذا كان : ل ، م هما جذرى المعادلة $د(س) = ٠$ فأى مما يأتى صحيح ؟

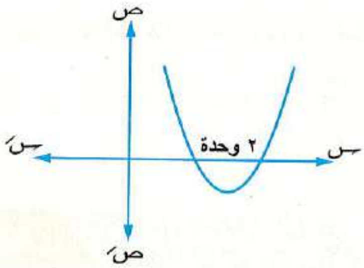
(أ) $ل + م >$ صفر ، $ل م >$ صفر

(ب) $ل + م >$ صفر ، $ل م <$ صفر

(جـ) $ل + م =$ صفر ، $ل م >$ صفر

(د) $ل + م =$ صفر ، $ل م <$ صفر

(٣٢) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة



د : $د(س) = س^٢ - ٨ س + ك + ١$

فإن : ك = ...

(أ) -١٤ (ب) ١٤

(جـ) ٨ (د) -٨

(٣٣) إذا كان : $س = -٣$ أحد جذرى المعادلة : $٢ س^٢ + ك س - ٣ = ٠$

فإن الجذر الآخر يساوى ....

(أ) ٢ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٤

(٣٤) إذا كان : $س = ٣$ أحد جذرى المعادلة : $٢ س^٢ - ٥ س + ك = ٠$

فإن الجذر الآخر يساوى ....

(أ) ٣ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-٥}{٢}$ (د) -٣

(٣٥) إذا كان : $س = ٢$ ، $س = -٣$ هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ + أ س + ب = ٠$

فإن : $أ + ب =$ ....

(أ) -٦ (ب) -١ (جـ) -١٠ (د) ١٢

(٣٦) إذا كان أحد جذور المعادلة : $أ س^٢ + ب س + ج = ٠$ يساوى واحد فإن الجذر الآخر

يساوى ....

(أ) $\frac{أ}{ج}$ (ب) $\frac{ج}{أ}$ (جـ) $\frac{-ب}{أ}$ (د) $\frac{-أ}{ب}$

(٣٧) مجموع جذرى المعادلة : $(س - أ)(س - ب) = ج$ هو ....

(أ) $أ + ب$ (ب) $-(أ + ب)$ (جـ) $أ + ب + ج$ (د) $أ + ب - ج$

(٣٨) حاصل ضرب جذرى المعادلة : $\frac{س}{أ} + \frac{ب}{س} = ج$ هو ....

(أ) $\frac{ج}{أ}$ (ب) $أ ج$ (جـ) $أ ب$ (د) $ب ج$

(٣٩) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ل س + م = ٠$ حيث $م \neq ٠$ فإن : $\frac{ل}{م} =$ ....

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) -٢

(٤٠) إذا كان الإحداثى السينى لرأس منحنى الدالة د : د (س) = أ س^٢ + ب س + حـ يساوى ٢

فإن مجموع جذرى المعادلة : أ س^٢ + ب س + حـ = ٠ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) −٤

(٤١) إذا كان جذرا المعادلة : أ س^٢ + ب س + حـ = ٠ هما (م − ن − ١) ، (ن − م + ٢)

فإن : ....

(أ) $\frac{حـ}{أ}$ = ١ (ب) $\frac{ب}{أ}$ = ١ (جـ) $\frac{حـ}{أ}$ = −١ (د) $\frac{ب}{أ}$ = −١

(٤٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة : (أ − ب) س^٢ + (ب − حـ) س + (حـ − أ) = ٠ معكوس جمعى

للجذر الآخر فإن : $\frac{حـ - أ}{أ - ب}$ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذرى كل من المعادلات الآتية :

(١) ٣ س^٢ = ٢٣ س − ٣٠

(٢) (٤ س + ١) (س + ٦) = (س − ٢) (٣ س − ٤)

(٣) $\frac{س}{٢}$ + $\frac{١}{س}$ = $\frac{٣}{٢}$

(٤) (أ − ١) س^٢ + س − أ^٢ س − ١ + أ = ٠

٢ إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٣ س^٢ + ١٠ س − حـ = ٠ هو $\frac{-٨}{٣}$

فأوجد قيمة حـ ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة. «حـ = ٨ ، س = $\frac{٢}{٣}$ أ، س = −٤»

٣ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : ٢ س^٢ + ب س − ٥ = ٠ هو −$\frac{٣}{٢}$

فأوجد قيمة ب ثم حل المعادلة فى مجموعة الأعداد المركبة. «ب = ٣ ، س = $\frac{-٥}{٢}$ أ، س = ١»

٤ أوجد الجذر الآخر للمعادلة ثم أوجد قيمة أ فى كل مما يأتى حيث أ ∈ ع :

(١) إذا كان : س = −١ أحد جذرى المعادلة : س^٢ − ٢ س + أ = ٠ . «٣ ، −٣»

(٢) إذا كان : (١ + ت) أحد جذرى المعادلة : س^٢ − ٢ س + أ = ٠ . «١ − ت ، ٢»

٥ أوجد قيمتى أ ، ب فى كل من المعادلات الآتية إذا كان :

(١) ٢ ، ٥ جذرى المعادلة : س^٢ + أ س + ب = ٠ . «أ = −٧ ، ب = ١٠»

(٢) −٣ ، ٧ جذرى المعادلة : أ س^٢ − ب س − ٢١ = ٠ . «أ = ١ ، ب = ٤»

(٣) −١ ، $\frac{٣}{٢}$ جذرى المعادلة : أ س^٢ − س + ب = ٠ . «أ = ٢ ، ب = −٣»

(٤) $\sqrt{٣}$ ت ، − $\sqrt{٣}$ ت جذرى المعادلة : س^٢ + أ س + ب = ٠ . «أ = ٠ ، ب = ٣»

٦ **فى كل مما يأتى أوجد قيمة ك التى تجعل :**

(١) أحد جذرى المعادلة : سـ^{٢} + (ك − ١) سـ − ٣ = ٠ هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر. «١»

(٢) أحد جذرى المعادلة : ٤ ك سـ^{٢} + ٧ سـ + ك^{٢} + ٤ = ٠ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر. «٢»

(٣) أحد جذرى المعادلة : ٢ سـ^{٢} + ك^{٢} = ٥ سـ + ٢ هو المعكوس الضربى للجذر الآخر. «± ٢»

---

٧ أوجد قيمة أ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : سـ^{٢} − أ سـ + ٢١ = ٠

يزيد عن ضعف الآخر بمقدار ١ «-٩,٥ أ ، ١٠»

---

٨ **فى المعادلة : (ك − ٤) سـ^{٢} − (٣ − ك) سـ − ٣ = ٠ . أوجد قيمة ك إذا كان :**

(١) مجموع جذريها يساوى ٥ (٢) حاصل ضرب جذريها يساوى −٣

(٣) أحد جذريها يساوى المعكوس الجمعى للآخر.

(٤) أحد جذريها يساوى المعكوس الضربى للآخر. «$\frac{٢٣}{٦}$ ، ٥ ، ٣ ، ١»

---

٩ أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٢ سـ^{٢} − (ك − ١) سـ + (ك^{٢} + ٢ ك − ٣) = ٠

ضعف الجذر الآخر. «-٣,٥ أ ، ١»

---

١٠ أوجد قيمة أ إذا كان أحد جذرى المعادلة : سـ^{٢} − أ سـ + ٢ أ − ٤ = ٠

أربعة أمثال الجذر الآخر. «١٠ أ ، $٢\frac{١}{٢}$»

---

١١ إذا كان مجموع جذرى المعادلة : (أ − ٢) سـ^{٢} − أ سـ + ب^{٢} = ٠ يساوى ٣ وحاصل ضربهما ٥

أوجد قيمتى : أ ، ب «٣ ، ± $\sqrt{٥}$»

---

١٢ أوجد قيمة جـ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : سـ^{٢} − ٦ سـ + جـ = ٠

يساوى مربع الجذر الآخر. «-٢٧ أ ، ٨»

---

١٣ أوجد قيمة أ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٤ سـ^{٢} − أ سـ − ٣ = ٠

يزيد عن المعكوس الجمعى للآخر بمقدار ١ «٤»

---

١٤ أوجد قيمة أ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٢ سـ^{٢} − أ سـ + ٣ = ٠

يزيد عن المعكوس الضربى للجذر الآخر بمقدار ١ «٧»

---

١٥ أوجد قيمة جـ التى تجعل أحد جذرى المعادلة : سـ^{٢} − ١٠ سـ + جـ = ٠

يقل عن مربع الجذر الآخر بمقدار ٢ «-٥٦ أ ، ٢١»

١٦ إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة : أ $س^٢$ + ب س + ح = ٠ كنسبة ٢ : ٣

أثبت أن : ٢٥ أ ح = ٦ $ب^٢$

---

١٧ إذا كان جذرا المعادلة : ٨ $س^٢$ − ب س + ٣ = ٠ موجبين والنسبة بينهما ٢ : ٣ **فأوجد قيمة :** ب «١٠»

---

١٨ **أوجد الشرط اللازم لكى يكون أحد جذرى المعادلة :** أ $س^٢$ + ب س + ح = ٠ .

(١) ضعف الجذر الآخر.

(٢) يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣ «٩ أ ح = ٢ $ب^٢$ ، ٤ أ ح = $ب^٢$ − ٩ $أ^٢$»

---

١٩ أوجد قيمة أ التى تجعل مجموع جذرى المعادلة : $س^٢$ − (أ + ٤) س + ٣ $أ^٢$ = ٠ .

يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٢ $س^٢$ − ٧ أ س + $أ^٢$ = ٠ . «٤ ، −٢»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) إذا كان (٢ ت) أحد جذرى المعادلة التربيعية : $س^٢$ + أ س + ب = ٠ حيث معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن جميع ما يلى صحيح ما عدا ....

(أ) الجذر الآخر للمعادلة التربيعية هو (−٢ ت) (ب) مجموع جذرى المعادلة = صفر

(ج) حاصل ضرب جذرى المعادلة = −٤ (د) المميز للمعادلة التربيعية < صفر

(٢) لإيجاد قيم ب ، ح الحقيقية فى المعادلة : $س^٢$ + ب س + ح = ٠ يكون كافيًا الحصول على ....

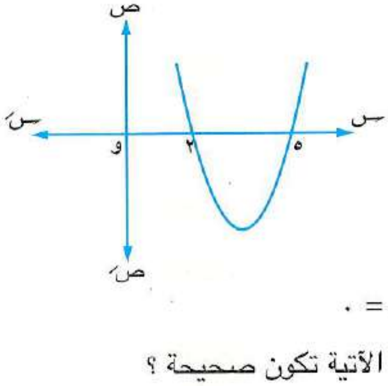
(أ) مجموع الجذرين = ٦ فقط. (ب) أحد الجذرين = (٣ + ت) فقط.

(ج) (أ) ، (ب) معًا. (د) لا شيء مما سبق.

(٣) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د : د(س) = أ $س^٢$ + ب س + ح

فإن : $\frac{ب + ح}{أ}$ = ...



(أ) ٣ (ب) ٥

(ج) ٧ (د) ١٠

(٤) إذا كان : $س_١$ ، $س_٢$ هما جذرا المعادلة : أ $س^٢$ + ب س + ح = ٠ .

وكان : $س_١$ < ٠ < $س_٢$ ، |$س_١$| > |$س_٢$| فأى من العبارات الآتية تكون صحيحة ؟

(أ) أ > ٠ (ب) ب ح < ٠ (ج) ب ح > ٠ (د) $س_١$ + $س_٢$ < ٠

---

٢ أوجد قيم أ التى تجعل للمعادلة : ٣ $س^٢$ − (٢ أ − ١) س + (أ − ٤) = ٠ .

جذرين مختلفى الإشارة. «أ ∈]−∞ ، ٤[»

الدرس

4

تكوين المعادلة التربيعية متى عُلم جذراها

بفرض أن ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : $\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ} = ٠$

وبضرب الطرفين فى $\frac{١}{\text{أ}}$ حيث $\text{أ} \neq ٠$ تصبح المعادلة على الصورة :

$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٠$ أى : $\text{س}^{٢} - \left(-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)\text{س} + \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = ٠$ (١)

ولكن : $-\frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \text{ل} + \text{م}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \text{ل}\,\text{م}$

وبالتعويض فى (١) نحصل على المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م

وهى : $\text{س}^{٢} - (\text{ل} + \text{م})\,\text{س} + \text{ل}\,\text{م} = ٠$ (٢)

أى $\text{س}^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

وبتحليل المقدار الثلاثى فى الطرف الأيمن للمعادلة (٢) نحصل على صورة أخرى للمعادلة

وهى $(\text{س} - \text{ل})(\text{س} - \text{م}) = ٠$

مثال ١

كوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها :

١) $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ٢) $٣ + \sqrt{٢}$ ، $٣ - \sqrt{٢}$ ٣) $\frac{-١ + \text{ت}}{\text{ت}}$ ، $\frac{٢}{١ + \text{ت}}$

الحل

١) مجموع الجذرين = $\frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٤} = \frac{١١}{٤}$ ، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{٣}{٢} \times \frac{٥}{٤} = \frac{١٥}{٨}$

، ∵ المعادلة هى : $\text{س}^{٢}$ − (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

∴ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - \frac{١١}{٤}\text{س} + \frac{١٥}{٨} = ٠$ وبضرب الطرفين فى ٨

∴ المعادلة هى : $٨\text{س}^{٢} - ٢٢\text{س} + ١٥ = ٠$

٢ مجموع الجذرين = $٣ + \sqrt{٢} + ٣ - \sqrt{٢} = ٦$

، حاصل ضرب الجذرين = $(٣ + \sqrt{٢})(٣ - \sqrt{٢}) = ٩ - ٢ = ٧$

∴ المعادلة هى : $س^٢ - ٦ س + ٧ = ٠$

٣ ∵ $\frac{-١ + ت}{ت} = \frac{(-١ + ت)\ ت}{ت \times ت} = \frac{-ت + ت^٢}{ت^٢} = \frac{-ت - ١}{-١} = ١ + ت$

، $\frac{٢}{١ + ت} = \frac{٢\ (١ - ت)}{(١ + ت)\ (١ - ت)} = \frac{٢ - ٢ ت}{١ - ت^٢} = \frac{٢ - ٢ ت}{٢} = ١ - ت$

∴ مجموع الجذرين = ١ + ت + ١ − ت = ٢ ، حاصل ضرب الجذرين = (١ + ت) (١ − ت) = ٢

∴ المعادلة هى : $س^٢ - ٢ س + ٢ = ٠$

حاول بنفسك

كوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها :

١ −٤ ، ٧

٢ ٣ − ٢ ت ، $\frac{٤ + ٧ ت}{٢ + ت}$

تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

مثال ٢

إذا عُلم أن جذرى المعادلة : $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$ هما ل ، م

فأوجد المعادلة التى جذراها : ل + ٧ ، م + ٧

الحل

فى هذا المثال المطلوب تكوين معادلة من معادلة أخرى معطاة حيث توجد علاقة معينة بين جذرى كل من المعادلتين.

ولهذا المثال عدة طرق للحل نسردها فيما يلى :

الطريقة الأولى

وتتلخص خطواتها فيما يلى :

١ نوجد جذرى المعادلة المعطاة.

٢ نوجد جذرى المعادلة المطلوبة.

٣ نكون المعادلة المطلوب تكوينها.

∵ $س^٢ - ٥ س - ٦ = ٠$

∴ $(س - ٦)\ (س + ١) = ٠$

∴ ٦ ، −١ هما جذرا المعادلة المعطاة.

وبفرض أن : ل = ٦ ، م = −١ ، جذرى المعادلة المطلوبة هما هـ ، و

∴ هـ = ل + ٧ = ٦ + ٧ = ١٣ ، و = م + ٧ = −١ + ٧ = ٦

∴ هـ + و = ١٣ + ٦ = ١٩ ، هـ و = ١٣ × ٦ = ٧٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - ١٩ س + ٧٨ = ٠$

الطريقة الثانية

نفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة :

∴ هـ = ل + ٧ ، و = م + ٧

∴ هـ + و = ل + ٧ + م + ٧ = ل + م + ١٤

، ∵ ل + م = ٥ (من المعادلة المعطاة)

∴ هـ + و = ٥ + ١٤ = ١٩

، هـ و = (ل + ٧) (م + ٧) = ل م + ٧ (ل + م) + ٤٩

، ∵ ل م = −٦ (من المعادلة المعطاة)

∴ هـ و = −٦ + ٧ × ٥ + ٤٩ = ٧٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢$ − ١٩ س + ٧٨ = ٠

الطريقة الثالثة

نفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة :

∴ هـ = ل + ٧ ، و = م + ٧

∴ ل = هـ − ٧ ، م = و − ٧

، ∵ ل أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٥ س − ٦ = ٠

∴ $ل^٢$ − ٥ ل − ٦ = ٠

، ∵ ل = هـ − ٧

∴ $(هـ − ٧)^٢$ − ٥ (هـ − ٧) − ٦ = ٠

∴ $هـ^٢$ − ١٤ هـ + ٤٩ − ٥ هـ + ٣٥ − ٦ = ٠

∴ $هـ^٢$ − ١٩ هـ + ٧٨ = ٠

أى أن هـ جذر للمعادلة : $س^٢$ − ١٩ س + ٧٨ = ٠ وهى المعادلة المطلوبة.

ملاحظة

لا تستخدم الطريقة الثالثة إلا فى حالة أن تكون العلاقة بين الجذر الأول للمعادلة المطلوبة والجذر الأول للمعادلة المعطاة هى نفسها العلاقة بين الجذر الثانى للمعادلة المطلوبة والجذر الثانى للمعادلة المعطاة.

تذكر المتطابقات الآتية

١ $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ − ٢ ل م$

٢ $(ل − م)^٢ = (ل + م)^٢ − ٤ ل م$

٣ $ل^٣ + م^٣ = (ل + م) \left[(ل + م)^٢ − ٣ ل م\right]$

٤ $ل^٣ − م^٣ = (ل − م) \left[(ل + م)^٢ − ل م\right]$

٥ $\frac{١}{م} + \frac{١}{ل} = \frac{ل + م}{ل م}$

٦ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^٢ + م^٢}{ل م} = \frac{(ل + م)^٢ − ٢ ل م}{ل م}$

مثال ٣

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٩ = ٠$ حيث ل > م

فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

[١] $ل^٢ + م^٢$ [٢] $ل^٢ + ٣ ل م + م^٢$ [٣] ل − م [٤] $ل^٣ - م^٣$

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٩ = ٠$ ∴ $\boxed{ل + م = ٧}$ ، $\boxed{ل م = ٩}$

[١] $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م = ٧^٢ - ٢ \times ٩ = ٤٩ - ١٨ = ٣١$

[٢] $ل^٢ + ٣ ل م + م^٢ = (ل^٢ + ٢ ل م + م^٢) + ل م = (ل + م)^٢ + ل م = ٧^٢ + ٩ = ٤٩ + ٩ = ٥٨$

[٣] ∵ $(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤ ل م = ٧^٢ - ٤ \times ٩ = ٤٩ - ٣٦ = ١٣$

∴ $ل - م = \sqrt{١٣}$ حيث ل > م

[٤] ∵ $ل^٣ - م^٣ = (ل - م) [(ل + م)^٢ - ل م]$ وبالتعويض من [٣] :

∴ $ل^٣ - م^٣ = \sqrt{١٣} [٧^٢ - ٩] = \sqrt{١٣} (٤٩ - ٩) = ٤٠ \sqrt{١٣}$

مثال ٤

إذا عُلم أن جذرى المعادلة : $س^٢ - ٨ س + ٥ = ٠$ هما ل ، م فكوِّن المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ $\boxed{ل + م = ٨}$ ، $\boxed{ل م = ٥}$

، ∵ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة المطلوبة. ∴ مجموع الجذرين = $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{م + ل}{ل م} = \frac{٨}{٥}$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م} = \frac{١}{٥}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - \frac{٨}{٥} س + \frac{١}{٥} = ٠$ **أى** $٥ س^٢ - ٨ س + ١ = ٠$

مثال ٥

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٩ = ٠$ فأوجد المعادلة التى جذراها : $ل^٢$ ، $م^٢$

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ $\boxed{ل + م = ٥}$ ، $\boxed{ل م = ٩}$

، ∵ $ل^٢$ ، $م^٢$ هما جذرا المعادلة المطلوبة.

∴ مجموع الجذرين = $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م = ٥^٢ - ٢ \times ٩ = ٧$

، حاصل ضرب الجذرين = $ل^٢ \times م^٢ = (ل م)^٢ = ٩^٢ = ٨١$ ∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^٢ - ٧ س + ٨١ = ٠$

مثال ٦

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٣ س^{٢} + ٥ س - ٧ = ٠$ فأوجد المعادلة التى جذراها : $ل + \frac{١}{م}$ ، $م + \frac{١}{ل}$

الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ $\boxed{ل + م = \frac{-٥}{٣}}$ ، $\boxed{ل م = \frac{-٧}{٣}}$

، ∵ $ل + \frac{١}{م}$ ، $م + \frac{١}{ل}$ هما جذرا المعادلة المطلوبة.

∴ مجموع الجذرين $= ل + \frac{١}{م} + م + \frac{١}{ل} = ل + م + \frac{ل + م}{ل م}$

$$= -\frac{٥}{٣} + \frac{\frac{-٥}{٣}}{\frac{-٧}{٣}} = -\frac{٥}{٣} + \frac{٥}{٧} = \frac{-٣٥ + ١٥}{٢١} = -\frac{٢٠}{٢١}$$

، حاصل ضرب الجذرين $= \left(ل + \frac{١}{م}\right)\left(م + \frac{١}{ل}\right) = ل م + \frac{١}{ل م} + ٢$

$$= \frac{-٧}{٣} - \frac{٣}{٧} + ٢ = \frac{-٤٩ - ٩ + ٤٢}{٢١} = \frac{-١٦}{٢١}$$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^{٢} - \frac{-٢٠}{٢١} س + \frac{-١٦}{٢١} = ٠$ **أى** $٢١ س^{٢} + ٢٠ س - ١٦ = ٠$

حاول بنفسك

إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $٢ س^{٢} - ٣ س - ١ = ٠$ **فكوّن المعادلة التى جذراها :** $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$

مثال ٧

إذا كان $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ٦ س + ٤ = ٠$ فأوجد المعادلة التى جذراها : ل ، م

الحل

∵ $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة المعطاة. ∴ $\frac{٢}{ل} \times \frac{٢}{م} = ٤$

∴ $\frac{٤}{ل م} = ٤$ ∴ $\boxed{ل م = ١}$

، $\frac{٢}{ل} + \frac{٢}{م} = ٦$ ∴ $\frac{٢ ل + ٢ م}{ل م} = ٦$

∴ $\frac{٢ (ل + م)}{١} = ٦$ ∴ $\boxed{ل + م = \frac{٦}{٢} = ٣}$

، ∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة ، $ل + م = ٣$ ، $ل م = ١$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^{٢} - ٣ س + ١ = ٠$

حاول بنفسك

إذا كان $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة : $٦ س^{٢} - ٥ س + ١ = ٠$ **فكوّن المعادلة التى جذراها : ل ، م**

مثال ٨

إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : $س^{٢}$ − ك س + ٤ ك = ٠ يساوى ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^{٢}$ − ٣ س − ك = ٠ فأوجد قيمة : ك

الحل

بفرض أن جذرى المعادلة : $س^{٢}$ − ك س + ٤ ك = ٠ هما : ل ، م

∴ $\boxed{ل + م = ك}$ ، $\boxed{ل م = ٤ ك}$

، ∵ الفرق بين ل ، م يساوى ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^{٢}$ − ٣ س − ك = ٠

∴ $\boxed{ل − م = −٣ ك}$

∵ $(ل − م)^{٢}$ = $(ل + م)^{٢}$ − ٤ ل م (من المتطابقات السابق ذكرها)

∴ $(−٣ ك)^{٢}$ = $ك^{٢}$ − ٤ (٤ ك) ∴ ٩ $ك^{٢}$ = $ك^{٢}$ − ١٦ ك

∴ ٨ $ك^{٢}$ + ١٦ ك = ٠ ∴ ٨ ك (ك + ٢) = ٠ ∴ $\boxed{ك = ٠}$

أ، ك + ٢ = ٠ ومنها $\boxed{ك = −٢}$

حل آخر : (باستخدام قانون الفرق بين الجذرين) :

∵ $\boxed{ل − م = \frac{\pm\sqrt{المميز}}{أ} = \pm\frac{\sqrt{ب^{٢} − ٤ أ حـ}}{أ}}$

لاحظ أنه

يمكن استنتاج قانون الفرق بين الجذرين من القانون العام بنفس الطريقة التى أوجدنا بها قانون مجموع الجذرين فى الدرس السابق.

ومن المعادلة : $س^{٢}$ − ك س + ٤ ك = ٠ نجد أن :

ل − م = $\pm\sqrt{ك^{٢} − ١٦ ك}$ (١)

، ∵ ل − م يساوى ثلاثة أمثال حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^{٢}$ − ٣ س − ك = ٠

∴ ل − م = −٣ ك (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\pm\sqrt{ك^{٢} − ١٦ ك}$ = −٣ ك وبتربيع الطرفين.

∴ $ك^{٢}$ − ١٦ ك = ٩ $ك^{٢}$ ∴ ٨ $ك^{٢}$ + ١٦ ك = ٠

∴ $\boxed{ك = ٠}$ أ، $\boxed{ك = −٢}$

حاول بنفسك

إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : $س^{٢}$ + ك س + ٢ ك = ٠

يساوى ضعف حاصل ضرب جذرى المعادلة : ٦ $س^{٢}$ + ٥ س + ك = ٠ **فأوجد قيمة : ك**

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة التربيعية التى مجموع جذريها −١ وحاصل ضربهما −٣ هى ....

(أ) س٢ − س − ٣ = ٠ (ب) س٢ + س + ٣ = ٠

(جـ) س٢ − س + ٣ = ٠ (د) س٢ + س − ٣ = ٠

(٢) المعادلة التربيعية التى جذراها −٢ ، ٣ هى ....

(أ) (س − ٢) (س + ٣) = ٠ (ب) س٢ − ٤ س + ٦ = ٠

(جـ) س٢ − س = ٦ (د) ٤ س٢ − ٢ س + ٣ = ٠

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها −٢ ت ، ٢ ت هى ....

(أ) س٢ = ٤ ت (ب) س٢ + ٤ = ٠

(جـ) س٢ − ٤ = ٠ (د) ت س٢ + ٤ = ٠

(٤) المعادلة التى جذراها : $\frac{٣}{٢}$ ت ، $\frac{٣}{٢}$ ت٣ هى ....

(أ) ٤ س٢ − ٩ = ٠ (ب) ٤ س٢ + ٩ = ٠

(جـ) ٩ س٢ − ٤ = ٠ (د) ٩ س٢ + ٤ = ٠

(٥) المعادلة التربيعية التى جذراها : ١ − ٥ ت ، ١ + ٥ ت هى ....

(أ) س٢ − ٢ س + ٢٦ = ٠ (ب) س٢ + ٢ س − ٢٦ = ٠

(جـ) س٢ − ٢ س − ٢٦ = ٠ (د) س٢ + ٢ س + ٢٦ = ٠

(٦) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : س٢ − ٤ س + ١ = ٠

فإن قيمة المقدار : ل٢ − ٤ ل + ١ = ...

(أ) صفر (ب) −٤ (جـ) ١ (د) −١

(٧) إذا كان ل أحد جذرى المعادلة : س٢ + ٤ س + ٧ = ٠ فإن : (ل + ٢)٢ = ...

(أ) −١١ (ب) ١١ (جـ) ٣ (د) −٣

(٨) إذا كان ل ، م جذرا المعادلة : س٢ − ٧ س + ٣ = ٠ فإن قيمة المقدار : ل٢ م + ل م٢ = ...

(أ) ٧ (ب) ٣ (جـ) ١٠ (د) ٢١

(٩) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٣ = ٠$ فإن : $ل^٢ + م^٢ = ...$

(أ) ٧ (ب) ٤٣ (جـ) ٥٨ (د) ٧٩

(١٠) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٨ س + حـ = ٠$ وكان : $ل^٢ + م^٢ = ٤٠$

فإن : حـ = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(١١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٩ = ٠$ حيث ل > م

فإن : $ل^٢ - م^٢ = ...$

(أ) ٣١ (ب) ٦٣ (جـ) $٤٠ \sqrt{١٣}$ (د) $٩ \sqrt{٧}$

(١٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٧ = ٠$ فإن : ل (م + ١) + م = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ١٢ (د) ٧

(١٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٣ س^٢ - ٨ س + ٢ = ٠$ فإن : $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = ...$

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) ٤ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(١٤) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٣ = ٠$

فإن المعادلة التى جذراها : ل + م ، ل م هى ....

(أ) $س^٢ - ١٠ س + ٢١ = ٠$ (ب) $س^٢ + ١٠ س + ٢١ = ٠$

(جـ) $س^٢ - ٢١ س + ١٠ = ٠$ (د) $س^٢ - ٢١ س - ١٠ = ٠$

(١٥) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٣ = ٠$

فإن المعادلة التى جذراها : ٢ ل ، ٢ م هى ....

(أ) $٢ س^٢ - ١٠ س + ٦ = ٠$ (ب) $س^٢ - ١٠ س + ١٢ = ٠$

(جـ) $٢ س^٢ - ١٠ س - ٦ = ٠$ (د) $س^٢ + ١٠ س + ١٢ = ٠$

(١٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ - ٣ س - ٦ = ٠$

فإن المعادلة التى جذراها $\frac{ل}{٤}$ ، $\frac{م}{٤}$ هى ....

(أ) $س^٢ - ٣ س - ٣ = ٠$ (ب) $٤ س^٢ - ٦ س - ٣ = ٠$

(جـ) $١٦ س^٢ + ٦ س - ٣ = ٠$ (د) $١٦ س^٢ - ٦ س - ٣ = ٠$

(١٧) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٧ = ٠$

فإن المعادلة التى جذراها : $ل^٢$ ، $م^٢$ هى ....

(أ) $س^٢ + ١١ س + ٤٩ = ٠$ (ب) $س^٢ - ١١ س + ٤٩ = ٠$

(جـ) $س^٢ - ٤٩ س + ١١ = ٠$ (د) $س^٢ + ١١ س - ٤٩ = ٠$

(١٨) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ٥ س + ٦ = ٠$ فإن المعادلة التى جذراها : ل − م ، م − ل هى ....

(أ) $س^٢ + س + ١ = ٠$ (ب) $س^٢ + ١ = ٠$

(جـ) $س^٢ − س + ١ = ٠$ (د) $س^٢ − ١ = ٠$

(١٩) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد بمقدار ٢ عن كل من جذرى المعادلة : $س^٢ − ٣ س + ٢ = ٠$ هى ....

(أ) $س^٢ − ٣ س + ٢ = ٠$ (ب) $س^٢ + ٧ س + ١٢ = ٠$

(جـ) $س^٢ − ٧ س + ١٢ = ٠$ (د) $س^٢ − ٧ س − ١٢ = ٠$

(٢٠) إذا كان : $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ جذرى المعادلة : $٤ س^٢ + ٣ س = ٢$

فإن المعادلة التى جذراها ل ، م هى ....

(أ) $٣ س^٢ − ٨ س + ٣ = ٠$ (ب) $س^٢ − ٣ س + ٨ = ٠$

(جـ) $س^٢ − ٣ س − ٨ = ٠$ (د) $٣ س^٢ + ٨ س − ٣ = ٠$

(٢١) إذا كان ل ، $ل^٢$ هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ + ب س + ٥٤ = ٠$ فإن : $−٣ ل^٢ − ب =$ ....

(أ) −١٢ (ب) −٣ (جـ) −٥١ (د) ± ٣

(٢٢) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ + ٣ س − ١ = ٠$ فإن : $٤ ل^٢ + ٦ ل =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٣) المعادلات التربيعية التى معاملات حدودها أعداد حقيقية وأحد جذريها (٣ − ت) هى ....

(أ) $س^٢ − ٦ س − ١٠ = ٠$ (ب) $٢ س^٢ + ٦ س + ١٠ = ٠$

(جـ) $س^٢ − ٦ س + ١٠ = ٠$ (د) $س^٢ + ٦ س + ١٠ = ٠$

(٢٤) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ٤ س + ٥ = ٠$

فإن المعادلة التى جذراها (٤ ل + ٥) ، (٤ م + ٥) هى ....

(أ) $س^٢ + ١٦ س + ٢٥ = ٠$ (ب) $س^٢ + ٦ س + ٢٥ = ٠$

(جـ) $س^٢ − ١٦ س + ٢٥ = ٠$ (د) $س^٢ − ٦ س + ٢٥ = ٠$

(٢٥) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ب س + جـ = ٠$

فإن المعادلة التى جذراها $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هى ....

(أ) $س^٢ + ب س + جـ = ٠$ (ب) $س^٢ + جـ س + ب = ٠$

(جـ) $جـ س^٢ + ب س + ١ = ٠$ (د) $جـ س^٢ + س + ب = ٠$

(٢٦) إذا كان : ل + ١ ، م + ١ هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ٤ س + ٢ = ٠$

فإن المعادلة التربيعية التى جذراها ل ، م هى ....

(أ) $س^٢ + ٥ س + ٣ = ٠$ (ب) $س^٢ + ٥ س + ٥ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ٤ س + ٣ = ٠$ (د) $س^٢ + ٦ س + ٧ = ٠$

(٢٧) القيمة المطلقة للفرق بين جذرى المعادلة : $س^٢ - ٤ س + ٢ = ٠$ تساوى ....

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) ٨ (د) $\sqrt{٨}$

(٢٨) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٤ س + ٢ = ٠$

فإن المعادلة التى جذراها $ل^٢ - ٤ ل + ٧$ ، $٢ م^٢ - ٨ م + ٩$ هى ....

(أ) $س^٢ - ١٠ س + ٢٥ = ٠$ (ب) $س^٢ - ٢٥ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ٢٥ = ٠$ (د) $س^٢ - ٧ س - ٩ = ٠$

(٢٩) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$

فإن المعادلة التى جذراها : $ل^٢$ ، $٤ م - ٥$ هى ....

(أ) $س^٢ - ٥ س + ٤ = ٠$ (ب) $٥ س^٢ - ٤ س + ١ = ٠$

(جـ) $س^٢ - ٦ س + ٢٥ = ٠$ (د) $س^٢ + ٥ س + ٤ = ٠$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ كوِّن المعادلة التربيعية التى جذراها :

(١) −٢ ، ٤

(٢) ٧ ، ٧

(٣) −٧ ، صفر

(٤) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$

(٥) $\frac{٣}{٥}$ ، $-٢\frac{١}{٥}$

(٦) $٥\sqrt{٣}$ ، $-٢\sqrt{٣}$

(٧) $٧ + ٢\sqrt{٥}$ ، $٧ - ٢\sqrt{٥}$

(٨) −٥ ت ، ٥ ت

(٩) ١ − ٣ ت ، ١ + ٣ ت

(١٠) $٣ - ٢\sqrt{٢}$ ت ، $٣ + ٢\sqrt{٢}$ ت

(١١) $\frac{٣}{ت}$ ، $\frac{٣ + ٣ ت}{١ - ت}$

(١٢) $\frac{-٢ + ٢ ت}{١ + ت}$ ، $\frac{-٢ - ٤ ت}{٢ - ت}$

(١٣) $\frac{أ^٢ - ب^٢}{أ - ب}$ ، $\frac{أ^٣ - ب^٣}{أ^٢ + أ ب + ب^٢}$

٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٥ = ٠$ **فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :**

(١) $ل^٢ م + م^٢ ل$

(٢) $\frac{١}{م} + \frac{١}{ل}$

(٣) (ل − ٢) (م − ٢)

(٤) $(ل + \frac{١}{م}) (م + \frac{١}{ل})$

«٢٥ ، $\frac{٧}{٥}$ ، −٥ ، $٧\frac{١}{٥}$»

٣ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٤ س + ٢ = ٠$ حيث ل > م

فأوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

(١) $ل^٢ + م^٢$	(٢) ل − م	(٣) $ل^٣ + م^٣$
(٤) $ل^٢ - ٤ ل + ٧$	(٥) $٢ م^٢ - ٨ م + ١٥$	«١٢ ، $٢\sqrt{٢}$ ، ٤٠ ، ٥ ، ١١»

---

٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٣ س - ٥ = ٠$

فأوجد المعادلة التى جذراها : ل − ٤ ، م − ٤ «$س^٢ + ٥ س - ١ = ٠$»

---

٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ - ٥ س - ٧ = ٠$

أوجد المعادلة التى جذراها : ١ − ل ، ١ − م «$٢ س^٢ + س - ١٠ = ٠$»

---

٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٣ س - ٤ = ٠$

أوجد المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ «$٤ س^٢ + ٣ س - ١ = ٠$»

---

٧ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ - ٥ س + ١ = ٠$

أوجد المعادلة التى جذراها : $٢ ل^٢$ ، $٢ م^٢$ «$٢ س^٢ - ٢١ س + ٢ = ٠$»

---

٨ **كوّن المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذرى المعادلة :**

$س^٢ - ٧ س - ٩ = ٠$ «$س^٢ - ٩ س - ١ = ٠$»

---

٩ **كوّن المعادلة التربيعية التى كل جذر من جذريها يساوى نصف نظيره من جذرى المعادلة :**

$٤ س^٢ - ١٢ س + ٧ = ٠$ «$١٦ س^٢ - ٢٤ س + ٧ = ٠$»

---

١٠ **كوّن المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يساوى مربع نظيره من جذرى المعادلة :**

$س^٢ + ٣ س - ٥ = ٠$ «$س^٢ - ١٩ س + ٢٥ = ٠$»

---

١١ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٢ س^٢ - ٣ س - ١ = ٠$

كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها : $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$ «$٢ س^٢ + ١٣ س + ٢ = ٠$»

---

١٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٢ س - ٤ = ٠$

أوجد المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل^٢}$ ، $\frac{١}{م^٢}$ «$١٦ س^٢ - ١٢ س + ١ = ٠$»

---

١٣ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $٣ س^٢ - ٥ س + ٢ = ٠$

فكوّن المعادلة التى جذراها : $\frac{ل^٢}{م}$ ، $\frac{م^٢}{ل}$ «$١٨ س^٢ - ٣٥ س + ١٢ = ٠$»

١٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ١٠ س^{٢} + ١٢ س − ١ = ٠

فكوِّن المعادلة التى جذراها : ٢ ل + $\frac{١}{م}$ ، ٢ م + $\frac{١}{ل}$ «٥ س^{٢} − ٤٨ س − ٣٢ = ٠»

---

١٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٣ س − ٥ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : ل^{٢} م ، م^{٢} ل «س^{٢} + ١٥ س − ١٢٥ = ٠»

---

١٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٣ س − ١ = ٠ حيث ل > م

كوِّن المعادلة التى جذراها : ٣ ل − ٢ م ، ٢ ل − ٣ م «س^{٢} − ٥ $\sqrt{١٣}$ س + ٧٩ = ٠»

---

١٧ إذا كان ل + ٢ ، م + ٢ جذرى المعادلة : س^{٢} − ١١ س + ٣ = ٠

فأوجد المعادلة التى جذراها : ل ، م «س^{٢} − ٧ س − ١٥ = ٠»

---

١٨ إذا كان ل + ٣ ، م + ٣ هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٥ س + ١١ = ٠

أوجد المعادلة التى جذراها : ل^{٢} م ، م^{٢} ل «س^{٢} + ٥ س + ١٢٥ = ٠»

---

١٩ إذا كان $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٣ س + ١ = ٠

كوِّن المعادلة التى جذراها : ل م − ٧ ، ل + م + ٣ «س^{٢} − ٣٦ = ٠»

---

٢٠ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٢ س − ٥ = ٠

فكوِّن المعادلة التى جذراها : ل^{٢} + م ، م^{٢} + ل «س^{٢} − ١٦ س + ٥٨ = ٠»

---

٢١ إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : ٦ س^{٢} − ٧ س + ١ = حـ هو $\frac{١١}{٦}$

أوجد : قيمة حـ «٤»

---

٢٢ إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : س^{٢} + ك س + ٢ ك = ٠

يساوى ضعف حاصل ضرب جذرى المعادلة : س^{٢} + ٣ س + ك = ٠ أوجد : قيمة ك «٠ ، أ $\frac{-٨}{٣}$»

---

٢٣ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٤ س^{٢} − ٦ س + أ = ٠ وكان : ل^{٢} + م^{٢} = ٧ ل م

أوجد : قيمة أ «١»

---

٢٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠ حيث ل > م

فكوِّن المعادلة التى جذراها : ل − ٧ ، ٢ م^{٢} + ١ «س^{٢} − س − ٦ = ٠»

اكتشف الخطأ

٢٥ إذا كان ل + ١ ، م + ١ هما جذرا المعادلة : س^{٢} + ٥ س + ٣ = ٠

فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها : ل ، م

حل يوسف

∵ (ل + ١) + (م + ١) = −٥

∴ ل + م + ٢ = −٥ ∴ ل + م = −٧

، ∵ (ل + ١) (م + ١) = ٣

∴ ل م + (ل + م) + ١ = ٣

∴ ل م − ٧ + ١ = ٣ ∴ ل م = ٩

∴ المعادلة هى : س^{٢} + ٧ س + ٩ = ٠

حل أميرة

∵ ل + م = −٥ ، ل م = ٣

∴ (ل + ١) + (م + ١)

= ل + م + ٢ = −٥ + ٢ = −٣

، ∵ (ل + ١) (م + ١) = ل م + (ل + م) + ١

= ٣ − ٣ + ١ = ١

∴ المعادلة هى : س^{٢} + ٣ س + ١ = ٠

أى الحلين صحيح ؟ ولماذا ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة التربيعية التى جذراها بعدا مستطيل مساحته ١٥ سم^{٢} ومحيطه ٢٦ سم هى ....

(أ) س^{٢} − ٢٦ س + ١٥ = ٠

(ب) س^{٢} + ٢٦ س − ١٥ = ٠

(جـ) س^{٢} − ١٣ س − ١٥ = ٠

(د) س^{٢} − ١٣ س + ١٥ = ٠

(٢) إذا كان : أ^{٢} + ٣ أ + ١ = ٠ ، ب^{٢} + ٣ ب + ١ = ٠ حيث أ ، ب عددان حقيقيان مختلفان

فإن : $\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) −٥ (د) ١١

(٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية : (س − أ) (س − ب) = ك فإن المعادلة التربيعية التى جذراها أ ، ب هى ....

(أ) (س − ل) (س − م) = ٠

(ب) (س − ل) (س − م) + ك = ٠

(جـ) (س − ل) (س − م) = ك

(د) س^{٢} − (ل + م) س + ك = ٠

(٤) لتكوين المعادلة التربيعية التى جذراها ٤ ل ، ٤ م حيث ل ، م عددان حقيقيان يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) ل + م = ٥ فقط.

(ب) (ل + م + ٤)^{٢} + (ل م − ٣)^{٢} = صفر فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شىء مما سبق.

(٥) عمر وخالد يحاولان حل معادلة تربيعية ، أخطأ عمر في كتابة الحد المطلق في المعادلة فوجد أن جذري المعادلة هما ٣ ، ٤ بينما أخطأ خالد في كتابة معامل س في المعادلة فوجد أن جذري المعادلة هما ٢ ، ٣ فإن الجذرين الصحيحين للمعادلة هما ....

(أ) ٢ ، ٤ (ب) -٢ ، -٤ (جـ) ١ ، ٦ (د) -١ ، -٦

(٦) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $س^٢ + ب س + جـ = ٠$ عددين فرديين متتاليين فإن : $ب^٢ - ٤ جـ = $ ....

(أ) -١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $س^٢ - ب س + جـ = ٠$ عددين صحيحين مختلفين وكل من ب ، جـ عددًا أوليًا فأي من العبارات الآتية صحيحة ؟

(١) الفرق بين جذري المعادلة عدد فردي. (٢) $ب^٢ - جـ$ عدد أولي.

(٣) ب + جـ عدد أولي.

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٣) فقط.

(جـ) (٢) ، (٣) فقط. (د) كل ما سبق صحيح.

(٨) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - (ظا \theta) س - ١ = ٠$ وكان : $ل^٢ + م^٢ = ٣$ حيث $٠° < \theta < ٩٠°$ فإن : $\theta = $ ....

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٤}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٩) إذا كان ل ، $ل^٢$ هما جذرا المعادلة : $س^٢ + س + ١ = ٠$ فإن المعادلة التي جذراها : $ل^{٢٠٢٣}$ ، $ل^{٢٠٢٤}$ هي ....

(أ) $س^٢ + س + ١ = ٠$ (ب) $س^٢ - س - ١ = ٠$

(جـ) $س^٢ + س - ١ = ٠$ (د) $س^{١٢} + س^٦ - ١ = ٠$

الدرس

5

إشـارة الدالة

بحث إشارة الدالة

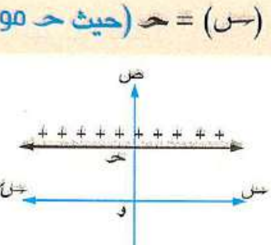
المقصود ببحث إشارة الدالة د فى المتغير س هو تحديد قيم س التى تكون عندها قيم الدالة على النحو التالى :

• موجبة أى : د (س) > ٠ • سالبة أى : د (س) < ٠ • مساوية للصفر أى : د (س) = ٠

أولًا إشارة الدالة الثابتة

لاحظ الشكلين التاليين الذين يمثلان الدالتين :

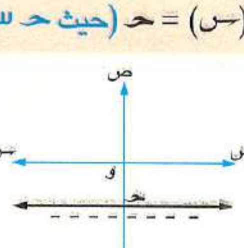
د : د (س) = حـ (حيث حـ موجبة)



نلاحظ أن :

إشارة الدالة موجبة لجميع قيم س ∈ ح

د : د (س) = حـ (حيث حـ سالبة)



نلاحظ أن :

إشارة الدالة سالبة لجميع قيم س ∈ ح

مما سبق نستنتج أن :

• إشارة الدالة الثابتة د : د (س) = حـ ، حـ ∈ ح* هى نفس إشارة حـ لجميع قيم س ∈ ح

فمثلًا

• إذا كانت د (س) = ٥ فإن إشارة الدالة د تكون موجبة لجميع قيم س ∈ ح

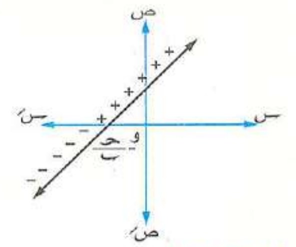
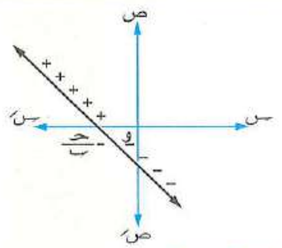
• وإذا كانت د (س) = −٣ فإن إشارة الدالة د تكون سالبة لجميع قيم س ∈ ح

حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين : [١] د : د (س) = ١٠   [٢] د : د (س) = $-\frac{٢}{٥}$

ثانيًا إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

لاحظ الشكلين التاليين الذين يمثلان الدالتين :

د : د (س) = ب س + حـ (حيث ب موجبة)	د : د (س) = ب س + حـ (حيث ب سالبة)
	
نلاحظ أن إشارة الدالة :	**نلاحظ أن إشارة الدالة :**
◂ مثل إشارة ب (موجبة) عندما س > $-\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$	◂ مثل إشارة ب (سالبة) عندما س > $-\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$
◂ مخالفة لإشارة ب (سالبة) عندما س < $-\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$	◂ مخالفة لإشارة ب (موجبة) عندما س < $-\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$
◂ مساوية للصفر عندما س = $-\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$	◂ مساوية للصفر عندما س = $-\frac{\text{حـ}}{\text{ب}}$

مما سبق نستنتج أنه :

لإيجاد إشارة الدالة الخطية د : د (س) = ب س + حـ ، ب ≠ ٠

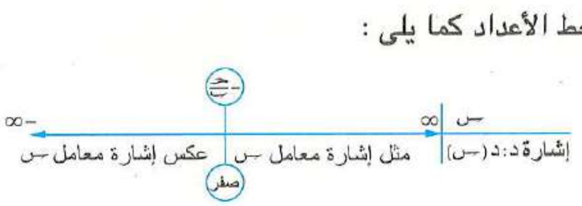
نضع د (س) = ٠   ∴ ب س + حـ = ٠   ∴ س = $\frac{-\text{حـ}}{\text{ب}}$

◂ **فتكون إشارة الدالة د :**

[١] مثل إشارة ب عندما س > $\frac{-\text{حـ}}{\text{ب}}$ [٢] عكس إشارة ب عندما س < $\frac{-\text{حـ}}{\text{ب}}$

[٣] د (س) = ٠ عندما س = $\frac{-\text{حـ}}{\text{ب}}$

◂ **ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلي :**



مثال ١

عيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين مع التوضيح على خط الأعداد :

١ د : د (س) = ٣ س + ٦ ٢ د : د (س) = ١ − $\frac{١}{٢}$ س

الحل

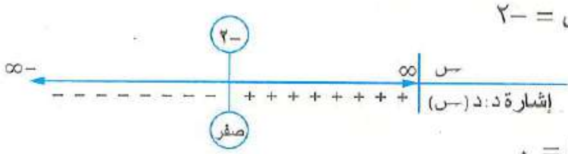
١ ∵ د (س) = ٣ س + ٦ وبوضع د (س) = ٠

∴ ٣ س + ٦ = ٠ ∴ س = −٢

∴ إشارة الدالة د تكون : • موجبة عندما س > −٢ • سالبة عندما س < −٢

• د (س) = ٠ عندما س = −٢

يمكن توضيح الحل على خط الأعداد في الشكل المقابل :



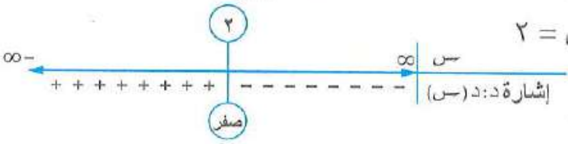
٢ ∵ د (س) = − $\frac{١}{٢}$ س + ١ وبوضع د (س) = ٠

∴ − $\frac{١}{٢}$ س = −١ ∴ س = ٢

∴ إشارة الدالة د تكون : • سالبة عندما س > ٢ • موجبة عندما س < ٢

• د (س) = ٠ عندما س = ٢

يمكن توضيح الحل على خط الأعداد في الشكل المقابل :



حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من الدالتين الآتيتين :

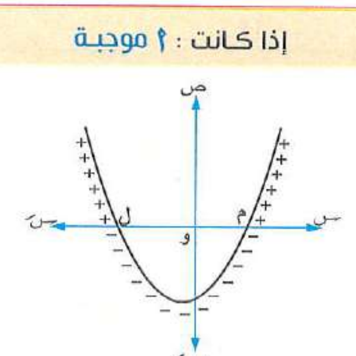
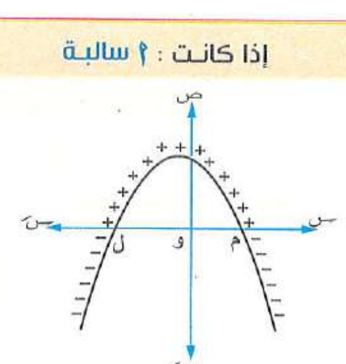
١ د : د (س) = −٣ س + ٦ ٢ د : د (س) = ٢ + $\frac{١}{٢}$ س

ثالثًا إشارة دالة الدرجة الثانية (الدالة التربيعية)

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

فإننا نوجد مميز المعادلة : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ وتوجد ثلاث حالات :

١ **المميز ب^{٢} − ٤ أ جـ > ٠** فإنه يكون للمعادلة جذران حقيقيان نفرض أنهما ل ، م حيث ل < م :

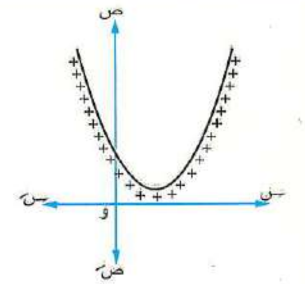
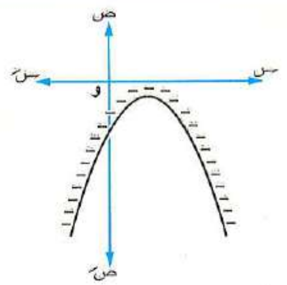
إذا كانت : أ موجبة	إذا كانت : أ سالبة
	

وتكون إشارة الدالة كما يلى :

- **مثل** إشارة أ عندما $س \in ح - [ل ، م]$
- **مخالفة** لإشارة أ عندما $س \in]ل ، م[$
- **مساوية** للصفر عندما $س \in \{ل ، م\}$

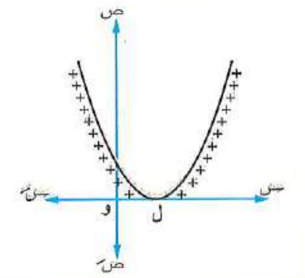
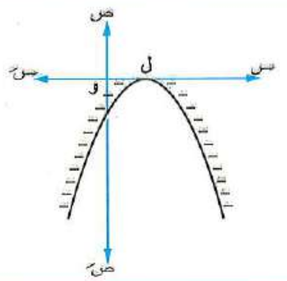
ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلى :

٢ المميز $ب^٢ - ٤ أ حـ < ٠$ فإنه لا توجد للمعادلة جذور حقيقية وتكون إشارة الدالة كما يلى :

إذا كانت : أ موجبة	إذا كانت : أ سالبة
	

إشارة الدالة مثل إشارة أ لجميع قيم $س \in ح$

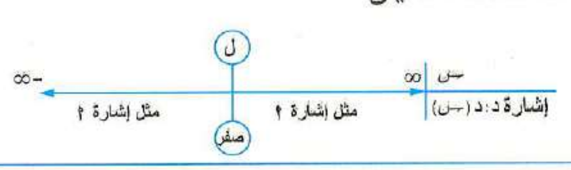
٣ المميز $ب^٢ - ٤ أ حـ = ٠$ فإنه يكون للمعادلة جذران متساويان ، وليكن كل منهما يساوى ل :

إذا كانت : أ موجبة	إذا كانت : أ سالبة
	

وتكون إشارة الدالة كما يلى :

- مثل إشارة أ عندما $س \neq ل$
- مساوية للصفر عندما $س = ل$

ويمكن توضيح ذلك على خط الأعداد كما يلى :

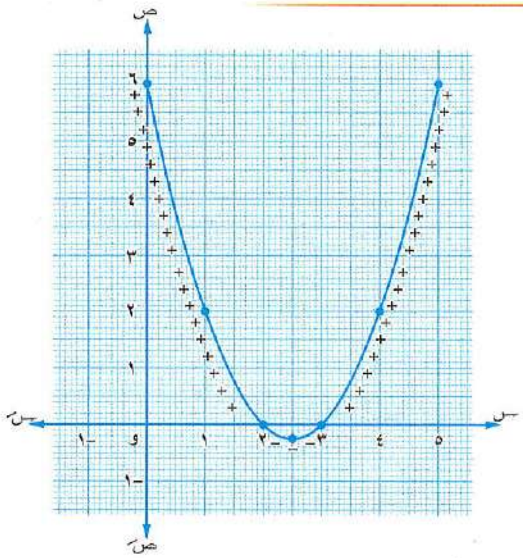


مثال ٢

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٥ س + ٦ فى الفترة [٠ ، ٥] ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة د فى ح

الحل

س	٠	١	٢	٢,٥	٣	٤	٥
د (س)	٦	٢	٠	−٠,٢٥	٠	٢	٦



ومن الرسم نلاحظ أن إشارة د تكون :

- موجبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٣]
- سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

ملاحظة

◄ **إذا طُلب بحث إشارة الدالة فى الفترة المعطاة فإن إشارة د تكون :**

- موجبة عندما س ∈ [٠ ، ٢[∪]٣ ، ٥] أ، [٠ ، ٥] − [٢ ، ٣]
- سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

تذكر أن :

◄ **فى المثال السابق :**

- مجال الدالة د هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح
- مدى الدالة د هو [−٠,٢٥ ، ∞[
- نقطة رأس المنحنى هى (٢,٥ ، −٠,٢٥) وتكون للدالة عندها قيمة صغرى وهى −٠,٢٥
- معادلة محور تماثل المنحنى هى : س = ٢,٥

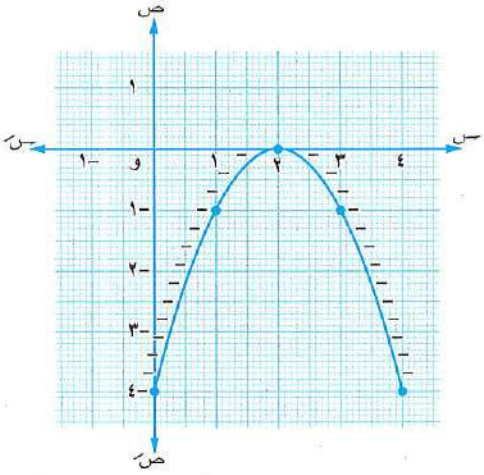
مثال ٣

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س^{٢} + ٤ س − ٤ فى الفترة [٠ ، ٤] ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة د فى ح

الحل

س	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	−٤	−١	٠	−١	−٤

ومن الرسم نلاحظ أن :



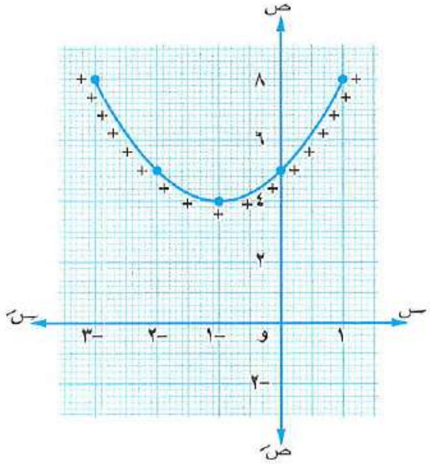
- د (س) = ٠ عندما س = ٢
- إشارة الدالة د سالبة عندما س ∈ ع − {٢}

مثال ٤

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٢ س + ٥ فى الفترة [−٣ ، ١] ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة د فى ع

الحل

س	−٣	−٢	−١	٠	١
د (س)	٨	٥	٤	٥	٨



ومن الرسم نلاحظ أن :

إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم س ∈ ع

حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٢ س − ٣ فى الفترة [−٢ ، ٤]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة د فى ع

مثال ٥

عيِّن إشارة كل من الدوال الآتية موضحًا ذلك على خط الأعداد :

١ د : د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٣

٢ د : د (س) = س^{٢} − ٣ س + ٥

٣ د : د (س) = ٤ س^{٢} − ١٢ س + ٩

٤ د : د (س) = ٩ + ٢ س − س^{٢}

الحــل

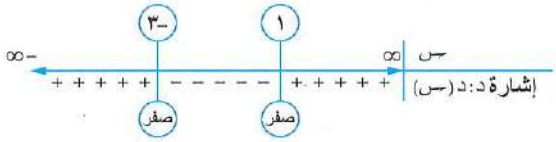
١ ∵ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × ١ × (−٣) = ٤ + ١٢ = ١٦ (> صفر)

∴ المعادلة : س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠ لها جذران.

وبالتحليل ∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠ ∴ س = −٣ أ، س = ١

، ∵ أ (معامل س^{٢}) = ١ > ٠

∴ **إشارة الدالة د تكون :**



- موجبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ١]
- سالبة عندما س ∈]−٣ ، ١[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١}

٢ ∵ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ١ × ٥ = ٩ − ٢٠ = −١١ (< صفر)

∴ المعادلة : س^{٢} − ٣ س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ = ١ > ٠

∴ **إشارة الدالة د موجبة لكل س ∈ ح**

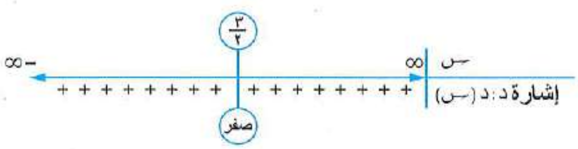
٣ ∵ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ١٤٤ − ٤ × ٤ × ٩ = ١٤٤ − ١٤٤ = ٠

∴ المعادلة : ٤ س^{٢} − ١٢ س + ٩ = ٠ لها جذران متساويان.

وبالتحليل ∴ (٢ س − ٣)^{٢} = ٠ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ أ = ٤ > ٠

∴ **إشارة الدالة د تكون :**

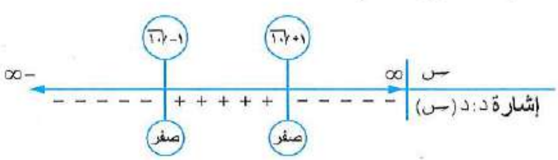


- موجبة عندما س ∈ ح − {$\frac{٣}{٢}$}
- د (س) = ٠ عندما س = $\frac{٣}{٢}$

٤ ∵ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × (−١) × ٩ = ٤٠ (> صفر)

∴ المعادلة : ٩ + ٢ س − س^{٢} = ٠ لها جذران وباستخدام القانون العام :

∴ س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٤٠}}{-٢}$ = $\frac{-٢ \pm ٢\sqrt{١٠}}{-٢}$ = ١ ± $\sqrt{١٠}$



، ∵ أ (معامل س^{٢}) = −١ < ٠

∴ **إشارة الدالة د تكون :**

- سالبة عندما س ∈ ع − [١ − √١٠ ، ١ + √١٠]
- موجبة عندما س ∈]١ − √١٠ ، ١ + √١٠[
- د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ − √١٠ ، ١ + √١٠}

حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من الدوال الآتية :

[١] د : د (س) = س^٢ − س − ٦

[٢] د : د (س) = − س^٢ − ٤ س − ٤

[٣] د : د (س) = س^٢ − ٤ س + ٥

مثال ٦

إذا كانت د : د (س) = س − ١ ، ر : ر (س) = س^٢ + س − ٦

فأوجد الفترة التى تكون فيها د ، ر موجبتين معًا ، وكذلك الفترة التى تكون فيها د ، ر سالبتين معًا.

الحل

∵ د (س) = س − ١ ∴ د (س) = صفر عندما س = ١

، د تكون موجبة عندما س > ١ أى فى الفترة]١ ، ∞[

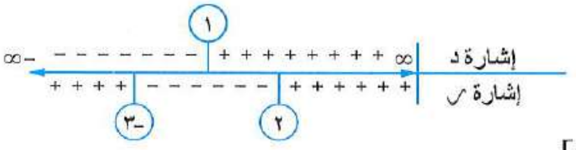
، د تكون سالبة عندما س < ١ أى فى الفترة]− ∞ ، ١[

، ∵ ر (س) = س^٢ + س − ٦ نوجد جذرى المعادلة : س^٢ + س − ٦ = ٠ كما يلى :

(س − ٢) (س + ٣) = ٠ ∴ س = ٢ أ، س = −٣ ∴ ر (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، −٣}

، ر تكون موجبة عندما س ∈ ع − [−٣ ، ٢] ، ر تكون سالبة عندما س ∈]−٣ ، ٢[

بملاحظة الشكل المقابل نجد أن :



- د ، ر موجبتان معًا فى الفترة]٢ ، ∞[

وهى الفترة التى تعبر عن :]١ ، ∞[∩ ع − [−٣ ، ٢]

- د ، ر سالبتان معًا فى الفترة]−٣ ، ١[وهى الفترة التى تعبر عن :]− ∞ ، ١[∩]−٣ ، ٢[

حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من الدالتين د١ ، د٢ : د١ (س) = ٢ − س ، د٢ : د٢ (س) = س^٢ − ٩ س + ١٨

ومتى تكون إشارتاهما سالبتين معًا ؟

مثال ٧

أثبت أنه لجميع قيم ك ∈ ح يكون جذرا المعادلة : س^٢ + ٢ ك س + ك − ٢ = ٠ حقيقيين مختلفين.

الحل

∵ س^٢ + ٢ ك س + ك − ٢ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ٢ ك ، جـ = ك − ٢

∴ المميز = ب^٢ − ٤ أ جـ = (٢ ك)^٢ − ٤ (ك − ٢) = ٤ ك^٢ − ٤ ك + ٨

ويكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبًا

ولذلك سنبحث إشارة الدالة د : د (ك) = ٤ ك^٢ − ٤ ك + ٨ كما يلى :

∵ المميز = ب^٢ − ٤ أ جـ = (−٤)^٢ − ٤ × ٤ × ٨ = ١٦ − ١٢٨ = − ١١٢ (< صفر)

∴ المعادلة : ٤ ك^٢ − ٤ ك + ٨ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

، ∵ أ > ٠

∴ إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم ك ∈ ح

وبالتالى فإن مميز المعادلة : س^٢ + ٢ ك س + ك − ٢ = ٠ موجب لجميع قيم ك ∈ ح

∴ جذرا المعادلة : س^٢ + ٢ ك س + ك − ٢ = ٠ حقيقيان مختلفان لكل ك ∈ ح

حل آخر :

∵ مميز المعادلة : س^٢ + ٢ ك س + ك − ٢ = ٠ هو : ٤ ك^٢ − ٤ ك + ٨

، ∵ ٤ ك^٢ − ٤ ك + ٨ = ٤ ك^٢ − ٤ ك + ١ + ٧ = (٢ ك − ١)^٢ + ٧ وهو مقدار موجب لكل ك ∈ ح

∴ جذرا المعادلة : س^٢ + ٢ ك س + ك − ٢ = ٠ حقيقيان مختلفان لكل ك ∈ ح

ملاحظة :

- إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة التربيعية فإنه يمكن كتابة قاعدة الدالة المرتبطة بالمعادلة التربيعية على الصورة : د (س) = أ (س − ل) (س − م) حيث أ ∈ ح − {٠}
- ويكون :
  - المنحنى مفتوحًا لأعلى إذا كانت : أ > ٠
  - المنحنى مفتوحًا لأسفل إذا كانت : أ < ٠

تمـارين 5 على إشارة الدالة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = −٤ تكون سالبة فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ٤[فقط (ب)]−٤ ، ٤[فقط (جـ)]−∞ ، ∞[(د)]−٢ ، ٢[فقط

(٢) الدالة د : د (س) = ٥ س − ٣ تكون موجبة عندما ....

(أ) س > $\frac{٣}{٥}$ (ب) س < $\frac{٣}{٥}$ (جـ) س > $\frac{١}{٣}$ (د) س < $\frac{-٥}{٣}$

(٣) إذا كانت : د (س) = ٢ س − ٤ فإن : د تكون سالبة عندما س ∈ ....

(أ) [٢ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٢[(جـ)]٢ ، ∞[(د)]−∞ ، ٢]

(٤) إشارة الدالة د : د (س) = ٦ − ٢ س تكون غير موجبة عند ....

(أ) س > ٣ (ب) س ≤ ٣ (جـ) س < ٣ (د) س ≥ ٣

(٥) الدالة د حيث د (س) = ٣ − $\frac{١}{٢}$ س تكون غير سالبة عندما س ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٦] (ب)]−∞ ، ٦[(جـ) [٦ ، ∞[(د)]٦ ، ∞[

(٦) إذا كانت د :]−٤ ، ٣[⟵ ح حيث د (س) = س + ٢ فإن : د تكون موجبة عندما س ∈ ....

(أ)]−∞ ، −٢[(ب)]−٢ ، ∞[(جـ)]−٤ ، −٢[(د)]−٢ ، ٣[

(٧) إذا كانت د :]−٥ ، ٦[⟵ ح حيث د (س) = س + ٣

فإن : د (س) تكون سالبة عندما س ∈ ....

(أ)]−٥ ، −٣[(ب)]−∞ ، −٣[(جـ)]−٣ ، ∞[(د)]−٣ ، ٦[

(٨) الدالة د : د (س) = أ لها إشارة .... دائمًا.

(أ) موجبة (ب) سالبة (جـ) مثل إشارة س (د) مثل إشارة أ

(٩) إشارة الدالة د حيث د (س) = أ س + ب على ح تكون مثل إشارة ب إذا كان ....

(أ) أ = ب (ب) أ = ٠ (جـ) أ > ٠ (د) أ < ٠

(١٠) الدالة د : د (س) = أ $س^٢$ + ب س + حـ يكون لها إشارة واحدة فى ح عندما ....

(أ) $ب^٢$ − ٤ أ حـ > ٠ (ب) $ب^٢$ − ٤ أ حـ < ٠ (جـ) $ب^٢$ − ٤ أ حـ = ٠ (د) $ب^٢$ − ٤ أ حـ ≤ ٠

(١١) إذا كانت : د (س) = ٣ س فإن : إشارة الدالة تكون سالبة فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ٣[(ب)]٣ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٠[(د)]−٣ ، ∞[

(١٢) الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٩ سالبة لكل س ∈ ....

(أ) ح − [−٣ ، ٣] (ب)]−٣ ، ٣[(جـ)]−∞ ، −٩[(د)]−∞ ، −٣[

(١٣) الدالة د : د (س) = $س^٢$ + ١ تكون موجبة لكل س ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[فقط (ب)]١ ، ∞[فقط (جـ)]−∞ ، ١[فقط (د) ح

(١٤) الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٦ س + ٩ موجبة فى الفترة ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٣] (جـ) ح − {٣} (د) ح − {٠}

(١٥) الفترة التى تكون فيها الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ٥ س + ٦ موجبة هى ....

(أ) [٢ ، ٣] (ب) ح − {٢ ، ٣} (جـ) ح − [٢ ، ٣] (د) ح −]٢ ، ٣[

(١٦) إذا كانت : د (س) موجبة لكل س ∈]−٢ ، ٥[فإن : د (س) = ...

(أ) $س^٢$ − ٣ س − ١٠ (ب) ١٠ − ٣ س − $س^٢$

(جـ) $س^٢$ + ٣ س − ١٠ (د) ١٠ + ٣ س − $س^٢$

(١٧) إذا كانت : د (س) = $س^٢$ + ب س + حـ سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[فقط

فإن حاصل ضرب جذرى المعادلة : $س^٢$ + ب س + حـ = صفر يساوى ....

(أ) −٦ (ب) ٦ (جـ) ب (د) − حـ

(١٨) إشارة الدالتين المعرفتين بالقاعدتين : د (س) = (س − ١) (س + ٢)

، ر (س) = − $س^٢$ + ٩ يكونا موجبتين معًا عندما س ∈ ....

(أ)]١ ، ٣[∪]−٣ ، −٢[(ب)]−٢ ، ٠[

(جـ)]٣ ، ∞[∪]−∞ ، −٣[(د)]−٣ ، ٣[

(١٩) إشارة الدالتين د ، ر حيث د (س) = س − ٢ ، ر (س) = ٤ − $س^٢$ تكونان سالبتين معًا فى

الفترة ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]−∞ ، −٢[(جـ)]−٢ ، ٢[(د)]−∞ ، −٢]

(٢٠) أى الدوال الآتية موجبة لجميع قيم س ∈ ح ؟

(أ) د : د(س) = س^{٢} + ٤ (ب) د : د(س) = ٣

(جـ) د : د(س) = س^{٢} − ٢ س + ١٠ (د) كل ما سبق.

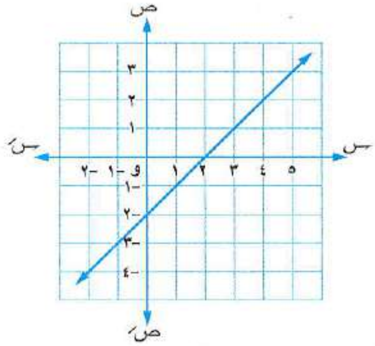
(٢١) الدالة د : د(س) = ١٢ + ٤ س − س^{٢} تكون غير سالبة فى الفترة ....

(أ)]−٢ ، ٦[(ب) [−٢ ، ٦] (جـ) ح −]−٢ ، ٦[(د)]−∞ ، ∞[

(٢٢) الدالة د حيث د(س) = −(س − ١)(س + ٢) موجبة فى الفترة ....

(أ)]١ ، ٢[(ب) [−١ ، ٢] (جـ)]−٢ ، ١[(د)]−∞ ، ∞[

(٢٣) الشكل المرسوم يمثل دالة د من الدرجة الأولى فى س :



أولًا : د موجبة فى الفترة ....

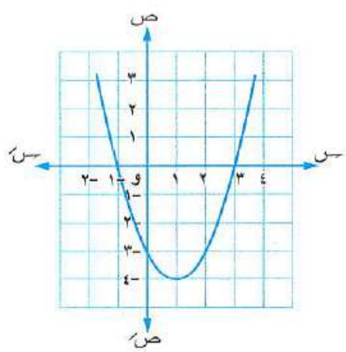
(أ) [٢ ، ∞[(ب)]١ ، ∞[

(جـ)]−∞ ، ٢[(د)]٢ ، ∞[

ثانيًا : د سالبة فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ٢] (ب) [−٢ ، ٢] (جـ)]−∞ ، ٢[(د)]٢ ، ∞[

(٢٤) الشكل المرسوم يمثل دالة د من الدرجة الثانية فى س :



أولًا : د(س) = ٠ عندما س ∈ ....

(أ) ح (ب) ط

(جـ) [−١ ، ٣] (د) {٣ ، −١}

ثانيًا : د(س) > ٠ عندما س ∈ ....

(أ)]−١ ، ٣[(ب) [−١ ، ٣] (جـ) ح − [−١ ، ٣] (د) ح

ثالثًا : د(س) < ٠ عندما س ∈ ....

(أ)]−١ ، ٣[(ب) [−١ ، ٣] (جـ) ح − [−١ ، ٣] (د) ح

(٢٥) إذا كانت : د(س) = (س − أ)^{٢} فإن : د(أ + ١) × د(أ − ١) ∈ ....

(أ) ح$^{-}$ (ب) ح$^{+}$ (جـ) [−١ ، ١] (د)]−١ ، ١[

(٢٦) إذا كان جذرا المعادلة : د(س) = ٠ هما ل ، م حيث د دالة تربيعية ، ل < م

فإن : د(ل + ١) × د(م − ١) ∈ ....

(أ)]٠ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٠] (جـ) [−١ ، ١] (د) {٠}

(٢٧) إذا كان ل هو جذر المعادلة : د (س) = ٠ حيث د (س) = أ س + ب

فإن : د (ل + ١) × د (ل − ١) ∈ ....

(أ) ح⁺ (ب) ح⁻ (جـ) [−١ ، ١] (د) [−٥ ، ٥]

(٢٨) إذا كان منحنى الدالة د حيث د دالة خطية يقطع محور السينات فى (٣ ، ٠)

فإن أى من العبارات التالية يكون صحيح دائمًا ؟

(أ) د (٢) > د (٣) (ب) د (٤) > د (٣)

(جـ) د (٢) × د (٤) < د (٣) (د) د (٢) × د (٤) > د (٣)

(٢٩) إشارة الدالة د : د (س) = $(س − ٣)^٢$ تكون غير سالبة فى ....

(أ) {٣} فقط (ب)]٣ ، ∞[فقط (جـ) ح (د) ∅

(٣٠) إذا كانت د (س) = أ $س^٢$ + ب س + حـ وكانت أ > ٠ وجذرا المعادلة د (س) = ٠ هما −٢ ، ١

فإن الدالة د تكون غير موجبة عند س ∈ ....

(أ) {−٢ ، ١} (ب)]−٢ ، ١[(جـ) [−٢ ، ١] (د) ح − [−٢ ، ١]

(٣١) الدالة د : د (س) = $أ^٢ س^٢$ + حـ حيث أ ≠ ٠ ، حـ > ٠ لها إشارة .... دائمًا.

(أ) سالبة (ب) موجبة

(جـ) مثل إشارة س (د) مثل إشارة أ

(٣٢) إذا كانت القيمة الصغرى للدالة التربيعية ص = د (س) هى ٣ فإن الدالة تكون سالبة

عند س ∈ ....

(أ) ح (ب) ∅ (جـ) {٣} (د)]٣ ، ∞[

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ عيِّن إشارة كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية موضحًا ذلك على خط الأعداد :

(١) د (س) = (س − ٢) (س + ٣)

(٢) د (س) = $(٢ س − ٣)^٢$

(٣) د (س) = ٢ $س^٢$ + ٥ س − ٧

(٤) د (س) = $س^٢$ − ٨ س + ١٦

(٥) د (س) = ٢ $س^٢$ − ٣ س + ٥

(٦) د (س) = ٤ س − ٧ − $س^٢$

(٧) د (س) = ٩ − ٤ $س^٢$

(٨) د (س) = ٢ $س^٢$

٢ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = ٢ $س^٢$ − ٣ س + ٤ فى الفترة [−١ ، ٢$\frac{١}{٢}$]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى ح

٣ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س^٢ + ٨ س − ١٥ متخذًا الفترة [١ ، ٧]

ومن الرسم بيِّن إشارة الدالة د فى ح وكذلك مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ «{٣ ، ٥}»

---

٤ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = س^٢ − ٩ فى الفترة [−٣ ، ٤]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى هذه الفترة.

---

٥ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س^٢ + ٢ س + ٤ فى الفترة [−٣ ، ٥]

ومن الرسم عيِّن إشارة الدالة فى هذه الفترة.

---

٦ **ابحث إشارة كل من الدالتين الآتيتين :**

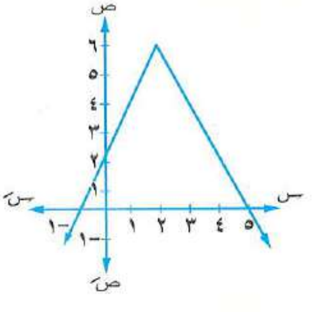
(١) د : [−١ ، ٦] ⟵ ح حيث د (س) = ٣ − س

(٢) د : [−٢ ، ٨] ⟵ ح حيث د (س) = س^٢ − ٥ س − ٦

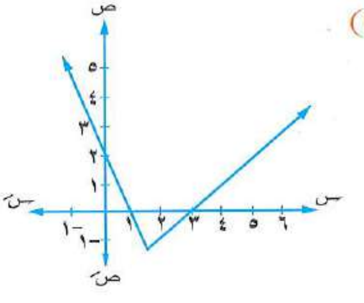
---

٧ **ابحث إشارة كل من الدالتين الممثلتين فى الشكلين التاليين :**

(١)



(٢)



---

٨ عيِّن إشارة كل من الدالتين د : د (س) = س − ٣ ، ر : ر (س) = س^٢ − ٥ س − ٦

ومتى تكون إشارتاهما موجبتين معًا ؟

---

٩ إذا كانت : د١ (س) = س − ٣ ، د٢ (س) = ٥ + ٤ س − س^٢ ابحث إشارة كل من :

د١ ، د٢ على خط الأعداد وعيِّن الفترة التى تكون فيها الدالتان سالبتين معًا.

---

١٠ إذا كانت : د (س) = س^٢ − ٥ س + ٦ ، ر (س) = ٢ س^٢ − ٥ س − ١٨

فبيِّن متى تكون الدالتان د ، ر موجبتين معًا أو سالبتين معًا.

---

١١ **أثبت أنه لجميع قيم ك ∈ ح يكون جذرا المعادلة :**

٢ س^٢ − ك س + ك − ٣ = صفر حقيقيين مختلفين.

اكتشف الخطأ

١٢ إذا كانت : د (س) = س + ١ ، ر (س) = ١ − س^{٢}

فعيِّن الفترة التى تكون فيها الدالتان موجبتين معًا .

إجابة يوسف

س = −١ تجعل د (س) = ٠

د (س) موجبة فى الفترة]−١ ، ∞[

، س = ± ١ تجعل ر (س) = ٠

ر (س) موجبة فى الفترة]−١ ، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]−١ ، ∞[∪]−١ ، ١[=]−١ ، ∞[

إجابة أميرة

س = −١ تجعل د (س) = ٠

د (س) موجبة فى الفترة]−١ ، ∞[

، س = ± ١ تجعل ر (س) = ٠

ر (س) موجبة فى الفترة]−١ ، ١[

لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة

]−١ ، ∞[∩]−١ ، ١[=]−١ ، ١[

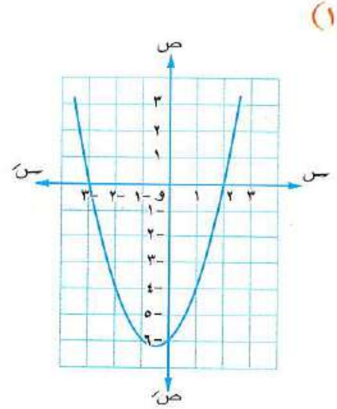
أى الإجابتين تكون صحيحة ؟ مثل كلًا من الدالتين بيانيًا وتأكد من صحة الإجابة.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

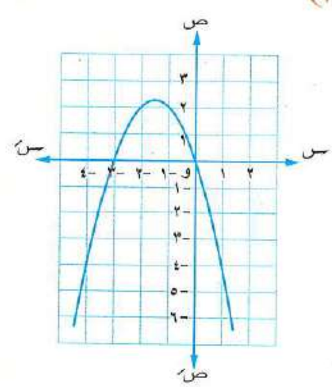
يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البيانى لدالة من الدرجة الثانية فى متغير واحد.

ادرس إشارة كل دالة فى ح ، ثم أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال :

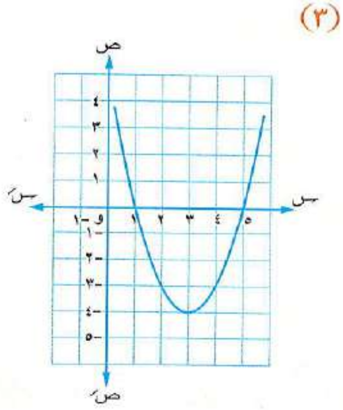
(١)

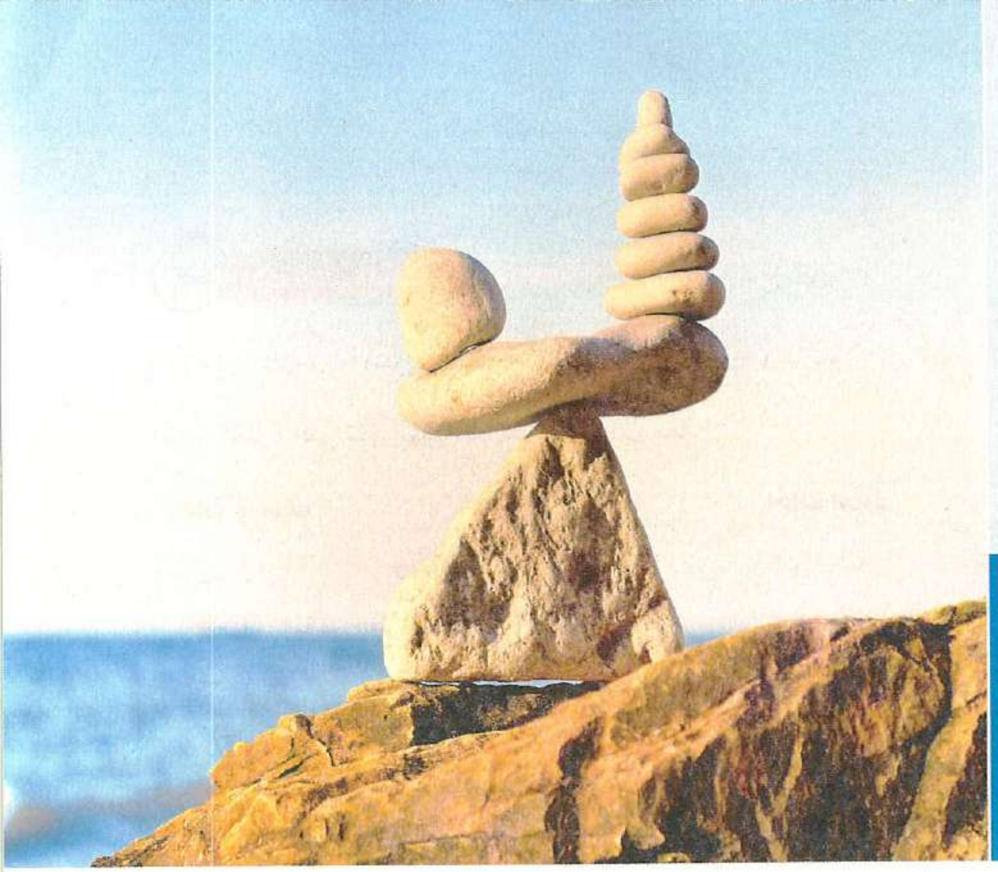


(٢)



(٣)





الدرس

6

متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد

تمهيد

سبق أن درسنا فى المرحلة الإعدادية متباينات الدرجة الأولى فى مجهول واحد مثل :

س + ٣ > ٥ ، ٤ − ٢ س ≤ ٢ ، ٧ (س − ١) ≥ ٩ س − ٦

وعلمنا أن حل المتباينة يعنى إيجاد جميع قيم المجهول التى تحقق هذه المتباينة وعند حل هذه المتباينات فى ح وجدنا أن مجموعة الحل تُكتب على صورة فترة

فمثلًا عند حل المتباينة $\boxed{\text{−٢ س + ٦ > ١٠}}$ فى ح نجد أن :

−٢ س > ٤ ومنها س < −٢ «لاحظ تغير اتجاه علامة التباين لأننا قسمنا على عدد سالب»

وتكون مجموعة الحل هى جميع الأعداد الحقيقية التى كل منها أقل من −٢

أى أن مجموعة الحل =]− ∞ ، −٢[

وفى هذا الدرس سوف نتعلم كيفية حل متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد (المتباينات التربيعية) فى ح مثل المتباينات :

س^{٢} − ٥ س + ٦ > ٠ ، س^{٢} + س ≥ ٢ ، س (س − ٦) < −٥

حل المتباينات التربيعية فى ح

لحل المتباينة التربيعية فى ح نتبع الخطوات التالية :

١ نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة.

٢ ندرس إشارة الدالة التربيعية التى كتبناها.

٣ نحدد الفترات التى تحقق المتباينة.

والأمثلة التالية توضح كيفية حل المتباينة التربيعية.

مثال ١

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة : $س^{٢} - ٥ س + ٦ > ٠$

الحل

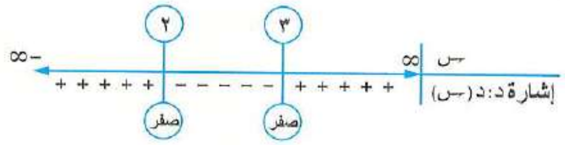
أولًا : نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة ، كما يلي : $د(س) = س^{٢} - ٥ س + ٦$

ثانيًا : ندرس إشارة الدالة د كما يلي :

$\because$ المميز $= ب^{٢} - ٤ أ جـ = ٢٥ - ٤ \times ١ \times ٦ = ١$ (> صفر)

$\therefore$ المعادلة : $س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠$ لها جذران مختلفان

وبالتحليل : $\therefore (س - ٢)(س - ٣) = ٠$ $\therefore س = ٢$ أو $س = ٣$



ثالثًا : نحدد الفترات التي تحقق أن : $س^{٢} - ٥ س + ٦ > ٠$ (موجبة) فنجد أن :

مجموعة حل المتباينة $=]-\infty ، ٢[\cup]٣ ، \infty[$ أو $ح - [٢ ، ٣]$

لاحظ أنه

من المثال السابق مجموعة حل المتباينة : $س^{٢} - ٥ س + ٦ < ٠$ في ح هي $]٢ ، ٣[$

حاول بنفسك

أوجد في ح مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين :

١ $س^{٢} - ٢ س - ٨ > ٠$ ٢ $س^{٢} - ٢ س - ٨ < ٠$

مثال ٢

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة : $(س + ٥)(س - ١) \geq س + ٥$

الحل

$\because (س + ٥)(س - ١) \geq س + ٥$ $\therefore س^{٢} + ٤ س - ٥ \geq س + ٥$

$\therefore س^{٢} + ٣ س - ١٠ \geq ٠$

أولًا : نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة : د (س) = س٢ + ٣ س − ١٠

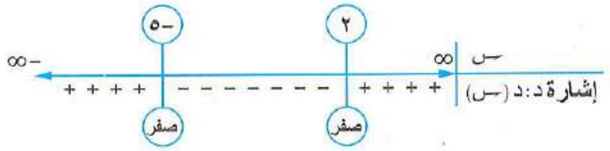
ثانيًا : ندرس إشارة الدالة د كما يلى :

∵ المميز = ب٢ − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ١ × (−١٠) = ٤٩ (> صفر)

∴ المعادلة : س٢ + ٣ س − ١٠ = ٠ لها جذران مختلفان وبالتحليل :

∴ (س − ٢) (س + ٥) = ٠

∴ س = ٢ أو س = −٥



ثالثًا : نحدد الفترات التى تحقق أن : س٢ + ٣ س − ١٠ ≥ ٠ فنجد أن :

مجموعة حل المتباينة =]− ∞ ، −٥] ∪ [٢ ، ∞[أو ح −]−٥ ، ٢[

لاحظ أن

مجموعة حل المتباينة : (س + ٥) (س − ١) ≤ س + ٥ فى ح هى [−٥ ، ٢]

حاول بنفسك

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينتين الآتيتين :

١ ٢ س٢ + ٥ س ≥ ٣

٢ س (س + ٦) > ٤ س + ١٥

مثال ٣

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ س٢ − ٣ س + ٥ < ٠

٢ س٢ + ٢ س + ٤ > ٠

٣ ٤ س − س٢ − ٤ < ٠

٤ س٢ − ٦ س + ٩ ≤ ٠

الحـل

١ بوضع د (س) = س٢ − ٣ س + ٥ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = ب٢ − ٤ أ حـ = ٩ − ٤ × ١ × ٥ = −١١ (< صفر)

∴ المعادلة : س٢ − ٣ س + ٥ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

، ∵ أ = ١ > ٠ ∴ إشارة الدالة د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة : س٢ − ٣ س + ٥ < ٠ هى ∅

٢ بوضع د (س) = س^{٢} + ٢ س + ٤ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٤ − ٤ × ١ × ٤ = −١٢ (< صفر)

∴ المعادلة : س^{٢} + ٢ س + ٤ = ٠ ليس لها جذور حقيقية.

، ∵ أ = ١ > ٠

∴ إشارة الدالة د موجبة لكل س ∈ ح

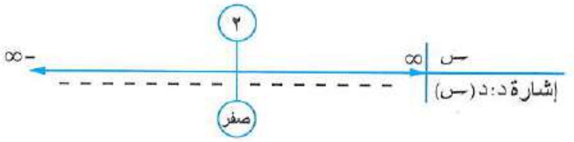
∴ مجموعة حل المتباينة : س^{٢} + ٢ س + ٤ > ٠ هى ح

٣ بوضع د (س) = ٤ س − س^{٢} − ٤ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ١٦ − ٤ × (−١) × (−٤) = ٠

∴ المعادلة : ٤ س − س^{٢} − ٤ = ٠ لها جذران متساويان.

وبالتحليل : ∴ (س − ٢)^{٢} = ٠ ∴ س = ٢



، ∵ أ = −١ < ٠

∴ الدالة سالبة عندما س ∈ ح − {٢}

، د (س) = ٠ عندما س = ٢

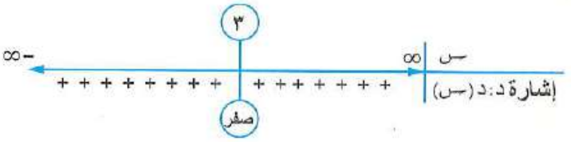
∴ مجموعة حل المتباينة : ٤ س − س^{٢} − ٤ > ٠ هى ح − {٢}

٤ بوضع د (س) = س^{٢} − ٦ س + ٩ وبحث إشارة الدالة د نجد أن :

المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٣٦ − ٤ × ١ × ٩ = ٠

∴ المعادلة : س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠ لها جذران متساويان.

وبالتحليل : ∴ (س − ٣)^{٢} = ٠



∴ س = ٣ ، ∵ أ = ١ > ٠

∴ الدالة موجبة عندما س ∈ ح − {٣}

، د (س) = ٠ عندما س = ٣

∴ مجموعة حل المتباينة : س^{٢} − ٦ س + ٩ ≤ ٠ هى {٣}

حاول بنفسك

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

١ س^{٢} + س + ١٢ > ٠

٢ − س^{٢} + س − ١ > ٠

٣ س^{٢} − ٢ س + ١ > ٠

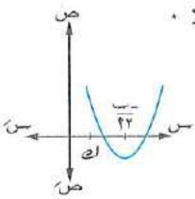
٤ ١٠ س − س^{٢} − ٢٥ ≤ ٠

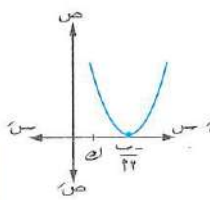
معلومة إثرائية

إذا كانت المعادلة التربيعية : $أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠$ حيث د هى الدالة التربيعية المرتبطة بها فإن :

١ شروط أن يكون كل من جذرى المعادلة أكبر من عدد حقيقى ك :

- $ب^{٢} - ٤ أ حـ \geq ٠$
- $أ \, د(ك) > ٠$
- $\frac{-ب}{٢أ} > ك$





فمثلًا

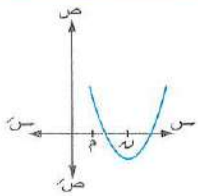
إذا كان كل من جذرى المعادلة $س^{٢} - ٥ س + م = ٠$ أكبر من ٢ فإن :

- $(٢٥) - ٤ \times م \geq ٠$ $\therefore$ $\boxed{م \leq ٦\frac{١}{٤}}$
- $٤ - ٥(٢) + م > ٠$ $\therefore$ $\boxed{م > ٦}$
- $\frac{٥}{٢} > ٢$ متحققة لكل قيم م

وحتى تتحقق الشروط الثلاثة فإن : $٦ < م \leq ٦\frac{١}{٤}$

٢ شرط وجود أحد الجذرين فقط بين العددين الحقيقيين م ، ن :

$د(م) \times د(ن) <$ صفر



فمثلًا

إذا كان أحد جذرى المعادلة $س^{٢} - ب س + ١٢ = ٠$ ينتمى للفترة $]١ ، ٤[$

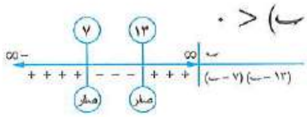
فإن : $د(١) \times د(٤) < ٠$

$\therefore (١ - ب + ١٢)(١٦ - ٤ب + ١٢) < ٠$

$\therefore (١٣ - ب)(٢٨ - ٤ب) < ٠$

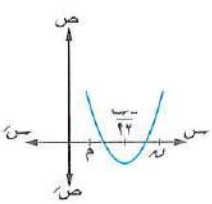
$\therefore (١٣ - ب)(٧ - ب) < ٠$

$\therefore ب \in]٧ ، ١٣[$



٣ شروط أن يكون جذرا المعادلة بين العددين الحقيقيين م ، ن حيث م < ن:

- $ب^{٢} - ٤ أ حـ \geq ٠$
- $أ \, د(م) > ٠$
- $أ \, د(ن) > ٠$
- $م < \frac{-ب}{٢أ} < ن$



فمثلًا

إذا كان جذرا المعادلة التربيعية $٤ س^{٢} - ٢ س + هـ = ٠$ ينتميان للفترة $]-١ ، ١[$ فإن :

- $٤ - ٤ \times ٤ \times هـ \geq ٠$ $\therefore$ $\boxed{هـ \leq \frac{١}{٤}}$ (١)
- $٤ \times د(-١) > ٠$ $\therefore ٤ \times (٤ + ٢ + هـ) > ٠$ $\therefore هـ > -٦$ (٢)
- $٤ \times د(١) > ٠$ $\therefore ٤ \times (٤ - ٢ + هـ) > ٠$ $\therefore هـ > -٢$ (٣)
- $-١ < \frac{٢}{٤ \times ٢} < ١$ متحققة لجميع قيم هـ (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) : $\therefore -٢ < هـ \leq \frac{١}{٤}$

تمارين 6 على متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المتباينة : (س − ٢) (س − ٥) < ٠ فى ح هى ....

(أ) {٢ ، ٥} (ب)]٢ ، ٥[(ج) [٢ ، ٥] (د) ح − [٢ ، ٥]

(٢) مجموعة حل المتباينة : س^٢ + ٣ س − ٤ ≤ ٠ فى ح هى ....

(أ) {−٤ ، ١} (ب) [−٤ ، ١] (ج) ح −]−٤ ، ١[(د) ح − [−٤ ، ١]

(٣) مجموعة حل المتباينة : ٧ + س^٢ − ٤ س < ٠ فى ح هى ....

(أ)]−٤ ، ٧[(ب) ح − [−٤ ، ٧] (ج) ح (د) ∅

(٤) مجموعة حل المتباينة : ٢ س + س^٢ + ٥ > ٠ فى ح هى ....

(أ) ح − [−٢ ، ٣] (ب) [−٢ ، ٣] (ج) ح (د) ∅

(٥) مجموعة حل المتباينة : س^٢ + ٩ > ٦ س فى ح هى ....

(أ)]−٣ ، ٣[(ب) ح (ج) ح − [−٣ ، ٣] (د) ح − {٣}

(٦) مجموعة حل المتباينة : ٤ س − س^٢ − ٤ > ٠ هى ....

(أ) ح (ب) ح^+ (ج) ح^− (د) ح − {٢}

(٧) م.ح المتباينة : (س − ١)^٢ ≥ ٠ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) ∅ (ج) {١} (د) ح − {١}

(٨) مجموعة حل المتباينة : − س (س + ٢) ≤ ٠ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، −٢} (ب) [−٢ ، ٠] (ج)]−٢ ، ٠[(د) [−٢ ، ٢]

(٩) مجموعة حل المتباينة : س (س − ١) > ٠ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ١} (ب)]٠ ، ١[(ج) [٠ ، ١] (د) ح − [٠ ، ١]

(١٠) مجموعة الحل فى ح للمتباينة : س (س − ٢) < صفر هى ....

(أ) {٠ ، ٢} (ب)]−٢ ، ٢[(ج)]٠ ، ٢[(د)]١ ، ٢[

(١١) مجموعة حل المتباينة : سـ^{٢} < ٣ سـ هي ....

(أ) ح − [٠ ، ٣] (ب) [٠ ، ٣] (جـ)]٠ ، ٣[(د) ح −]٠ ، ٣[

(١٢) مجموعة حل المتباينة : سـ^{٢} + ١ ≤ ٠ في ح هي ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ) [−١ ، ١] (د) ح −]−١ ، ١[

(١٣) مجموعة حل المتباينة : سـ^{٢} + ٩ > ٠ في ح هي ....

(أ) ∅ (ب) ح (جـ)]−٣ ، ٣[(د) ح − [−٣ ، ٣]

(١٤) إذا كانت : د (سـ) = سـ^{٢} − ٦ سـ + ٩ فإن مجموعة حل المتباينة د (سـ) ≥ ٠ في ح هي ....

(أ) ح (ب) {٣} (جـ) ح −]−٣ ، ٣[(د) [−٣ ، ٣]

(١٥) مجموعة حل المتباينة : سـ^{٢} ≥ ٩ في ح$^{+}$ هي ....

(أ) [−٣ ، ٣] (ب) ح −]−٣ ، ٣[(جـ)]٠ ، ٣] (د) ∅

(١٦) مجموعة حل المتباينة : سـ^{٢} > ١٦ في الفترة [−٤ ، ٤] هي ....

(أ) [−٤ ، ٤] (ب) ح − [−٤ ، ٤] (جـ) ∅ (د) {−٤ ، ٤}

(١٧) أى من الإجابات الآتية لا تنتمى إلى مجموعة حل للمتباينة : ٣ سـ − ٥ ≤ ٤ سـ − ٣ ؟

(أ) −١ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) −٥

(١٨) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

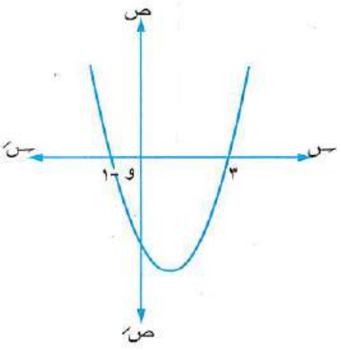
الدالة د : د (سـ) = سـ^{٢} − ٢ سـ − ٣

فإن مجموعة حل المتباينة :

سـ^{٢} − ٢ سـ − ٣ ≤ ٠ في ح هي ....

(أ)]−١ ، ٣[(ب)]−∞ ، ٢[

(جـ)]٣ ، ∞[(د)]−∞ ، −١] ∪ [٣ ، ∞[



(١٩) إذا كانت مجموعة الحل فى ح للمتباينة : أ سـ^{٢} + ب سـ + حـ > ٠ هى ح فإن : ....

(أ) أ ، ب ، حـ ∈ ح$^{+}$ (ب) أ ، حـ لهما نفس الإشارة.

(جـ) ٤ أ حـ > ب^{٢} (د) $\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤ \text{ أ حـ}}$ ∈ ح

(٢٠) إذا كانت مجموعة الحل فى ح للمتباينة : أ سـ^{٢} + ب سـ + حـ > ٠ هى ح − [ل ، م]

فأى مما يأتى خطأ ؟

(أ) مجموعة حل المعادلة : أ سـ^{٢} + ب سـ + حـ = ٠ فى ح هى {ل ، م}

(ب) ل + م = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

(جـ) ب^{٢} > ٤ أ حـ

(د) مجموعة حل المتباينة : أ سـ^{٢} + ب سـ + حـ < ٠ هى [ل ، م]

(٢١) مجموعة حل المتباينة : (س + ٥) (س − ١) ≤ (س + ٥) هى ....

(أ) [١ ، ∞[(ب) [−٥ ، ٢]

(جـ) ح −]−٥ ، ٢[(د) ح −]−٥ ، ١[

(٢٢) المتباينة التى مجموعة حلها]−٢ ، ٤[هى ....

(أ) س^{٢} − ٨ < ٢ س (ب) س^{٢} − ٢ س ≤ ٨

(جـ) ٨ + ٢ س < س^{٢} (د) س^{٢} − ٢ س ≥ ٨

(٢٣) عدد الأعداد الصحيحة فى مجموعة حل المتباينة : (٢ س + ١) (س − ٢) < ٠ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٤) إذا كان : ٥ ≤ س ≤ ٨ فإن : ....

(أ) (س − ٥) (س − ٨) ≥ ٠ (ب) (س − ٥) (س − ٨) > ٠

(جـ) (س − ٥) (س − ٨) ≤ ٠ (د) (س − ٥) (س − ٨) < ٠

(٢٥) قيم س الحقيقية التى تحقق أن : س^{٢} − ٢ س − ٣ < ٠ ، س − ٢ < ٠ هى ....

(أ)]−١ ، ٣[(ب)]−١ ، ٢[(جـ)]٢ ، ٣[(د) [−١ ، ٣]

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(١) س^{٢} + ٢ س − ٨ > ٠
(٢) س^{٢} − ٥ س − ٦ < ٠
(٣) ٤ − ٣ س − س^{٢} ≥ ٠
(٤) س^{٢} − ١ ≤ ٠
(٥) ٤ − س^{٢} < ٠
(٦) س^{٢} − ٤ س + ٤ ≥ ٠
(٧) ٦ س − س^{٢} − ٩ < ٠
(٨) س^{٢} − ٨ س + ١٦ < ٠
(٩) − س^{٢} − ١٠ س − ٢٥ ≥ ٠
(١٠) ٢ س − س^{٢} < ٠

٢ أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(١) س^{٢} + ٥ س < −٤
(٢) ٥ س^{٢} + ١٢ س ≥ ٤٤
(٣) ٣ س^{٢} ≤ ١١ س + ٤
(٤) س^{٢} ≥ ٦ س − ٩
(٥) ٣ − ٢ س ≥ س^{٢}
(٦) س^{٢} + ٥ ≤ ١
(٧) − س^{٢} − ٧ < ٢
(٨) (س − ٢)^{٢} ≥ ٩
(٩) (س − ٢)^{٢} ≤ −٥
(١٠) س (س + ٢) − ٣ ≤ ٠
(١١) (س + ٣)^{٢} < ١٠ − ٣ (س + ٣)
(١٢) ٥ − ٢ س ≥ س^{٢}

٣ عيِّن إشارة الدالة د حيث د (س) = س^{٢} − ٥ س + ٦ ومن ذلك عيِّن فى ح مجموعة حل المتباينة : د (س) < ٠

٤ ابحث إشارة الدالة د حيث د (س) = ٢ س^{٢} + ٧ س − ١٥ ومن ذلك أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة :
٢ س^{٢} + ٧ س ≤ ١٥

٥ عين إشارة الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ٤ ثم أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : د (س) ≤ صفر

٦ ارسم منحنى الدالة د : د (س) = − س^{٢} + ٢ س + ٣ فى الفترة [−٢ ، ٤] ومن الرسم أوجد فى ح :

(١) مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ (٢) مجموعة حل المتباينة : د (س) ≤ ٠

(٣) مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠

اكتشف الخطأ

٧ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : (س + ١)^{٢} < ٤ (٢ س − ١)^{٢}

حل يوسف

∵ (س + ١)^{٢} < ٤ (٢ س − ١)^{٢}

∴ س + ١ < ٢ (٢ س − ١)

وذلك بأخذ الجذر التربيعى للطرفين.

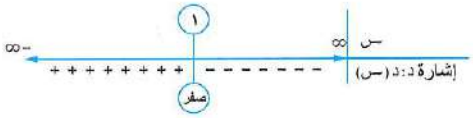
∴ −٤ س + س + ٢ + ١ < ٠

∴ −٣ س + ٣ < ٠

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى : −٣ س + ٣ = ٠

مجموعة الحل هى {١}

* ببحث إشارة الدالة د حيث د (س) = −٣ س + ٣



نجد أن : مجموعة حل المتباينة هى]١ ، ∞[

حل نور

∵ (س + ١)^{٢} < ٤ (٢ س − ١)^{٢}

∴ س^{٢} + ٢ س + ١ < ١٦ س^{٢} − ١٦ س + ٤

∴ ١٥ س^{٢} − ١٨ س + ٣ > ٠

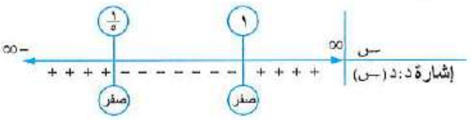
المعادلة المرتبطة بالمتباينة هى :

∴ ٣ (٥ س − ١) (س − ١) = ٠

مجموعة الحل هى {١ ، $\frac{١}{٥}$}

* ببحث إشارة الدالة د حيث

د (س) = ١٥ س^{٢} − ١٨ س + ٣



نجد أن : مجموعة حل المتباينة هى ح − [$\frac{١}{٥}$ ، ١]

أى الحلين صحيح ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = س^{٢} − ٧ س + ١٢ ، س ∈ ح فإن جميع ما يلى صحيح ما عدا ....

(أ) مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٣ ، ٤}

(ب) مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠ هى ح − [٣ ، ٤]

(جـ) مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هى]٣ ، ٤[

(د) د موجبة فى الفترة ح −]٣ ، ٤[

(٢) مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينة : (س − ٢) (٣ س − ١) ≤ ٠ يساوى ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٣) مجموعة حل المتباينة : (س + ٣)^{٢} > ٤ (س + ١)^{٢} فى ح هى ....

(أ)]$\frac{-٥}{٣}$ ، ١[(ب) ح −]$\frac{-٥}{٣}$ ، ١[(جـ) [$\frac{-٥}{٣}$ ، ١] (د) ح − [$\frac{-٥}{٣}$ ، ١]

(٤) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ > ٠ ، ل < م

فإن مجموعة حل المتباينة : أ س^{٢} + ب س + جـ < ٠ فى ح هى ....

(أ)]−∞ ، ل[(ب)]ل ، م[(جـ)]م ، ∞[(د) ح − [ل ، م]

(٥) إذا كان مميز المعادلة : أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ سالبًا

فإن مجموعة حل المتباينة : أ س^{٢} + ب س + جـ < ٠ حيث أ > ٠ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) ∅ (جـ) ح$^{+}$ (د) ح$^{-}$

(٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} + (ك − ٢) س − ٥ = ٠ وكان : −١ < ل < م فإن ....

(أ) −١ < ك < ٠ (ب) ك > ٦ (جـ) ك < −١ (د) −١ < ك < ٦

(٧) إذا كان كل من جذرى المعادلة التربيعية : س^{٢} − ٢ ك س + ك^{٢} + ك − ٥ = ٠ أقل من ٥

فإن : ك ∈ ....

(أ) [٤ ، ٥] (ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤[(د) ح − [٤ ، ٥]

(٨) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : س^{٢} − ك س + ١ = ٠ غير حقيقيين فإن : ....

(أ) ك ∈ ص$^{-}$ (ب) −٢ < ك < ٢ (جـ) ك > ٢ (د) ك < −٢

(٩) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $س^{٢}$ − ٤ ≥ س + ك هى [−٢ ، ٣] فإن : ك = ...

(أ) −٦ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٠

(١٠) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : $س^{٢}$ − ١٠ < ب س هى]−٢ ، ٥[فإن : ب = ...

(أ) −١٠ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(١١) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^{٢}$ − ب س + ٣ = ٠ ينتمى للفترة]١ ، ٢[

فإن : ب ∈ ....

(أ)]١ ، ٢[(ب)]−∞ ، ٣[(جـ)]$٣\frac{١}{٢}$ ، ٤[(د) ح −]$٣\frac{١}{٢}$ ، ٤[

(١٢) إذا كانت $م_{١}$ هى مجموعة حل المتباينة : $س^{٢}$ − س − ٢ ≥ ٠ وكانت $م_{٢}$

هى مجموعة حل المتباينة : $س^{٢}$ + س − ٢ ≥ ٠ فإن : $م_{١} \cap م_{٢}$ = ...

(أ) ∅ (ب) [−٢ ، ٢] (جـ) [−١ ، ١] (د) ح −]−١ ، ١[

(١٣) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : أ $س^{٢}$ + أ س + أ + ٢ = ٠ وكان ٢ ∈]ل ، م[

فإن : أ ∈ ....

(أ) [١ ، ٢] (ب) $ح^{+}$ (جـ)]$\frac{-٢}{٧}$ ، ٠[(د)]$\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$[

(١٤) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : ٤ $س^{٢}$ − ٢ س + م = ٠ ينتميان للفترة]−١ ، ١[

فإن : ....

(أ) ٠ ≤ م < ٢ (ب) −٦ < م ≤ $\frac{١}{٨}$ (جـ) −٢ < م ≤ $\frac{١}{٤}$ (د) −٦ ≤ م < −٢

تطبيقات حياتية على الوحدة الأولى

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

١ يبدأ غواص بالقفز من على منصة بارتفاع ١٠ أمتار فوق سطح الماء فإذا كان ارتفاع الغواص عن سطح الماء ف مترًا تعبر عنه العلاقة :

ف = −٤,٩ $ن^{٢}$ + ٣,٥ ن + ١٠ حيث ن الزمن بالثوانى.

بعد كم ثانية يصل الغواص إلى سطح الماء ؟

« $\frac{٥}{٧}$ ثانية»

---

٢ 📖 قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ من الأمتار ، يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة كل بعد من بعديها بنفس المقدار.

أوجد المقدار المضاف.

«٣ أمتار»

---

٣ 📖 يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣ بالعلاقة :

ع = $ن^{٢}$ + ١,٢ ن + ٩١ حيث (ع) عدد السكان بالمليون ، (ن) عدد السنوات.

(١) كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣ ؟ (٢) قدر عدد السكان عام ٢٠٣٣

(٣) قدر عدد السنوات التى يبلغ عدد السكان فيها ٢٠٣ ملايين.

«٩١ مليونًا ، ٥١٥ مليونًا ، ١٠ سنوات أى فى عام ٢٠٢٣»

---

٤ 📖 أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة ، إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى (٤ − ٢ ت) أمبير وفى المقاومة الثانية $\frac{٦ + ٣ ت}{٢ + ت}$ أمبير

(علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوى مجموع شدتى التيار المار فى المقاومتين)

«(٧ − ٢ ت) أمبير»

---

٥ 📖 إذا كانت شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربية مغلقة تساوى (٦ + ٤ ت) أمبير ، وكانت شدة التيار المار فى إحداهما $\frac{١٧}{٤ - ت}$ أمبير ، فأوجد شدة التيار المار فى المقاومة الأخرى.

«(٢ + ٣ ت) أمبير»

---

٦ 📖 فى الفترة من عام ١٩٩٠م إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أحد مناجم الذهب مقدرًا بالألف أوقية يتحدد بالدالة د : د (ن) = ١٢ $ن^{٢}$ − ٩٦ ن + ٤٨٠ حيث ن عدد السنوات ، د (ن) إنتاج الذهب.

(١) ابحث إشارة دالة الإنتاج د

(٢) أوجد إنتاج منجم الذهب مقدرًا بالألف أوقية فى كل من العامين ١٩٩٠ ، ٢٠٠٥

(٣) فى أى عام كان إنتاج المنجم مساويًا ٢٠١٦ ألف أوقية ؟

«٤٨٠ ألف أوقية ، ١٧٤٠ ألف أوقية ، ٢٠٠٦»

الوحدة الثانية

حساب المثلثات

دروس الوحدة

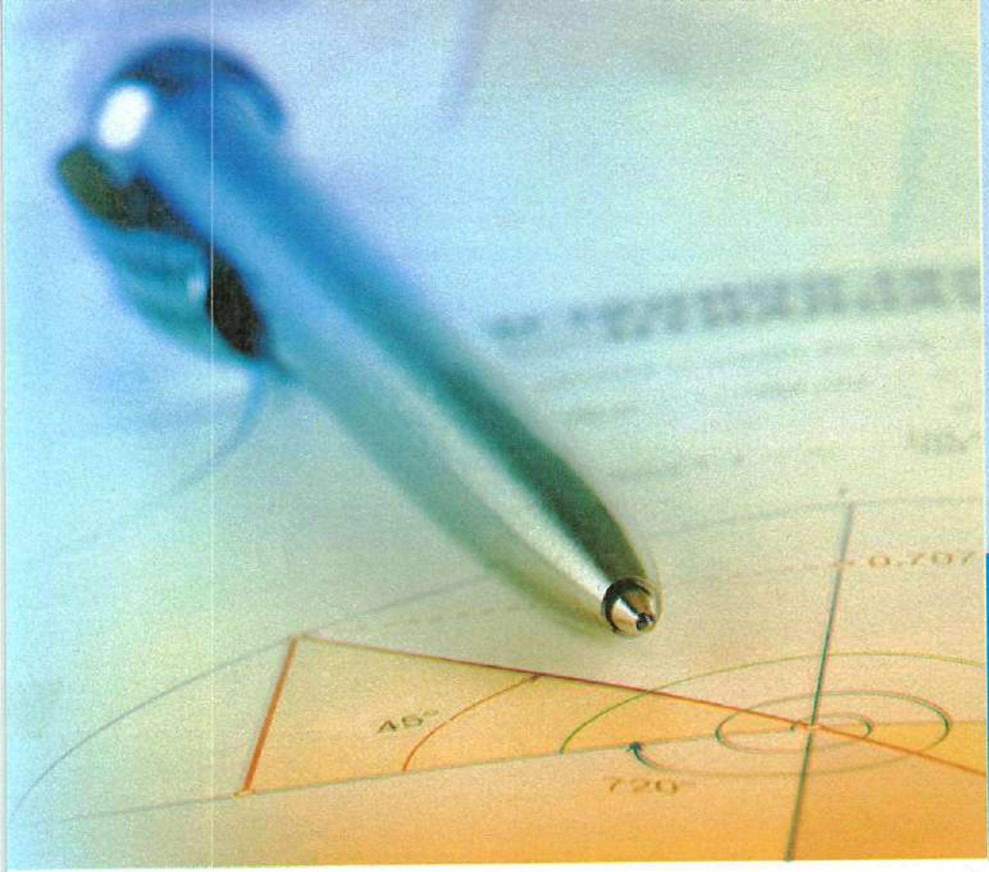
- الدرس 1 الزاوية الموجهة.
- الدرس 2 القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية.
- الدرس 3 الدوال المثلثية.
- الدرس 4 الزوايا المنتسبة.
- الدرس 5 التمثيل البيانى للدوال المثلثية.
- الدرس 6 إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الثانية.

نـواتـج الـتـعـلُّـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

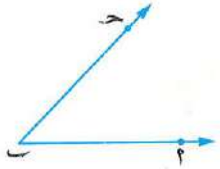
- يتعرف الزاوية الموجهة.
- يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- يتعرف الوضع القياسى للزاوية الموجهة.
- يتعرف مفهوم الزوايا المتكافئة.
- يحدد الربع الذى تقع فيه زاوية فى وضعها القياسى.
- يتعرف القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة.
- يحوّل من القياس الستينى للزاوية إلى القياس الدائرى لها والعكس.
- يتعرف إشارات الدوال المثلثية فى كل ربع.
- يوجد الدوال المثلثية لبعض الزوايا المنتسبة لزاوية خاصة.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إيجاد النسب المثلثية.
- يستخدم الآلة الحاسبة فى إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الستينى للدائرى والعكس.
- يرسم الدوال المثلثية (دالة الجيب - دالة جيب التمام).
- يستخدم الحاسب الآلى فى تمثيل الدوال المثلثية.
- يحل بعض التطبيقات الحياتية باستخدام الدوال المثلثية.
- يوجد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.



الدرس

1

الزاوية الموجهة



- سبق أن تعلمنا أن الزاوية هى اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية مشتركة.

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ شعاعين لهما نقطة بداية مشتركة ب

فإن : $\overrightarrow{\text{ب أ}} \cup \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ∠ أ ب جـ ويُسمى الشعاعان $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ ضلعى الزاوية

، والنقطة ب رأس الزاوية.

- كما علمنا أن ترتيب ضلعى الزاوية غير هام.

فيمكن أن نكتب : ∠ أ ب جـ أو ∠ جـ ب أ لتعبر عن نفس الزاوية.

- وفى هذا الدرس سوف نتناول مفهومًا جديدًا وهو مفهوم «**الزاوية الموجهة**» وبعض الموضوعات الأخرى المتعلقة بها.

الزاوية الموجهة

إذا أخذنا فى الاعتبار ترتيب ضلعى الزاوية بحيث يكون أحدهما ضلعًا ابتدائيًا والآخر ضلعًا نهائيًا ، ففى هذه الحالة تكتب الزاوية على شكل «**زوج مرتب**» مسقطه الأول هو الضلع الابتدائى ومسقطه الثانى هو الضلع النهائى وتسمى الزاوية بـ «**الزاوية الموجهة**» ، وعند رسمها اصطلح على رسم سهم بين ضلعيها يخرج من الضلع الابتدائى متجهًا نحو الضلع النهائى.

تعريف الزاوية الموجهة

هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية.

فإذا كان : و أ ، و ب ضلعى زاوية رأسها نقطة و فإن :

الزوج المرتب (و أ ، و ب) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ أ و ب ضلعها الابتدائى و أ ، ضلعها النهائى و ب

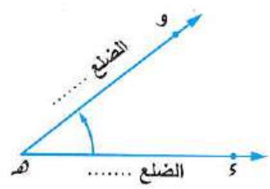
الزوج المرتب (و ب ، و أ) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ ب و أ ضلعها الابتدائى و ب ، ضلعها النهائى و أ

نستنتج مما سبق أن

∠ أ و ب الموجهة ≠ ∠ ب و أ الموجهة وذلك لأن : (و أ ، و ب) ≠ (و ب ، و أ)

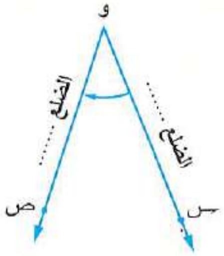
تحقق من فهمك

أكمل : 1



(هـ ء ، هـ و) يعبر عن ∠ ..... الموجهة.

2



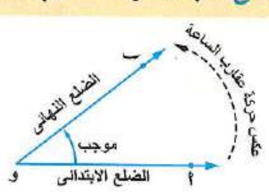
(..... ، .....) يعبر عن ∠ س و ص الموجهة.

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

يكون قياس الزاوية الموجهة أ و ب

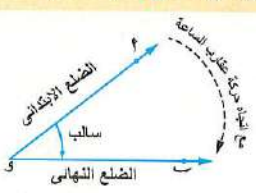
موجباً

إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائى إلى الضلع النهائى فى **عكس** اتجاه حركة عقارب الساعة.



سالباً

إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائى إلى الضلع النهائى فى **نفس** اتجاه حركة عقارب الساعة.

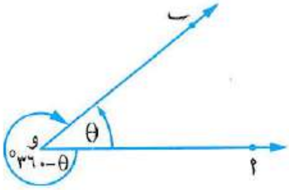


ملاحظة

لكل زاوية موجهة غير صفرية قياسان أحدهما موجب والآخر سالب بحيث يكون مجموع القيمتين المطلقتين للقياسين يساوى ٣٦٠°

أى أن | القياس الموجب للزاوية الموجهة | + | القياس السالب للزاوية الموجهة | = ٣٦٠°

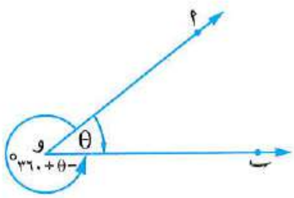
وعلى هذا فإنه



١ إذا كان القياس الموجب للزاوية الموجهة = θ

فإن القياس السالب لنفس الزاوية = θ − ٣٦٠°

فمثلًا القياس السالب للزاوية الموجهة التى قياسها ٢١٠° = ٢١٠° − ٣٦٠° = −١٥٠°



٢ إذا كان القياس السالب للزاوية الموجهة = − θ

فإن القياس الموجب لنفس الزاوية = − θ + ٣٦٠°

فمثلًا القياس الموجب للزاوية الموجهة التى قياسها (−١٢٠°)

= −١٢٠° + ٣٦٠° = ٢٤٠°

حاول بنفسك

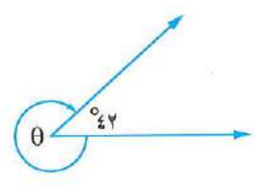
أوجد : ١ القياس الموجب للزاوية الموجهة التى قياسها (−١٧٠°)

٢ القياس السالب للزاوية الموجهة التى قياسها ٣٢٠°

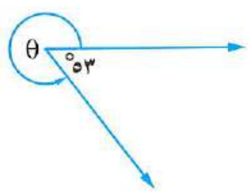
مثال ١

أوجد قياس الزاوية الموجهة θ فى كل من الشكلين الآتيين :

١



٢



الحل

١ ∵ اتجاه السهم فى نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.

∴ قياس الزاوية سالب. ∴ θ = ٤٢° − ٣٦٠° = −٣١٨°

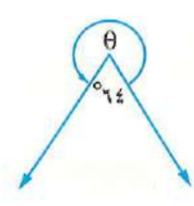
٢ ∵ اتجاه السهم ضد اتجاه حركة عقارب الساعة.

∴ قياس الزاوية موجب. ∴ θ = −٥٣° + ٣٦٠° = ٣٠٧°

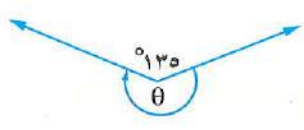
حاول بنفسك

أوجد قياس الزاوية الموجهة θ فى كل من الأشكال الآتية :

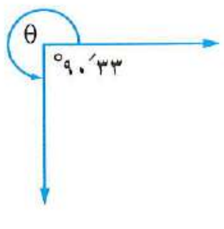
١



٢



٣



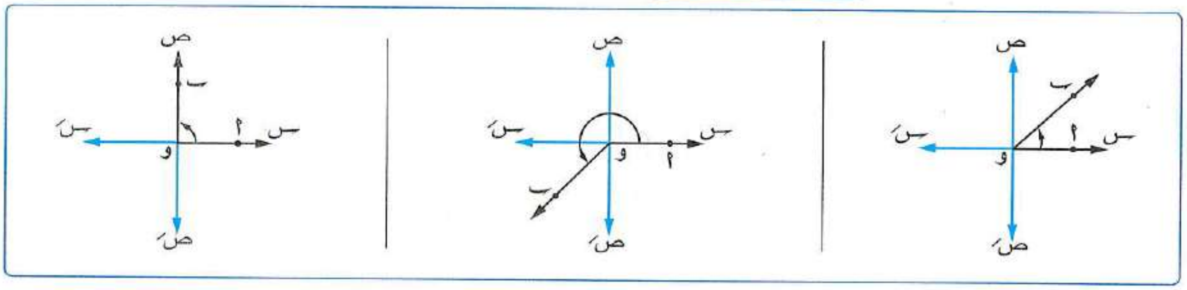
الوضع القياسى للزاوية الموجهة

تكون الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا تحقق الشرطان الآتيان

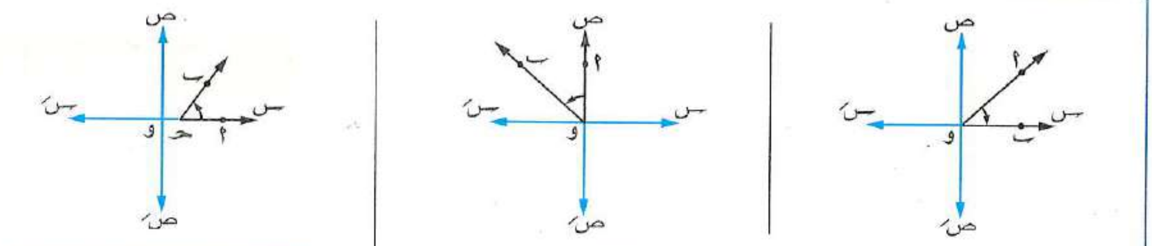
1. ضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.
2. رأسها هو نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد.

وعلى هذا فإن :

- كل من الزوايا الموجهة التالية **فى الوضع القياسى** لتحقق الشرطين السابقين :



- كل من الزوايا الموجهة التالية **ليست فى الوضع القياسى** لأن :

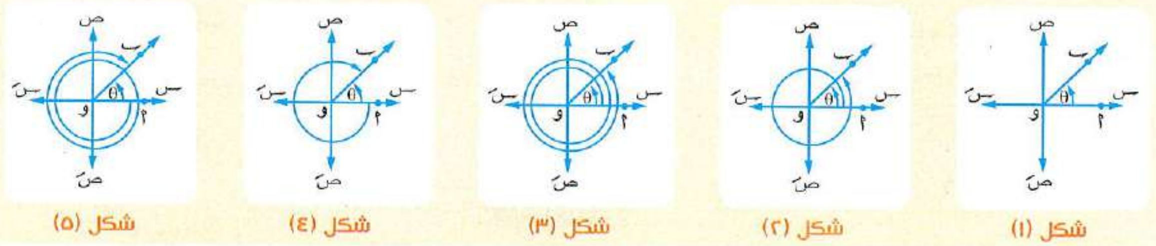


الضلع الابتدائى لا يقع على $\overrightarrow{\text{و س}}$

رأسها ليس نقطة الأصل و

الزوايا المتكافئة

- **إذا تأملنا الزوايا الموجهة فى الوضع القياسى فى الأشكال الآتية :**



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤) شكل (٥)

فإننا نلاحظ ما يلى

[١] الزوايا فى الأشكال الخمسة لها نفس الضلع النهائى $\overleftarrow{و ب}$

[٢] الزاوية فى شكل (١) قياسها = θ

، الزاوية فى شكل (٢) قياسها = θ + ٣٦٠°

، الزاوية فى شكل (٣) قياسها = θ + ٢ × ٣٦٠°

، الزاوية فى شكل (٤) قياسها = − (٣٦٠° − θ) = θ − ٣٦٠°

، الزاوية فى شكل (٥) قياسها = − (٢ × ٣٦٠° − θ) = θ − ٢ × ٣٦٠°

ومن ذلك نستنتج أنه

إذا كان (θ) هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى فإن الزوايا التى قياساتها :

(θ ± ٣٦٠°) ، (θ ± ٢ × ٣٦٠°) ، (θ ± ٣ × ٣٦٠°) ، ..... ، (θ ± ν × ٣٦٠°)

حيث ν عدد صحيح موجب يكون لها جميعًا نفس الضلع النهائى.

مثل هذه الزوايا التى تشترك فى الضلع النهائى توصف بأنها **زوايا متكافئة**.

تعريف الزوايا المتكافئة

يقال لعدة زوايا موجهة فى الوضع القياسى إنها متكافئة إذا كان لها جميعًا نفس الضلع النهائى.

مثال ٢

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من :

[١] ١٠٠°

[٢] −٢٥٠°

الحل

[١] زاوية بقياس موجب : ١٠٠° + ٣٦٠° = ٤٦٠°

زاوية بقياس سالب : ١٠٠° − ٣٦٠° = −٢٦٠°

[٢] زاوية بقياس موجب : −٢٥٠° + ٣٦٠° = ١١٠°

زاوية بقياس سالب : −٢٥٠° − ٣٦٠° = −٦١٠°

لاحظ أنه

يوجد عدد لا نهائى من الزوايا الأخرى بقياس موجب وبقياس سالب تشترك فى الضلع النهائى.

مثال ٣

عيِّن أصغر قياس موجب لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

[١] −٦٢°

[٢] −٢٢٥°

[٣] ٥٣٠°

[٤] −٧٩٠°

الحــل

١ أصغر قياس موجب = −٦٢° + ٣٦٠° = ٢٩٨°

٢ أصغر قياس موجب = −٢٢٥° + ٣٦٠° = ١٣٥°

٣ أصغر قياس موجب = ٥٣٠° − ٣٦٠° = ١٧٠°

٤ أصغر قياس موجب = −٧٩٠° + ٣ × ٣٦٠° = ٢٩٠°

حاول بنفسك

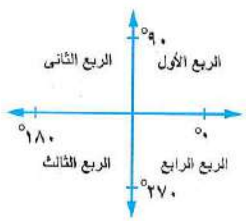
١ عيِّن أحد القياسات السالبة لكل من : ١ ٧٢°   ٢ ١١٥٠°

٢ عيِّن أصغر قياس موجب لكل من : ١ −١١٥°   ٢ ٤٠٥°

موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثى المتعامد

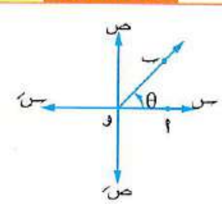
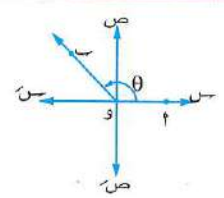
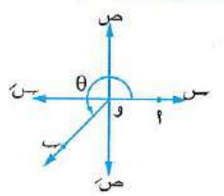
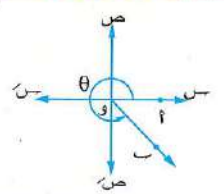
• نعلم أن المستوى الإحداثى المتعامد ينقسم إلى أربعة أرباع كما فى الشكل التالى.

يتحدد موقع الزاوية الموجهة فى المستوى الإحداثى المتعامد بموقع ضلعها النهائى عندما تكون فى وضعها القياسى.



فإذا رسمنا ∠ أ و ب الموجهة التى قياسها الموجب θ فى وضعها القياسى فإن :

الضلع النهائى $\overrightarrow{\text{و ب}}$ قد يقع فى أحد الأرباع كما يلى

الربع الأول	الربع الثانى	الربع الثالث	الربع الرابع
			
∠ أ و ب تقع فى **الربع الأول** $٠° < \theta < ٩٠°$	∠ أ و ب تقع فى **الربع الثانى** $٩٠° < \theta < ١٨٠°$	∠ أ و ب تقع فى **الربع الثالث** $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$	∠ أ و ب تقع فى **الربع الرابع** $٢٧٠° < \theta < ٣٦٠°$

ملاحظة

إذا وقع الضلع النهائى على أحد محورى الإحداثيات تسمى الزاوية **بالزاوية الربعية.**

أى أن الزوايا التى قياساتها ٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠° هى زوايا ربعية.

مثال ٤

عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالآتى :

١ $213°$	٢ $132°$	٣ $-310°$	٤ $-12°$
٥ $270°$	٦ $964°$	٧ $-1070°$	

الحل

١ ∵ $180° < 213° < 270°$ ∴ الزاوية تقع فى الربع الثالث.

٢ ∵ $90° < 132° < 180°$ ∴ الزاوية تقع فى الربع الثانى.

٣ أصغر قياس موجب = $-310° + 360° = 50°$

، ∵ $0° < 50° < 90°$

∴ الزاوية التى قياسها $50°$ تقع فى الربع الأول.

∴ الزاوية التى قياسها $-310°$ تقع أيضًا فى الربع الأول.

> **لاحظ أنه**
> لتحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة يجب إيجاد أصغر قياس موجب لها أولًا.

٤ أصغر قياس موجب = $-12° + 360° = 348°$

، ∵ $270° < 348° < 360°$ ∴ الزاوية التى قياسها $348°$ تقع فى الربع الرابع.

∴ الزاوية التى قياسها $-12°$ تقع أيضًا فى الربع الرابع.

٥ $270°$ زاوية ربعية.

٦ أصغر قياس موجب = $964° - 2 \times 360° = 244°$

، ∵ $180° < 244° < 270°$ ∴ الزاوية التى قياسها $244°$ تقع فى الربع الثالث.

∴ الزاوية التى قياسها $964°$ تقع أيضًا فى الربع الثالث.

٧ أصغر قياس موجب = $-1070° + 3 \times 360° = 10°$

، ∵ $0° < 10° < 90°$ ∴ الزاوية التى قياسها $10°$ تقع فى الربع الأول.

∴ الزاوية التى قياسها $-1070°$ تقع أيضًا فى الربع الأول.

حاول بنفسك

حدد الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالآتى :

١ $67°$ ٢ $-220°$ ٣ $875°$ ٤ $-2020°$

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

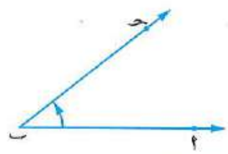
(١) الزوج المرتب ($\overrightarrow{\text{و ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{و جـ}}$) يمثل الزاوية الموجهة ....

(أ) ∠ و ب جـ   (ب) ∠ ب و جـ   (جـ) ∠ ب جـ و   (د) ∠ و جـ ب

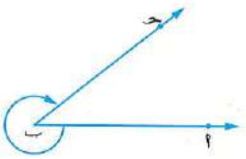
(٢) أى مما يأتى لا يعبر عن ∠ أ ب جـ الموجهة ؟

(أ) ($\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$)

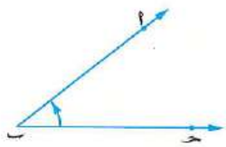
(ب)



(جـ)



(د)



(٣) إذا كان θ هو القياس الموجب للزاوية الموجهة فإن القياس السالب لها هو ....

(أ) $-\theta$ (ب) $\theta - 180°$ (جـ) $\theta - 360°$ (د) $360° - \theta$

(٤) إذا كان θ_1 هو القياس الموجب لزاوية موجهة ، θ_2 هى القياس السالب لها

فإن : $\theta_1 - \theta_2 =$ ....°

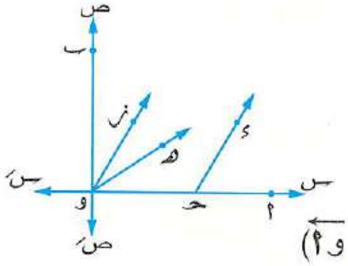
(أ) صفر   (ب) ± 360 (جـ) 360 (د) -360

(٥) إذا كانت زاوية موجهة غير صفرية فإن مجموع القياسين الموجب والسالب لها ....

(أ) يساوى ٣٦٠°   (ب) أكبر من ٣٦٠°

(جـ) $\in]-360° ، 360°[$ (د) $\in]0° ، 360°[$

(٦) في الشكل المقابل :



أى من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة

فى وضعها القياسى ؟ فسِّر إجابتك.

(أ) ($\overrightarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$)   (ب) ($\overrightarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و أ}}$)

(جـ) ($\overrightarrow{\text{و ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ز}}$)   (د) ($\overrightarrow{\text{و أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ب}}$)

(٧) إذا كانت الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى فأى مما يأتى صحيح ؟

(١) رأسها نقطة الأصل.

(٢) ضلعها الابتدائى ينطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

(٣) قياسها موجب.

(أ) (١) فقط. (ب) (١) ، (٢) فقط.

(ج) (٢) ، (٣) فقط. (د) جميع ما سبق.

(٨) يقال للزوايا الموجهة فى الوضع القياسى إنها متكافئة إذا كان لها نفس ....

(أ) الضلع الابتدائى. (ب) الضلع النهائى. (ج) رأس الزاوية. (د) اتجاه الدوران.

(٩) إذا كانت θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، $ن \in ص$

فإن الزوايا التى قياساتها ($\theta \pm ن \times ٣٦٠^\circ$) تسمى بالزوايا ....

(أ) المتكافئة. (ب) الربعية. (ج) المتكاملة. (د) المتجاورة.

(١٠) إذا كان : أ ، ب قياسى زاويتين متكافئتين فإن : −أ ، −ب يكونان ....

(أ) متكاملتين. (ب) متكافئتين.

(ج) متتامتين. (د) مجموعهما -٣٦٠°

(١١) قياس الزاوية الربعية يكون أحد مضاعفات ....

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (ج) ٩٠° (د) ٦٠°

(١٢) الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ....

(أ) ١٢٠° (ب) ٢٤٠° (ج) ٣٠٠° (د) ٤٢٠°

(١٣) الزاوية التى قياسها ٥٨٥° تكافئ فى الوضع القياسى الزاوية التى قياسها ....

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (ج) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(١٤) الزاوية التى قياسها ٩٥٠° تكافئ فى الوضع القياسى الزاوية التى قياسها ....

(أ) ١٣٠° (ب) -١٣٠° (ج) ٢٣٥° (د) -٢٣٠°

(١٥) جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية التى قياسها ٧٥° فى الوضع القياسى ما عدا ....

(أ) -٢٨٥° (ب) -٦٤٥° (ج) ٢٨٥° (د) ٤٣٥°

(١٦) الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها ١٦٧٠° هو ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (ج) الثالث. (د) الرابع.

(١٧) الزاوية التى قياسها (-١٣٥°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (ج) الثالث. (د) الرابع.

(١٨) الزاوية التى قياسها (−٨٥٠°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٩) جميع الزوايا التى قياساتها كالآتى تقع فى الربع الثانى ما عدا ....

(أ) −٢٤٠° (ب) ١٠٠° (جـ) −١٢٠° (د) ٨٦٠°

(٢٠) الزاوية التى قياسها ٤٥° + (٤ ن + ١) × ٩٠° تقع فى الربع .... (حيث ن ∈ ص)

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢١) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى دورتين وربع فى عكس اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يمثل الزاوية التى قياسها ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٢٤٠°

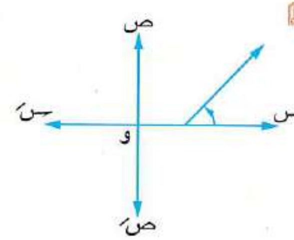
(٢٢) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٣٠° فى الوضع القياسى ثلاث دورات ونصف مع اتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يكون فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

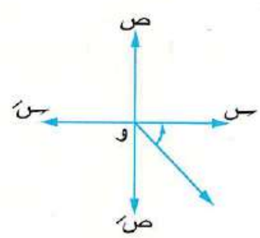
ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أى الزوايا الموجهة التالية فى وضعها القياسى ؟ فسِّر إجابتك.

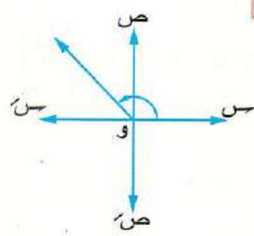
(١)



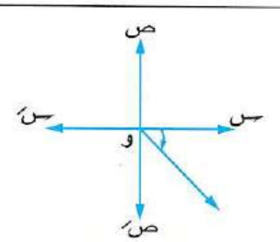
(٢)



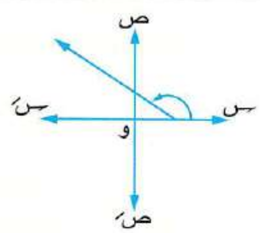
(٣)



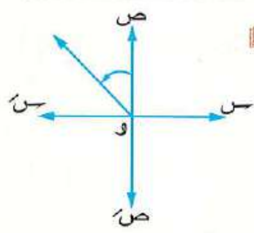
(٤)



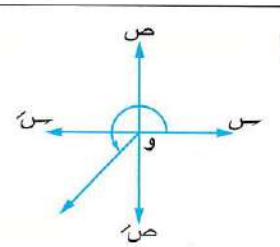
(٥)



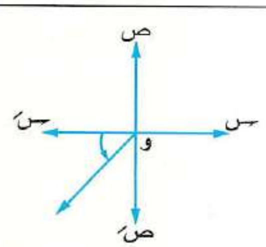
(٦)



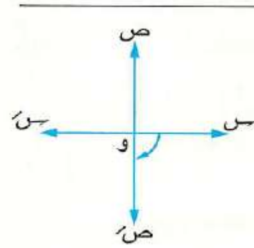
(٧)



(٨)

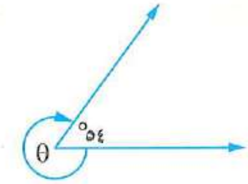


(٩)

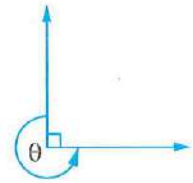


٢ أوجد قياس الزاوية الموجهة θ المشار إليها فى كل شكل من الأشكال الآتية :

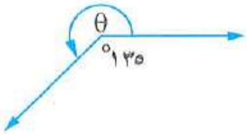
(١)



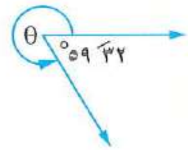
(٢)



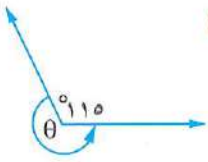
(٣)



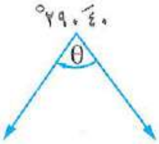
(٤)



(٥)



(٦)



٣ ضع كلًا من الزوايا الآتية فى الوضع القياسى ، موضحًا ذلك بالرسم :

(١) ٣٢° (٢) ١٤٠° (٣) −٨٠° (٤) −١١٠° (٥) −٣١٥°

٤ عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) ٢٤° (٢) ٢١٥° (٣) −٥٠° (٤) −٢١٠°

(٥) ١٥٠° ١٤َ (٦) ٨٩° ٥٩َ (٧) −١٨٠° (٨) ٢٦٩° ٥٩َ ٦٠ً

٥ عيِّن أصغر قياس موجب لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى ثم عيِّن الربع الذى تقع فيه كل زاوية :

(١) −٥٦° (٢) ٦٠٠° (٣) −٢١٥ (٤) ٩٤٠°

(٥) ٤١٥° (٦) −٨٧٠° (٧) ١١٢٠° ١٥َ (٨) −٥٩٠° ١٨َ

٦ عيِّن أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) ٨٣° (٢) ١٣٦° (٣) ٩٠°

(٤) ٢٦٤° (٥) ٩٦٤° (٦) ١٠٧٠°

٧ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) ٤٠° (٢) ١٥٠° (٣) −١٢٥°

(٤) −٢٤٠° (٥) −١٨٠°

اكتشف الخطأ

8 اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان فى الضلع النهائى للزاوية التى قياسها (−١٣٥°)

إجابة كريم

أصغر زاوية بقياس موجب = −١٣٥° + ١٨٠° = ٤٥°

زاوية بقياس سالب = −١٣٥° − ١٨٠° = −٣١٥°

إجابة زياد

أصغر زاوية بقياس موجب = −١٣٥° + ٣٦٠° = ٢٢٥°

زاوية بقياس سالب = −١٣٥° − ٣٦٠° = −٤٩٥°

أى الإجابتين صحيحة ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين متكافئتين فأى مما يأتى يمثل قياسى زاويتين متكافئتين أيضًا حيث حـ ∈ ص ؟

(أ) (أ + حـ) ، (ب + حـ)　　(ب) (أ − حـ) ، (ب − حـ)

(جـ) (حـ أ) ، (حـ ب)　　(د) كل ما سبق صحيح.

(٢) إذا كان : أ ، − أ قياسى زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هى ....

(أ) ١٥٠°　　(ب) ٩٠°　　(جـ) ١٨٠°　　(د) ٢٧٠°

(٣) إذا كان (٣ س − ٥)° أصغر قياس موجب ، (٣ ص − ٥)° أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين فى الوضع القياسى فإن : س − ص = ...

(أ) ٣٦٠°　　(ب) ١٨٠°　　(جـ) ١٢٠°　　(د) ٩٠°

(٤) إذا كان (θ + ٢٠)° ، (٢٠ − ٨ θ)° هما القياسان الموجب والسالب لزاوية موجهة على الترتيب فإن أقل قيمة موجبة لـ θ تكون ....

(أ) ٢٠°　　(ب) ١٠°　　(جـ) ٣٠°　　(د) ٤٠°

(٥) إذا كان الضلع النهائى للزاوية فى الوضع القياسى يمر بالنقطة (−١ ، ٠) فإن الضلع النهائى يقع فى ....

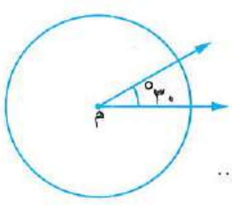
(أ) الربع الأول.　　(ب) الربع الثانى.　　(جـ) الربع الثالث.　　(د) غير ذلك.

الدرس

2

القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

القياس الستينى للزاوية



تعتمد فكرته على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية فى الطول ، وعليه فالزاوية المركزية التى ضلعاها يمران بنهايتى أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة ويرمز لها بالرمز °١ والزاوية المركزية التى تحصر بين ضلعيها ٣٠ قوسًا من هذه الأقواس يكون قياسها °٣٠ وهكذا ...

وحدة قياس الزاوية فى القياس الستينى

الدرجة هى وحدة قياس الزاوية فى القياس الستينى ، وتنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءًا متساويًا كل منها يسمى **دقيقة** ويرمز لها بالرمز َ١ ، كما تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءًا متساويًا كل منها يسمى **ثانية** ويرمز لها بالرمز ً١

أى أن °١ = َ٦٠ ، َ١ = ً٦٠

وفى هذا النوع من القياس تستخدم المنقلة كوسيلة لقياس الزوايا بالدرجات.

تذكر أنه :

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لتحويل أجزاء الدرجات والدقائق إلى دقائق وثوانٍ والعكس

فمثلًا

- $\frac{٣}{٨}$ °٣٧ = °٣٧ َ٢٢ ً٣٠

$37 \frac{3}{8}$ [°’’’] [=] $37° 22' 30''$

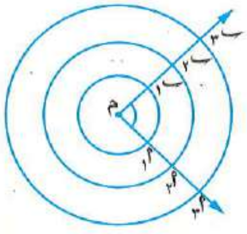
- °٧٠ َ٣٧ ً٣٠ = $\frac{٥}{٨}$ °٧٠

70 [°’’’] 37 [°’’’] 30 [°’’’] [=] [SHIFT] [S⟷D] $70 \frac{5}{8}$

القياس الدائرى للزاوية

يعتمد هذا القياس على الحقيقة الهندسية الآتية

فى الدوائر المتحدة المركز النسبة بين طول قوس أى زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظر تساوى مقدارًا ثابتًا يتوقف على قياس الزاوية التى تحصر هذا القوس.



ففى الشكل المقابل :

$$\frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_1 ب_1}}{م أ_1} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_2 ب_2}}{م أ_2} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أ_3 ب_3}}{م أ_3} = \text{مقدار ثابت.}$$

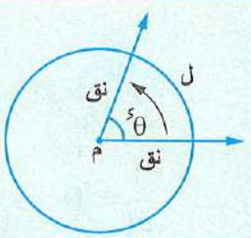
هذا المقدار الثابت يسمى بـ «القياس الدائرى للزاوية»

أى أن

$$\text{القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة} = \frac{\text{طول القوس الذى تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$$

مما سبق يمكن صياغة التعريف السابق رمزيًا كما يلى :

تعريف



إذا كان $\theta^{د}$ هو القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها نق

وتقابل قوسًا طوله ل فإن : $\boxed{\theta^{د} = \frac{ل}{نق}}$

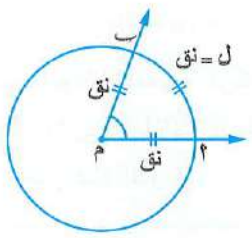
وحيث إن طول نصف قطر الدائرة نق مقدار ثابت فإن القياس الدائرى لزاوية مركزية فى دائرة يتناسب طرديًا مع طول القوس المقابل لها.

أى أن $\theta^{د} \propto ل$

وحدة قياس الزاوية فى القياس الدائرى

الزاوية النصف قطرية هى وحدة قياس الزاوية فى القياس الدائرى ، ويُرمز لها بالرمز $1^{د}$ ويُقرأ «واحد دائرى» (راديان) ، ويمكن تعريف الزاوية النصف قطرية كالتالى :

تعريف



الزاوية النصف قطرية هى الزاوية المركزية فى الدائرة التى تحصر قوسًا طوله يساوى طول نصف قطر هذه الدائرة.

لاحظ أن $\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$ $\therefore \theta^{د} = \frac{نق}{نق} = ١^{د}$

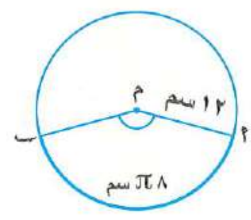
فمثلًا

الزاوية المركزية التى تحصر قوسًا طوله يساوى ضعف طول نصف قطر دائرتها يكون قياسها $= ٢^{د}$

مثال ١

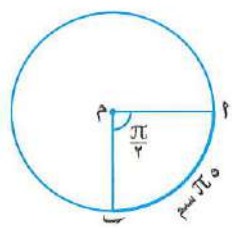
فى كل من الدوائر الآتية أوجد المطلوب أسفل كل شكل لأقرب جزء من عشرة :

١



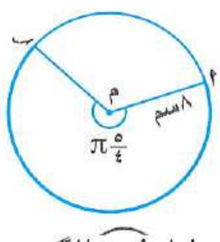
ق(∠ أ م ب) بالقياس الدائرى.

٢



طول نصف قطر الدائرة م

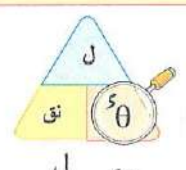
٣



طول $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر.

الحل

١

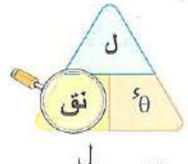


$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$

$\theta^{د} = ؟$ ، ل $= ٨\pi$ سم ، نق $= ١٢$ سم

$\therefore$ ق(∠ أ م ب) بالقياس الدائرى $= \frac{ل}{نق} = \frac{٨\pi}{١٢} = \frac{٢}{٣}\pi \simeq ٢,١^{د}$

٢



نق $= \frac{ل}{\theta^{د}}$

نق = ؟ ، ل $= ٥\pi$ سم ، $\theta^{د} = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore$ طول نصف القطر $= \frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{٥\pi}{\frac{\pi}{٢}} = ٥\pi \times \frac{٢}{\pi} = ١٠$ سم

٣

ل $= \theta^{د} \times$ نق

ل = ؟ ، $\theta^{د} = \frac{٥}{٤}\pi$ ، نق $= ٨$ سم

$\therefore$ طول $\overset{\frown}{أب}$ الأكبر $= \theta^{د} \times$ نق $= \frac{٥}{٤}\pi \times ٨ = ١٠\pi \simeq ٣١,٤$ سم

ملاحظة

إذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى الوحدة فإن الدائرة تسمى دائرة الوحدة ويكون $\boxed{\theta^{د} = ل}$

فمثلاً فى دائرة الوحدة الزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله $\frac{1}{2}\pi$ وحدة طول قياسها بالتقدير الدائرى = $\frac{1}{2}\pi$ (راديان) $\simeq ١,٥٧^{د}$

حاول بنفسك

[١] أوجد القياس الدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوسًا فى دائرة طوله ١٥ سم إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٠ سم.

[٢] أوجد طول القوس فى دائرة طول نصف قطرها ٨ سم إذا كان قياس الزاوية المركزية التى تقابله $\frac{٧\pi}{١٢}$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

[٣] أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها $\frac{٩}{٨}\pi$ وتحصر قوسًا طوله ٢٤ سم لأقرب رقم عشرى واحد.

العلاقة بين القياس الدائرى والقياس الستينى

نعلم أنه فى أى دائرة يكون : $\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول هذا القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$

أى أنه فى الشكل المقابل : $\frac{ق(\overset{\frown}{أب})}{٣٦٠^{\circ}} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أب}}{٢\pi \text{ نق}}$

، $\because$ ق(∠ أ م ب) = ق $(\overset{\frown}{أب})$ $\therefore \frac{ق(∠ أ م ب)}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\text{طول } \overset{\frown}{أب}}{\pi \text{ نق}}$

وبفرض أن : ق(∠ أ م ب) يساوى $س^{\circ}$ بالقياس الستينى ويساوى $\theta^{د}$ بالقياس الدائرى

وأن : طول $\overset{\frown}{أب}$ = ل $\therefore \frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{ل}{\pi \text{ نق}}$

، $\because \theta^{د} = \frac{ل}{\text{نق}}$

$\therefore \boxed{\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{د}}{\pi}}$ ومنها $\boxed{\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}}$ ، $\boxed{س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}}$

مثال ٢

[١] أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية القياس الدائرى للزاوية التى قياسها الستينى ٥ً ٣٢َ ٧٥°

[٢] أوجد القياس الستينى للزاوية التى قياسها الدائرى ٢,٣٨ ء

الحل

[١] ∵ $\theta^{ء} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$ ∴ $\theta^{ء} = ٥ً\ ٣٢َ\ ٧٥^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} \simeq ١,٣١٨^{ء}$

[٢] ∵ $س^{\circ} = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi}$ ∴ $س^{\circ} = ٢,٣٨^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} \simeq ٥٠ً\ ٢١َ\ ١٣٦^{\circ}$

حاول بنفسك

[١] حوِّل قياس الزاوية ٢,١ ء إلى قياس ستينى.

[٢] حوِّل قياس الزاوية ٣٠َ ٧٢° إلى قياس دائرى مقربًا إلى رقمين عشريين.

معلومة إثرائية

توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهى الجراد (Grade) وتساوى $\frac{١}{٢٠٠}$ من قياس الزاوية المستقيمة.

وعلى هذا فإنه : إذا كانت س ، θ ، ص هى قياسات ثلاث زوايا على التوالى بوحدات الدرجة ، والراديان ، والجراد

فإن : $\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{ء}}{\pi} = \frac{ص}{٢٠٠}$

ملاحظات

[١] إذا كان القياس الدائرى للزاوية يساوى π (راديان) فإن قياسها الستينى = $\pi \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} = ١٨٠^{\circ}$

أى أن π بالتقدير الدائرى تكافئ ١٨٠° بالتقدير الستينى

فمثلًا $\frac{٣}{٥}\pi$ تكافئ $\frac{٣}{٥} \times ١٨٠^{\circ} = ١٠٨^{\circ}$

[٢] إذا علم القياس الستينى لزاوية ما وطلب تحويله إلى القياس الدائرى بدلالة π

فإننا نستخدم العلاقة : $\theta^{ء} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}}$ ولا نعوض عن π

فمثلًا ١٨° تكافئ $١٨^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{١٠}$ ، ١٣٥° تكافئ $١٣٥^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{٣}{٤}\pi$

مثال ٣

عيِّن الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

١ $٢,٠٢^{د}$ ٢ $-٧,٣^{د}$ ٣ $\frac{٥}{٤}\pi$

الحل

لإيجاد الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة نوجد قياسها بالتقدير الستينى.

١ ∵ $\text{س}^\circ = \theta^{د} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} = ٢,٠٢^{د} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq ١١٥^\circ\ ٤٤'\ ١٥''$

∴ الزاوية التى قياسها $٢,٠٢^{د}$ تكافئ $١١٥^\circ\ ٤٤'\ ١٥''$ بالتقدير الستينى.

، ∵ الزاوية التى قياسها $١١٥^\circ\ ٤٤'\ ١٥''$ تقع فى الربع الثانى.

∴ الزاوية التى قياسها $٢,٠٢^{د}$ تقع فى الربع الثانى.

٢ ∵ $\text{س}^\circ = -٧,٣^{د} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} \simeq -٤١٨^\circ\ ١٥'\ ٣٣''$

، ∵ الزاوية التى قياسها $-٤١٨^\circ\ ١٥'\ ٣٣''$ تكافئ : $-٤١٨^\circ\ ١٥'\ ٣٣'' + ٢ \times ٣٦٠^\circ = ٣٠١^\circ\ ٤٤'\ ٢٧''$

∵ الزاوية التى قياسها $٣٠١^\circ\ ٤٤'\ ٢٧''$ تقع فى الربع الرابع.

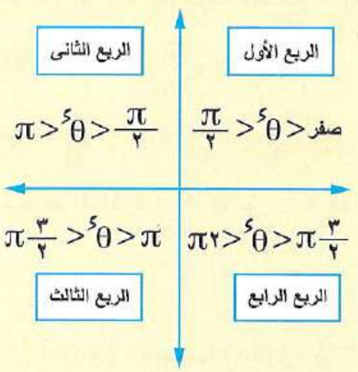
∴ الزاوية التى قياسها $-٧,٣^{د}$ تقع فى الربع الرابع.

٣ ∵ $\frac{٥}{٤}\pi$ تكافئ $\frac{٥}{٤} \times ١٨٠^\circ = ٢٢٥^\circ$ ، ∵ الزاوية التى قياسها ٢٢٥° تقع فى الربع الثالث.

∴ الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٤}\pi$ تقع فى الربع الثالث.

ملاحظة

يمكن تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية الموجهة المعلوم قياسها الدائرى بدلالة π دون التحويل إلى القياس الستينى بملاحظة الشكل المقابل :



فمثلًا باستخدام الشكل المقابل يمكن مباشرة أن نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٤}\pi$ فى المثال السابق

حيث إن $\pi < \frac{٥}{٤}\pi < \frac{٣}{٢}\pi$

∴ الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٤}\pi$ تقع فى الربع الثالث.

حاول بنفسك

أوجد الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الآتية :

١ الزاوية التى قياسها $\frac{٥}{٣}\pi$

٢ الزاوية التى قياسها $-٠,٣\,\pi$

٣ الزاوية التى قياسها $٥,٧^{د}$

٤ الزاوية التى قياسها $-٦,٤^{د}$

مثال ٤

أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية قياسها ١٧ً ٢٦َ ١٥٢° مرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٠,٥ سم مقربًا الناتج لأقرب سنتيمتر.

الحل

$\because \theta^{ء} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = ١٧'' \; ٢٦' \; ١٥٢^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} \simeq ٢,٦٦٠٥^{ء}$

$\therefore ل = \theta^{ء} \times \text{نق} = ٢,٦٦٠٥ \times ١٠,٥ \simeq ٢٨$ سم

مثال ٥

أوجد كلاً من القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ١٢,٦ سم من دائرة طول نصف قطرها ٧,٢ سم

الحل

$\theta^{ء} = \frac{ل}{\text{نق}} = \frac{١٢,٦}{٧,٢} = ١,٧٥^{ء}$ ، $س^{\circ} = ١,٧٥^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} \simeq ٣'' \; ٢٦' \; ١٠٠^{\circ}$

مثال ٦

أوجد محيط الدائرة التى بها زاوية محيطية قياسها ٣٠° يقابلها قوس طوله ٥ سم

الحل

$\because$ قياس الزاوية المحيطية = ٣٠°

$\therefore$ قياس الزاوية المركزية المناظرة لها = ٦٠°

$\therefore \theta^{ء} = ٦٠^{\circ} \times \frac{\pi}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore \text{نق} = \frac{ل}{\theta^{ء}} = ٥ \div \frac{\pi}{٣} = \frac{١٥}{\pi}$ سم

$\therefore$ محيط الدائرة $= ٢ \pi \, \text{نق} = ٢ \pi \times \frac{١٥}{\pi} = ٣٠$ سم

مثال ٧

زاويتان مجموع قياسيهما الدائرى $٣\frac{١}{٧}^{ء}$ والفرق بين قياسيهما الستينى ٣٠°

أوجد قياس كل منهما بالقياس الدائرى والقياس الستينى.

الحل

$\because ٣\frac{١}{٧}^{ء} = \frac{٢٢}{٧} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{\pi} = ١٨٠^{\circ}$

وبفرض أن الزاويتين هما أ ، ب حيث : ق(∠أ) > ق(∠ب)

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ ب) = ١٨٠°   ، ق(∠ أ) − ق(∠ ب) = ٣٠°

وبالجمع : ∴ ٢ ق(∠ أ) = ٢١٠°

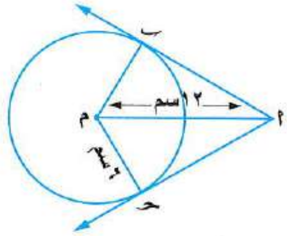
∴ ق(∠ أ) = ١٠٥° ومنها : ق(∠ ب) = ٧٥°

∴ ق(∠ أ) بالتقدير الدائرى = ١٠٥° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٨٣ ء

، ق(∠ ب) بالتقدير الدائرى = ٧٥° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ≃ ١,٣١ ء

مثال ٨

فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ مماسان للدائرة م التى طول نصف قطرها ٦ سم

فإذا كان : أ م = ١٢ سم

فأوجد طول القوس $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$ الأكبر لأقرب عدد صحيح.

الحل

∵ $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ مماس للدائرة م   ∴ $\overline{\text{م حـ}} \perp \overleftarrow{\text{أحـ}}$

فى Δ أ م حـ : ∵ ق(∠ أ حـ م) = ٩٠° ، م حـ = $\frac{1}{2}$ أ م

∴ ق(∠ حـ أ م) = ٣٠°   ∴ ق(∠ أ م حـ) = ٦٠°

، ∵ $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ينصف ∠ ب م حـ   ∴ ق(∠ ب م حـ) = ١٢٠°

∴ ق(∠ ب م حـ) المنعكسة = ٣٦٠° − ١٢٠° = ٢٤٠°

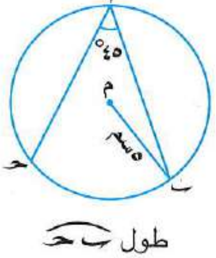
، ∵ θء = س° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ ∴ θء = ٢٤٠° × $\frac{\pi}{١٨٠°}$ = $\frac{٤}{٣}$ π

، ∵ ل = θء × نق   ∴ طول $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$ الأكبر = $\frac{٤}{٣}$ π × ٦ = ٨ π ≃ ٢٥ سم

حاول بنفسك

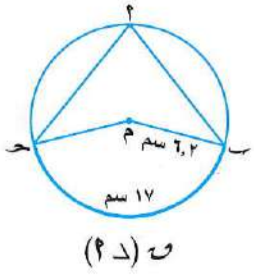
أوجد المطلوب أسفل كل شكل :

١



طول $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$

٢



ق(∠ أ)

تمـارين 8

على القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

• تذكر • فهـم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التى قياسها $\frac{٢٥\pi}{٩}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢) الزاوية التى قياسها $\frac{٣١\pi}{٦}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) الزاوية التى قياسها $\frac{-٩\pi}{٤}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) إذا كان القياس الستينى لزاوية ١٢َ ٤٣° فإن قياسها الدائرى يساوى ....

(أ) ٠,٢٤ ء (ب) $٠,٢٤\pi$ (جـ) ٠,٢٨ ء (د) $٠,٢٨\pi$

(٥) الزاوية التى قياسها الدائرى $\frac{٨\pi}{٣}$ قياسها الستينى يساوى ....

(أ) ٥٤٠° (ب) ٨٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٤٨٠°

(٦) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى يساوى ....

(أ) ٢π (ب) π (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) ٣π

(٧) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى ١٨٠° × (ن − ٢) حيث ن عدد الأضلاع فإن قياس زاوية الشكل الخماسى المنتظم بالقياس الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٧\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٥}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٨) طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° يساوى .... سم

(أ) ٥π (ب) ٤π (جـ) ٣π (د) ٢π

(٩) طول القوس الذى يقابل زاوية محيطية قياسها $٦٧\frac{١}{٢}$° فى دائرة طول نصف قطرها ٨ سم يساوى .... سم

(أ) ٣π (ب) ٦π (جـ) ١٠٨٠ (د) ١٢π

(١٠) القوس الذى طوله ٥π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(١١) قياس الزاوية المركزية المرسومة على القوس الذى طوله يساوى طول قطر الدائرة مقربًا لأقرب درجة يساوى ....

(أ) ١١٣° (ب) ١١٥° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

(١٢) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى فيه $\frac{\pi}{٣}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) $\frac{٥\pi}{١٢}$

(١٣) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{١}{١٠}\pi$ فإن طول قوسه ≃ .... سم

(أ) ٤,٦ (ب) ٤,٤ (جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

(١٤) أ ب جـ د شكل رباعى دائرى ، ق(∠أ) = ٦٠° فإن : ق(∠جـ) = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) $\frac{٥\pi}{٦}$

(١٥) القياس الدائرى للزاوية الخارجة عن الشكل السباعى المنتظم يساوى ....

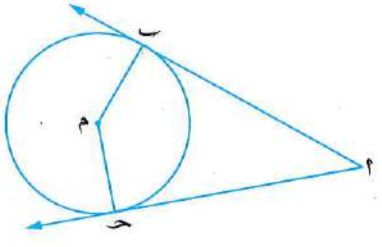
(أ) $\frac{١}{٧}\pi$ (ب) $\frac{٢}{٧}\pi$ (جـ) $\frac{٣}{٧}\pi$ (د) $\frac{٤}{٧}\pi$

(١٦) فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسين للدائرة م وكان

ق(∠أ) = $\frac{٥}{١٢}\pi$ وكان محيط الدائرة = ٩٦ سم

فإن طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{ب جـ}$ = ...



(أ) −٢ (ب) $\frac{٢٨}{\pi}$ (جـ) ٢٨ (د) ٢٠ π

(١٧) الزاوية التى قياسها ٣٠° + ١٨٠° (٢ ن + ١) حيث ن ∈ ص تكافئ زاوية قياسها الدائرى هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) π (جـ) $\frac{٧}{٦}\pi$ (د) $\frac{٥}{٣}\pi$

(١٨) إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{٣}{٨}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التى تقابل هذا القوس قياسها الستينى يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٧° ٣٠َ (جـ) ١٣٥° (د) ٤٣° تقريبًا.

(١٩) فى الدائرة التى طول نصف قطرها وحدة الأطوال يكون قياس أى زاوية مركزية فيها بالتقدير الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ طول قوسها. (ب) $\frac{١}{٢}$ طول قوسها.

(جـ) طول قوسها. (د) ضعف طول قوسها.

(٢٠) القياس الدائرى والقياس الستينى لزاوية مركزية تقابل قوسًا طوله ٣ سم فى دائرة مساحة سطحها ١٦ π سم² = ...

(أ) (١ء ، ١٨٠°)　　(ب) (١,٥ء ، ٨٦°)

(جـ) (١,٧٥ء ، ٩٠°)　　(د) (٠,٧٥ء ، ٥٨َ ٤٢°)

(٢١) الزاوية التى قياسها ١ء تسمى زاوية ....

(أ) ربعية.　　(ب) منفرجة.　　(جـ) مركزية.　　(د) نصف قطريه.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد بدلالة π القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها الستينية كالآتى :

(١) ١٣٥°　　(٢) ٩٠°　　(٣) 📖 ٣٠٠°　　(٤) -٢٣٥°

(٥) -٢١٠°　　(٦) ٣٠َ ١١٢°　　(٧) 📖 ٣٩٠°　　(٨) 📖 ٧٨٠°

٢ أوجد القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها الستينية كالآتى مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

(١) ٥٨°　　(٢) 📖 ٥٦,٦°　　(٣) ١٥َ ٣٧°

(٤) ٦ً ٣٨َ ١١٥°　　(٥) ٥٤ً ٢٥٧°　　(٦) 📖 ٤٨ً ٥٠َ ١٦٠°

٣ أوجد القياس الستينى (بالدرجات والدقائق والثوانى) لكل من الزوايا التى قياساتها الدائرية كالآتى :

(١) $\frac{١١}{١٥}$ π　　(٢) 📖 ٠,٧٢ π　　(٣) 📖 ٠,٤٩ء

(٤) -١,٦٧ء　　(٥) 📖 ٢,٢٧ء　　(٦) 📖 -$\frac{١}{٢}$٣ء

٤ أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى للزاوية المركزية التى تحصر قوسًا طوله (ل) فى دائرة طول نصف قطرها (نق) فى كل من الحالات الآتية :

(١) ل = ١٢ سم ، نق = ١٠ سم　　(٢) ل = ١٤ سم ، نق = ٧ سم

(٣) ل = ٢ π سم ، نق = ٦ سم　　(٤) ل = ١٥,٧٢ سم ، نق = ٩,١٧ سم

٥ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (θ) وطول القوس المحصور (ل) فى كل من الحالات الآتية :

(١) θ = $\frac{٩}{٨}$ π ، ل = ٢٢,٥ سم　　(٢) θ = ٠,٧٦٧ء ، ل = ٣٨,٣٥ سم

(٣) θ = ١٣٩° ، ل = ٢٤,٣٢٥ سم　　(٤) θ = ٢٦ً ٣٦َ ٧٨° ، ل = ٤٣,٩٢ سم

٦ أوجد لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :

(١) نق = ١٢,٥ سم ، θ = ١,٦ء　　(٢) نق = ٢٠ سم ، θ = ٢,٤٣ء

(٣) نق = ٧,٥ سم ، θ = ٤٠َ ٦٧°　　(٤) نق = ١٥ سم ، θ = ٦ً ٥٨َ ١٠٤°

٧ أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢ سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥° «٤٨ سم»

---

٨ أوجد القياس الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ أمثال طول نصف قطر دائرتها.
«٣ء ، ١٧١° ٥٣َ ١٤ً»

---

٩ إذا كان قياس زاوية مركزية فى دائرة يساوى ١٠٥° وتحصر قوسًا طوله $\frac{٧}{٣}\pi$ سم أوجد طول قطر الدائرة.
«٨ سم»

---

١٠ مثلث قياس إحدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى منه يساوى $\frac{\pi}{٤}$
أوجد القياس الدائرى والقياس الستينى لزاويته الثالثة. «$\frac{٥}{١٢}\pi$ ، ٧٥°»

---

١١ شكل رباعى قياس إحدى زواياه $(\frac{١١}{٦})^{ء}$ وقياس زاوية أخرى منه $(٢\frac{٤}{٩})^{ء}$ وقياس زاوية ثالثة منه ٤٥°
أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى لزاويته الرابعة. $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$ «٧٠° ، $(\frac{١١}{٩})^{ء}$»

---

١٢ زاويتان مجموع قياسيهما ٧٠° والفرق بينهما $\frac{\pi}{٥}$ أوجد قياسيهما بالتقدير الستينى والدائرى.
«٥٣° ، ١٧° ، $\frac{٥٧}{١٨٠}\pi$ ، $\frac{١٧}{١٨٠}\pi$»

---

١٣ زاويتان متكاملتان الفرق بين قياسيهما $\frac{\pi}{٣}$ أوجد قياسى الزاويتين بالتقديرين الستينى والدائرى.
«١٢٠° ، ٦٠° ، $\frac{٢}{٣}\pi$ ، $\frac{١}{٣}\pi$»

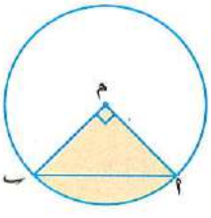
---

١٤ فى الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية

فى م تساوى ٣٢ سم²

فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.



«٢٨,٥٧ سم»

---

١٥ $\overline{\text{س ص}}$ قطر فى الدائرة م طوله ١٨ سم ، رسم الوتر $\overline{\text{ص ع}}$ بحيث ق(∠س ص ع) = ١٠°
أوجد طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{س ع}}$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين. «٣,١٤ سم»

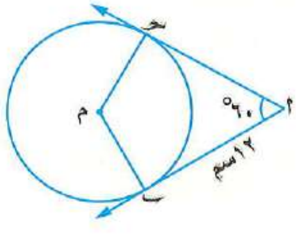
---

١٦ فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ مماسان للدائرة م

، ق(∠حـ أ ب) = ٦٠° ، أ ب = ١٢ سم

أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$



«٢٩ سم»

١٧ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ مرسوم داخل دائرة فإذا كان أ ب = ٢٤ سم ، ب حـ = ١٢ سم فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التى تنقسم إليها الدائرة برءوس هذا المثلث مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

«١٢,٦ سم ، ٢٥,١ سم ، ٣٧,٧ سم»

---

١٨ دائرة طول نصف قطرها ٧,٥ سم تمر برءوس مثلث أ ب حـ فإذا كان :

ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠° ، ق (∠ أ ب حـ) = ٥٤°

فأوجد أطوال الأقواس الثلاثة التى تنقسم إليها الدائرة برءوس هذا المثلث.

«١٥,٧ سم ، ١٤,١ سم ، ١٧,٣ سم»

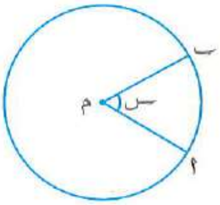
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا قطع القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٧٢° فى دائرة طول نصف قطرها ١٤ سم وثنى ليكون دائرة فإن طول نصف قطر الدائرة الناتجة يساوى .... سم

(أ) ١,٤ (ب) ٢,٨ (جـ) ٥,٦ (د) ٧

(٢) فى الشكل المقابل :



دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ١٠ سم

فإذا كان طول $\overset{\frown}{أ ب}$ ∈]٥ ، ٦[

فإن قيمة س يمكن أن تكون ....

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٢٨° (د) ٣٤°

(٣) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعى كنسبة ٥ : ٤ : ٩ : ٦ فإن قياس أصغر زواياه يساوى .... ء

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٤) القياس الموجب للزاوية التى يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية ونصف تمامًا يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٥) إذا كان طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٦٠° فى دائرة يساوى طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٨٠° فى دائرة أخرى فإن النسبة بين طولى نصفى قطرى الدائرتين هى ....

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{٩}{١٦}$

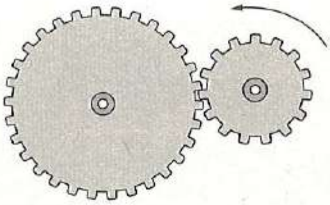
(٦) (قياس الدائرة)^{ء} > ن حيث ن عدد صحيح موجب فإن أكبر قيمة لـ ن هى ....

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

(٧) المسافة التى يقطعها رأس عقرب الدقائق الذى طوله ٨ سم من الساعة السادسة صباحًا حتى الساعة الثالثة والربع عصرًا تساوى .... سم

(أ) ٥٩٢ π (ب) ١٤٨ π (جـ) $\frac{٣٧}{٢}\pi$ (د) $\frac{٣٧}{٤}\pi$

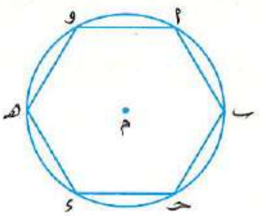
(٨) فى الشكل المقابل :



إذا دار الترس الأكبر لفة واحدة فإن الترس الأصغر يدور ثلاث لفات فإذا دار الترس الأصغر لفة واحدة فى الاتجاه الموضح بالسهم فإن قياس الزاوية المركزية لدوران الترس الأكبر يصبح ....

(أ) $\frac{-\pi}{٢}$ (ب) $\frac{-٢\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٢\pi}{٣}$ (د) ٢ π

(٩) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٤ سم مرسوم داخل دائرة م فإن طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = ... سم

(أ) π (ب) $\frac{٤}{٣}\pi$

(جـ) ٢ π (د) $\frac{٥}{٣}\pi$

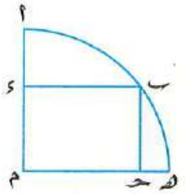
---

٢ مستقيم يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ فى الوضع القياسى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

«ص = $\sqrt{٣}$ س»

---

٣ فى الشكل المقابل :



ربع دائرة ، رسم بداخله المستطيل ب حـ م ء بحيث حـ ء = ١٠ سم

أوجد : طول القوس $\overset{\frown}{أ ب هـ}$

«٥ π سم»

الدرس

3

الـــدوال المثلثيـــة

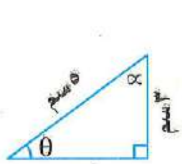
* درسنا فيما سبق النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة وعلمنا أنه :

• **فى أى مثلث قائم الزاوية يكون :**

$$\text{جا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \text{جتا}\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

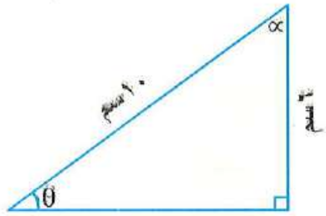
$$، \quad \text{طا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

• **ففى الشكل المقابل :**



$\text{جا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$	$\text{جتا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$	$\text{طا}\,\theta = \frac{٣}{٤}$
$\text{جا}\,\alpha = \frac{٤}{٥}$	$\text{جتا}\,\alpha = \frac{٣}{٥}$	$\text{طا}\,\alpha = \frac{٤}{٣}$

• **وإذا رسمنا مثلثًا آخر مشابهًا للمثلث السابق نجد أن :**



$\text{جا}\,\theta = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$	$\text{جتا}\,\theta = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$	$\text{طا}\,\theta = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$
$\text{جا}\,\alpha = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$	$\text{جتا}\,\alpha = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$	$\text{طا}\,\alpha = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

مما سبق نستنتج أن :

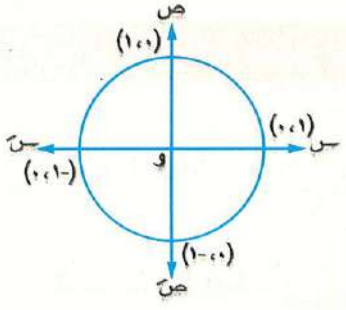
١ $\text{جا}\,\theta$ ، $\text{جتا}\,\theta$ ، $\text{طا}\,\theta$ فى المثلثين متساويين.

أى أن النسبة المثلثية للزاوية ثابتة لا تتوقف على مساحة المثلث.

٢ $\text{جا}\,\theta \neq \text{جا}\,\alpha$ ، $\text{جتا}\,\theta \neq \text{جتا}\,\alpha$ ، $\text{طا}\,\theta \neq \text{طا}\,\alpha$ فى أى من المثلثين.

أى أن النسبة المثلثية تتغير بتغير قياس الزاوية وهذا ما يُعرف بـ «الدوال المثلثية».

دائرة الوحدة



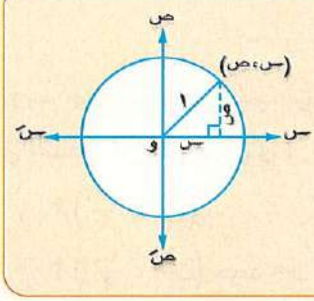
في النظام الإحداثي المتعامد الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (و)

وطول نصف قطرها وحدة الأطوال تُسمى **دائرة الوحدة**.

ولاحظ من الشكل المقابل أن :

- دائرة الوحدة تقطع محور السينات في نقطتين هما : (١ ، ٠) ، (-١ ، ٠)
- دائرة الوحدة تقطع محور الصادات في نقطتين هما : (٠ ، ١) ، (٠ ، -١)

ملاحظة

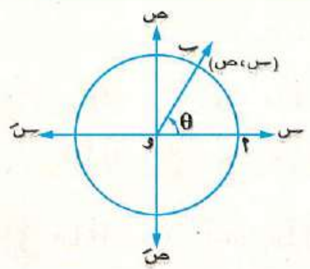


إذا كانت النقطة (س ، ص) ∈ دائرة الوحدة فإن :

$\boxed{\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1}$ من نظرية فيثاغورث

، س ∈ [-١ ، ١] ، ص ∈ [-١ ، ١]

الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها



إذا رسمنا الزاوية الموجهة ∠ أ و ب في وضعها القياسي وقطع ضلعها النهائي $\overrightarrow{\text{و ب}}$ دائرة الوحدة في النقطة ب (س ، ص) ، وكان ق (∠ أ و ب) = θ فإن :

أولًا الدوال المثلثية الأساسية للزاوية التي قياسها θ

١ جيب تمام الزاوية = الإحداثي السيني لنقطة ب **أي أن** $\boxed{\text{جتا } \theta = \text{س}}$

٢ جيب الزاوية = الإحداثي الصادي لنقطة ب **أي أن** $\boxed{\text{جا } \theta = \text{ص}}$

٣ ظل الزاوية = $\dfrac{\text{الإحداثي الصادي لنقطة ب}}{\text{الإحداثي السيني لنقطة ب}}$ **أي أن** $\boxed{\text{ظا } \theta = \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}}$ حيث س ≠ ٠

لاحظ أنه

يمكن كتابة النقطة ب (س ، ص) على الصورة (جتا θ ، جا θ)

ثانيًا مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية للزاوية التى قياسها θ

١ قاطع الزاوية = $\frac{١}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$ أى أن $\boxed{\text{قا}\,\theta = \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}}$ حيث س ≠ ٠

٢ قاطع تمام الزاوية = $\frac{١}{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}$ أى أن $\boxed{\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ص}} = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}}$ حيث ص ≠ ٠

٣ ظل تمام الزاوية = $\frac{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}$ أى أن $\boxed{\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}}$ حيث ص ≠ ٠

مثال ١

أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة أ فى كل مما يأتى :

١ أ $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$

٢ أ $(-١ ، ٠)$

٣ أ $\left(\frac{-١}{٢} ، \text{ص}\right)$ حيث ص > ٠

٤ أ $(-\text{س} ، \text{س})$ حيث س > ٠

الحل

١ $\text{جتا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{٤}{٥} \div \frac{٣}{٥} = \frac{٤}{٣}$

، $\text{قا}\,\theta = \frac{٥}{٣}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{٥}{٤}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{٣}{٤}$

٢ $\text{جتا}\,\theta = -١$ ، $\text{جا}\,\theta = ٠$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{٠}{-١} = ٠$

، $\text{قا}\,\theta = -١$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{١}{٠}$ (غير معرف) ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{-١}{٠}$ (غير معرف)

٣ $\because \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ $\therefore \left(\frac{-١}{٢}\right)^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ $\therefore \text{ص}^٢ = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore \text{ص} = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\because \text{ص} > ٠$ $\therefore \text{ص} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore$ أ $\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{-١}{٢}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \div \frac{-١}{٢} = -\sqrt{٣}$

، $\text{قا}\,\theta = -٢$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

٤ $\because \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ $\therefore (-\text{س})^٢ + \text{س}^٢ = ١$ $\therefore ٢\,\text{س}^٢ = ١$ $\therefore \text{س}^٢ = \frac{١}{٢}$

$\therefore \text{س} = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\because \text{س} > ٠$ $\therefore \text{س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\therefore$ أ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\text{ظا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}} \div \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -١$

، $\text{قا}\,\theta = -\sqrt{٢}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \sqrt{٢}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = -١$

حاول بنفسك

أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى ، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب إذا كان :

١ ب $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ٢ ب (٠ ، −س) ، س < ٠   ٣ ب (− ص ، − ص) ، ص > ٠

ملاحظة

الزوايا المتكافئة تكون لها نفس الدوال المثلثية.

أى أنه لجميع قيم ن ∈ ص (مجموعة الأعداد الصحيحة) يكون :

- حتا (θ + ٢ ن π) = حتا θ = س ، قا (θ + ٢ ن π) = قا θ = $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠
- حا (θ + ٢ ن π) = حا θ = ص ، قتا (θ + ٢ ن π) = قتا θ = $\frac{١}{ص}$ حيث ص ≠ ٠
- ظا (θ + ٢ ن π) = ظا θ = $\frac{ص}{س}$ حيث س ≠ ٠ ، ظتا (θ + ٢ ن π) = ظتا θ = $\frac{س}{ص}$ حيث ص ≠ ٠

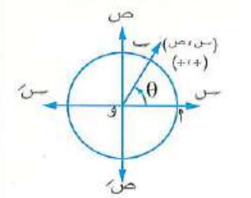
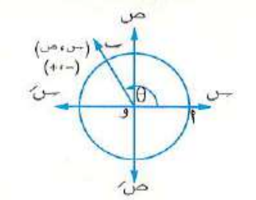
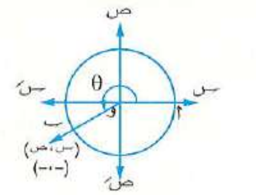
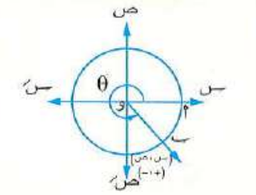
فمثلًا • حتا ٤٢٠° = حتا (٦٠° + ٣٦٠°) = حتا ٦٠°   • قا ٨٤٠° = قا (١٢٠° + ٢ × ٣٦٠°) = قا ١٢٠°

• ظا (−١٥٠٠°) = ظا (٣٠٠° − ٥ × ٣٦٠°) = ظا ٣٠٠°

إشارات الدوال المثلثية

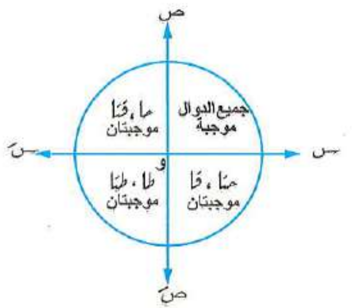
إذا كانت : ∠ أ و ب الموجهة فى وضعها القياسى ، ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص)
وكان ق (∠ أ و ب) = θ فإن :

∠ أ و ب تقع فى أحد الأرباع كما يلى

الربع الأول	الربع الثانى	الربع الثالث	الربع الرابع
			
θ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [	θ ∈] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [	θ ∈] π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ [	θ ∈] $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π [
س > ٠ ، ص > ٠ جميع الدوال المثلثية موجبة.	س < ٠ ، ص > ٠ حا θ ، قتا θ موجبتان وباقى الدوال سالبة.	س < ٠ ، ص < ٠ ظا θ ، ظتا θ موجبتان وباقى الدوال سالبة.	س > ٠ ، ص < ٠ حتا θ ، قا θ موجبتان وباقى الدوال سالبة.

• ونلخص ما سبق فى الجدول والشكل الآتيين :

الربع	الفترة التى تنتمى إليها θ	إشارة حتا ، قا	إشارة حا ، قتا	إشارة طا ، طتا
الأول	$]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$	+	+	+
الثانى	$]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$	−	+	−
الثالث	$]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$	−	−	+
الرابع	$]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$	+	−	−



فمثلاً • طا ٣٢٠° تكون سالبة لأن :

الزاوية التى قياسها ٣٢٠° تقع فى الربع الرابع ⟵ $\boxed{٢٧٠° < ٣٢٠° < ٣٦٠°}$

• حا ١٦٠° تكون موجبة لأن :

الزاوية التى قياسها ١٦٠° تقع فى الربع الثانى ⟵ $\boxed{٩٠° < ١٦٠° < ١٨٠°}$

ملاحظة

الدوال المثلثية للزوايا المتكافئة لها نفس الإشارة.

مثال ٢

ابحث إشارة كل من النسب المثلثية الآتية :

١ حا ٩٧٠° ٢ حتا $\frac{٧\pi}{٣}$ ٣ طا (−٢٠٠°) ٤ قتا $(-\frac{٨}{٥}\pi)$

الحل

١ حا ٩٧٠° = حا (٢٥٠° + ٢ × ٣٦٠°) = حا ٢٥٠° ، ∵ ١٨٠° < ٢٥٠° < ٢٧٠° أى تقع فى الربع الثالث.

∴ حا ٢٥٠° سالبة. ∴ حا ٩٧٠° سالبة.

٢ حتا $\frac{٧}{٣}\pi$ = حتا $(\frac{٧}{٣} \times ١٨٠°)$ = حتا ٤٢٠° = حتا (٦٠° + ٣٦٠°) = حتا ٦٠°

، ∵ ٠° < ٦٠° < ٩٠° أى تقع فى الربع الأول.

∴ حتا ٦٠° موجبة. ∴ حتا $\frac{٧}{٣}\pi$ موجبة.

٣ طا (−٢٠٠°) = طا (−٢٠٠° + ٣٦٠°) = طا ١٦٠° ، ∵ ٩٠° < ١٦٠° < ١٨٠° أى تقع فى الربع الثانى.

∴ طا ١٦٠° سالبة. ∴ طا (−٢٠٠°) سالبة.

٤ قتا $(-\frac{٨}{٥}\pi)$ = قتا $(-\frac{٨}{٥} \times ١٨٠°)$ = قتا (−٢٨٨°) = قتا (−٢٨٨° + ٣٦٠°) = قتا ٧٢°

، ∵ ٠° < ٧٢° < ٩٠° أى تقع فى الربع الأول.

∴ قتا ٧٢° موجبة. ∴ قتا $(-\frac{٨}{٥}\pi)$ موجبة.

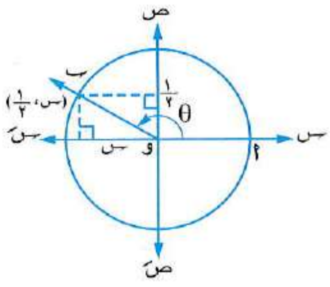
حاول بنفسك

عيِّن إشارة كل من النسب المثلثية الآتية : [1] جا 620° [2] قا (-30°) [3] ظا $\frac{11}{3}\pi$

مثال ٣

إذا كانت ب $\left(س ، \frac{1}{2}\right)$ نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ فى وضعها القياسى مع دائرة الوحدة حيث $90^\circ < \theta < 180^\circ$ **فأوجد قيمة كل من :** جا θ ، ظا θ

الحل



$\because 90^\circ < \theta < 180^\circ$ $\therefore$ ب تقع فى الربع الثانى.

، $\because$ لأى نقطة (س ، ص) على دائرة الوحدة يكون $س^2 + ص^2 = 1$

$\therefore س^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ $\therefore س^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\therefore س = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

، $\because$ النقطة ب $\left(س ، \frac{1}{2}\right)$ فى الربع الثانى. $\therefore$ س سالبة.

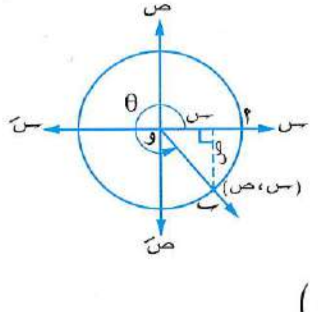
$\therefore س = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore ب = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ جا $\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ، ظا $\theta = \frac{ص}{س} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

مثال ٤

إذا كانت : $\theta \in \left]\frac{3\pi}{2} ، 2\pi\right[$ وكانت : جتا $\theta = \frac{5}{13}$ **فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ**

الحل



نفرض أن ق (∠ أ و ب) = θ حيث θ فى الربع الرابع

وأن نقطة ب هى (س ، ص)

$\therefore$ س = جتا $\theta = \frac{5}{13}$ ، ص = جا θ حيث جا $\theta < 0$

، $\because س^2 + ص^2 = 1$ $\therefore \left(\frac{5}{13}\right)^2 +$ جا$^2 \theta = 1$

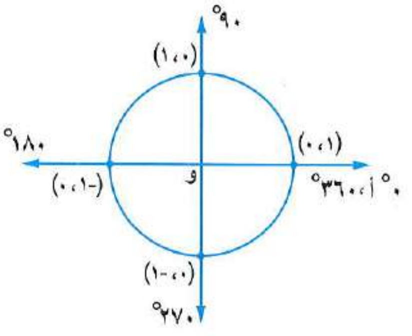
$\therefore$ جا$^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ $\therefore$ جا $\theta = -\frac{12}{13}$ $\therefore ب = \left(\frac{5}{13} ، \frac{-12}{13}\right)$

ويكون : ظا $\theta = -\frac{12}{5}$ ، قا $\theta = \frac{13}{5}$ ، قتا $\theta = -\frac{13}{12}$ ، ظتا $\theta = -\frac{5}{12}$

حاول بنفسك

إذا كانت : $180^\circ < \theta < 270^\circ$ وكانت : جا $\theta = \frac{-4}{5}$ **فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التى قياسها θ**

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



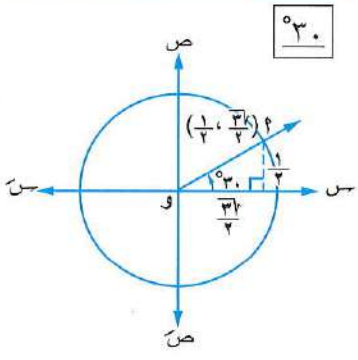
أولًا الزوايا الربعية (°٠ أو °٣٦٠ ، °٩٠ ، °١٨٠ ، °٢٧٠)

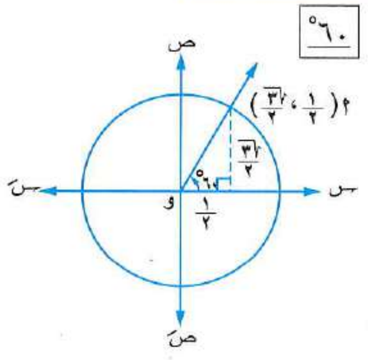
الشكل المقابل يوضح نقط تقاطع الضلع النهائى للزوايا الربعية مع دائرة الوحدة ومنه يمكن استنتاج النسب المثلثية لتلك الزوايا

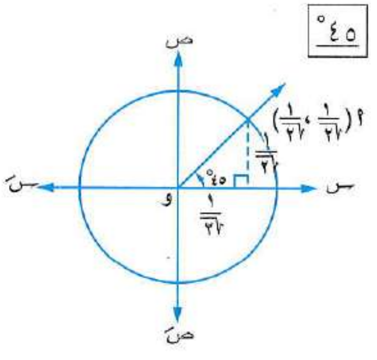
كما هو موضح بالجدول التالى :

θ بالقياس الستينى	θ بالقياس الدائرى	حا θ	حتا θ	ظا θ	قتا θ	قا θ	ظتا θ
°٠ أو °٣٦٠	٠ أو ٢π	٠	١	٠	غير معرف	١	غير معرف
°٩٠	$\frac{\pi}{٢}$	١	٠	غير معرف	١	غير معرف	٠
°١٨٠	π	٠	١-	٠	غير معرف	١-	غير معرف
°٢٧٠	$\frac{٣\pi}{٢}$	١-	٠	غير معرف	١-	غير معرف	٠

ثانيًا الزوايا التى قياساتها (°٣٠ ، °٦٠ ، °٤٥)







الأشكال السابقة توضح نقط تقاطع الضلع النهائى للزوايا التى قياساتها °٣٠ ، °٦٠ ، °٤٥ فى وضعها القياسى مع دائرة الوحدة ومنها يمكن استنتاج النسب المثلثية لتلك الزوايا **كما هو موضح بالجدول التالى :**

θ بالقياس الستينى	θ بالقياس الدائرى	حا θ	حتا θ	ظا θ	قتا θ	قا θ	ظتا θ
°٣٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	٢	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$
°٦٠	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$	$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$	٢	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
°٤٥	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١	$\sqrt{٢}$	$\sqrt{٢}$	١

مثال ٥

أوجد قيمة : ٤ حا ٣٠° حا ٩٠° − حتا ٠° قا ٦٠° + ٥ طا ٤٥° + ١٠ حتا² ٤٥° حا ٢٧٠° − طا ٣٠° حا ١٨٠°

الحل

المقدار = ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ١ − ١ × ٢ + ٥ × ١ + ١٠ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ × (−١) − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × صفر = صفر

مثال ٦

أثبت أن : حا² ٦٠° + حا² ٤٥° + حا² ٣٠° = حتا² $\frac{\pi}{٦}$ حا $\frac{\pi}{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ طا² $\frac{\pi}{٣}$ حتا π + حتا² $\frac{\pi}{٣}$ حا $\frac{٣\pi}{٢}$

الحل

الطرف الأيمن = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{٣}{٢}$

الطرف الأيسر = حتا² ٣٠° حا ٩٠° − $\frac{١}{٣}$ طا² ٦٠° حتا ١٨٠° + حتا² ٦٠° حا ٢٧٠°

$= \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} \times ١ - \frac{١}{٣} \times \left(\sqrt{٣}\right)^{٢} \times (-١) + \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times (-١) = \frac{٣}{٢}$

∴ الطرفان متساويان.

مثال ٧

أوجد قيمة س التى تحقق : س حا $\frac{\pi}{٦}$ حتا² $\frac{\pi}{٤}$ = حتا² ٣٠° حا $\frac{\pi}{٢}$

الحل

∵ س حا ٣٠° حتا² ٤٥° = حتا² ٣٠° حا ٩٠°

∴ س × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ × ١

∴ $\frac{١}{٤}$ س = $\frac{٣}{٤}$

∴ س = ٣

مثال ٨

إذا كانت : ٠° < س < ٩٠° **فأوجد قيمة س التى تحقق :** حا س قا² ٤٥° = طا² ٦٠° − ٢ حتا ٣٦٠°

الحل

∵ حا س قا² ٤٥° = طا² ٦٠° − ٢ حتا ٣٦٠°

∴ حا س × $\left(\sqrt{٢}\right)^{٢}$ = $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ − ٢ × ١

∴ ٢ × حا س = ١

∴ حا س = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ٣٠°

حاول بنفسك

إذا كانت : ٠° ≤ س ≤ ٩٠° **فأوجد قيمة س التى تحقق أن :** حتا س = حا ٣٠° حتا ٦٠° + حتا ٣٠° حا ٦٠°

تمارين 9 على الدوال المثلثية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : θ قياس زاوية فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

فإن : حا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(٢) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ ومرسومة فى وضع قياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة

ب $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ فإن : ظتا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{-٥}{٣}$ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) −٠,٧٥

(٣) إذا كانت : θ زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى $\left(\frac{-٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$

فإن : حتا θ − حا θ = ...

(أ) $\frac{١٧}{١٣}$ (ب) $\frac{٧}{١٣}$ (جـ) $-\frac{٧}{١٣}$ (د) $\frac{-١٧}{١٣}$

(٤) زاوية موجهة فى وضعها القياسى يمر ضلعها النهائى بالنقطة (٣ ، ٤)

فإن ضلعها الابتدائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ....

(أ) (٣ ، ٠) (ب) (١ ، ٠) (جـ) (٠,٦ ، ٠,٨) (د) $\left(\frac{٤}{٣} ، \frac{٥}{٣}\right)$

(٥) إذا كان : ظا θ = $\frac{١}{٢}$ حيث θ زاوية حادة فى وضعها القياسى فإن ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (١ ، ٢)

(جـ) $\left(\frac{١}{\sqrt{٥}} ، \frac{٢}{\sqrt{٥}}\right)$ (د) $\left(\frac{٢}{\sqrt{٥}} ، \frac{١}{\sqrt{٥}}\right)$

(٦) إذا كان : حا θ = −١ ، حتا θ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) ٢π

(٧) إذا كانت : قتا θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : θ = ...

(أ) °١٥ (ب) °٣٠ (جـ) °٤٥ (د) °٦٠

(٨) إذا كان : حتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، حا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٥\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١١\pi}{٦}$

(٩) إذا كانت : حتا $\theta = \frac{١}{٢}$ ، حا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (د) $-\sqrt{٣}$

(١٠) إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجهة فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

فإن قياس هذه الزاوية = ...°

(أ) ١٥٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ٢١٠

(١١) إذا كان : حتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : حا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١٢) إذا كانت : حتا θ > ٠ ، حا θ < ٠ فإن : θ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٣) إذا كان : حا $\theta = \frac{-١}{٢}$ ، قا $\theta = \frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ فإن : θ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٤) إذا كانت θ قياس زاوية تقع فى الربع الثالث فأى مما يأتى صحيح دائمًا ؟

(أ) حا θ حتا θ > ٠ (ب) قا θ قتا θ > ٠

(جـ) طا θ ظتا θ > ٠ (د) حا θ طا θ > ٠

(١٥) ٢ حا ٤٥° = ...

(أ) حا ٩٠° (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ٢

(١٦) طا^{٢} ٣٠° − قا^{٢} ٦٠° + قتا^{٢} ٤٥° = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢

(١٧) حا $\left(-\frac{١٢}{٥}\pi\right)$ = ...

(أ) حا $\frac{١٢}{٥}\pi$ (ب) حا ٧٢° (جـ) حا ٢٨٨° (د) حا $\frac{١}{٥}\pi$

(١٨) حتا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ − حا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = ...

(أ) حتا^{٢} π (ب) حا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) حتا π (د) حتا $\frac{\pi}{٢}$

(١٩) جتا $\frac{\pi}{٢}$ جتا ٠ + جا $\frac{٣\pi}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢

(٢٠) جا ٠° + جا ٩٠° + جا ١٨٠° + جا ٢٧٠° = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) صفر

(٢١) ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° ظتا ٤٥° = ...

(أ) جتا ٦٠° (ب) ٢ جتا ٣٠° (جـ) ٢ جا $\frac{\pi}{٦}$ (د) ظا π

(٢٢) $\frac{\text{ظا}^٢ ٦٠° - \text{ظا}^٢ ٤٥°}{\text{قا}^٢ ٣٠° - \text{قتا}^٢ ٤٥°}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) −٢ (د) −٣

(٢٣) إذا كان : أ ب حـ ء مربع فإن : جا^٢ (∠ أ حـ ء) + جا^٢ (∠ أ ب ء) + ظا (∠ أ ء ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١ + $\sqrt{٢}$

(٢٤) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : ق (∠ أ) = ١٢٠° فإن : جا ب + جتا^٢ حـ = ...

(أ) ١ + $\sqrt{٣}$ (ب) ١ $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ $\frac{٢}{٣}$ (د) ١ $\frac{١}{٤}$

(٢٥) إذا كان : أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ حـ)

فإن : قا أ + قتا حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٦) إذا كانت : $\theta \in$] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [، جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ فإن : قتا θ جا θ − ظا θ قتا θ جتا θ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −$\frac{٣}{٢}$ (د) −$\frac{٢}{٣}$

(٢٧) إذا كان : جا θ = $\frac{-٢٤}{٢٥}$ ، $\theta \in$] $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π [فإن : $\frac{\text{جا } \theta + \text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta}$ = ...

(أ) $\frac{١٧}{٢٤}$ (ب) $\frac{-١٧}{٢٤}$ (جـ) $\frac{٢٤}{١٧}$ (د) $\frac{-٢٤}{١٧}$

(٢٨) إذا كانت : س $\in$ [٠° ، ٩٠°] وكان جتا س = $\frac{\text{جا } ٦٠°}{\text{جا } ٩٠°} - \frac{\text{جا } ٠°}{\text{جا } ٤٥°}$ فإن : س = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٠° (د) ٩٠°

(٢٩) إذا كانت : $\theta \in$] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [، جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ فإن : $\sqrt{\text{قتا } \theta \text{ جا } \theta - \text{ظا } \theta \text{ ظتا } \theta + \text{جتا}^٢ \theta}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{١٥}{٢٦}$

(٣٠) إذا كان الضلع النهائى لزاوية فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى نقطة أ فى الربع الرابع حيث الإحداثى السينى للنقطة أ يساوى $\frac{٥}{١٣}$ فإن : أ = ...

(أ) $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$ (ب) $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{١}{١٣}\right)$ (جـ) $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$ (د) $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{-٨}{١٣}\right)$

(٣١) إذا كان : θ قياس زاوية فى الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{1}{2} ، ص\right)$ حيث ص > ٠ فإن : حا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\sqrt{3}$ (جـ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٣٢) إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجهة فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى (− س ، س) حيث س < ٠ فإن جيب هذه الزاوية = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (د) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

(٣٣) الضلع النهائى للزاوية التى قياسها 30° فى وضعها القياسى يقطع الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٦ سم فى النقطة ....

(أ) (٣ ، ٦) (ب) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ (جـ) $(3 ، 3\sqrt{3})$ (د) $(3\sqrt{3} ، 3)$

(٣٤) جيب الزاوية الموجهة θ التى فى الوضع القياسى يقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة (١ ، ٠) يساوى جيب تمام الزاوية الموجهة α فى الوضع القياسى والتى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ....

(أ) $\left(\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (ب) (−١ ، ٠)

(جـ) (٠ ، −١) (د) $\left(س ، -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(٣٥) جيب الزاوية الربعية ....

(أ) يساوى صفر. (ب) $\in]-1 ، 1[$

(جـ) $\in \{0 ، 1 ، -1\}$ (د) أكبر من أو يساوى صفر.

(٣٦) النسب المثلثية الآتية كلها لنفس الزاوية التى قياسها θ وتقع فى الربع الثالث ما عدا ....

(أ) حا $\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$ (ب) قا $\theta = -\sqrt{10}$ (جـ) ظا $\theta = \frac{1}{3}$ (د) ظتا $\theta = 3$

(٣٧) إذا كان : حا س + حتا ص = ٢ ، س ، ص $\in [0 ، 2\pi[$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) π

(٣٨) إذا كان المستقيم الذى معادلته : ص = $\frac{3}{4}$ س + ١ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها θ فإن : حا θ = ...

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (جـ) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{4}{3}$

(٣٩) إذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أء} \perp \overline{ب جـ}$ ، أء = ٦ سم ، وكان : ظا ب + ظا جـ = $\frac{5}{2}$ فإن : ب جـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٣,٦ (د) ١٥

(٤٠) إذا كان هـ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى لها ، ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص) حيث س < صفر ، طا هـ = $-\frac{٣}{٤}$ فإن : س + ص = ...

(أ) $-\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) صفر (د) ١

(٤١) إشارة الدالة د : د (س) = قا س تكون .... فى]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، .... فى]$\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π[

(أ) موجبة ، موجبة (ب) سالبة ، سالبة

(جـ) سالبة ، موجبة (د) موجبة ، سالبة

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ ابحث إشارات النسب المثلثية الآتية :

(١) جتا ٣٥٠° (٢) قا ٢٦٥° (٣) جا $\frac{٥\pi}{٤}$ (٤) قتا $\frac{٣\pi}{٧}$

(٥) طا ٤١٠° (٦) جتا (−١٦٥°) (٧) ظتا $\frac{٣٢\pi}{٣}$ (٨) قا $\left(-\frac{٢٥\pi}{٦}\right)$

٢ أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها θ مرسومة فى الوضع القياسى ، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة :

(١) $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)$ (٢) $\left(-\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥}\right)$ (٣) (٠ ، −١)

٣ إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ، ب نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ فى كل من الحالات الآتية :

(١) ب (٠,٦ ، ص) ، ص > ٠

(٢) ب (س ، −٠,٦) ، س > ٠

(٣) ب $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، ص\right)$ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠°

(٤) ب $\left(س ، \frac{\sqrt{٥}}{٣}\right)$ ، س < ٠

(٥) ب (−١ ، ص)

(٦) ب (−س ، س) ، س > ٠

(٧) ب (−س ، −س) ، س > ٠

(٨) ب (٩ أ ، ١٢ أ) حيث ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

(٩) ب $\left(\frac{٣}{٢} أ ، -٢ أ\right)$ حيث $\frac{٣\pi}{٢}$ < θ < ٢π

٤ أوجد قيمة كل من :

(١) طا ٠° + طا ٤٥° + طا ١٨٠°

(٢) جا ١٨٠° جتا ٤٥° − جتا ١٨٠° جا ٤٥°

(٣) قا $\frac{\pi}{٦}$ طا $\frac{\pi}{٣}$ − ظتا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$

(٤) $\frac{\text{٤ جا}^{٢}\text{ ٣٠° − ٣ طا ٤٥° جتا ٠°}}{\text{٢ جتا ٦٠° + ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥°}}$

(٥) ٣ جا ٣٠° جا² ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا² ٤٥°

٥ أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

(١) 📖 $٢\,\text{جا}^٢\,٩٠^\circ = -٢\,\text{جتا}\,١٨٠^\circ$

(٢) $٣\,\text{جتا}\,٣٠^\circ\,\text{ظا}\,٦٠^\circ - ٢\,\text{قا}\,٤٥^\circ\,\text{قتا}\,٤٥^\circ = \frac{١}{٢}$

(٣) $٣\,\text{ظتا}^٢\,٤٥^\circ - ٢\,\text{جا}\,٦٠^\circ\,\text{جتا}\,٣٠^\circ = \frac{٣}{٢}\,\text{جا}\,٩٠^\circ$

(٤) $\text{قا}\,٣٠^\circ\,\text{ظا}\,٦٠^\circ + \text{قتا}^٢\,٦٠^\circ - \text{ظا}^٢\,٤٥^\circ = \frac{٧}{٣}$

(٥) 📖 $\text{جا}\,٦٠^\circ\,\text{جتا}\,٣٠^\circ - \text{جتا}\,٦٠^\circ\,\text{جا}\,٣٠^\circ = \text{جا}^٢\,\frac{\pi}{٤}$

(٦) $٢\,\text{جتا}^٢\,\frac{\pi}{٣} + ٣\,\text{جا}^٢\,\frac{\pi}{٤} + ٤\,\text{ظا}^٢\,\frac{\pi}{٣} - ٤\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٢} = ١٠$

(٧) $\frac{\text{جا}\,٣٠^\circ\,\text{جتا}\,٤٥^\circ + \text{جا}\,٤٥^\circ\,\text{جتا}\,٣٠^\circ}{\text{جا}\,٤٥^\circ\,\text{جتا}\,٦٠^\circ + \text{جتا}\,٤٥^\circ\,\text{جا}\,٦٠^\circ} = \text{جا}\,٩٠^\circ$

---

٦ أوجد قيمة س إذا كان :

(١) $\text{س}\,\text{جا}^٢\,\frac{\pi}{٤}\,\text{جتا}\,\pi = \text{ظا}^٢\,\frac{\pi}{٣}\,\text{جا}\,\frac{٣\pi}{٢}$ «٦»

(٢) $\text{س}\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٤}\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{٤}\,\text{ظتا}\,\frac{\pi}{٦} = \text{ظا}^٢\,\frac{\pi}{٤} - \text{جتا}^٢\,\frac{\pi}{٣}$ «$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

---

٧ إذا كانت س $\in [٠^\circ ، ٩٠^\circ]$ فأوجد قيمة س التى تحقق كلاً من المعادلتين الآتيتين :

(١) $\text{جتا}\,\text{س} = \frac{\text{جا}\,٦٠^\circ}{\text{جا}\,٩٠^\circ} - \frac{\text{جا}\,٠^\circ}{\text{جا}\,٤٥^\circ}$ «٣٠°»

(٢) $\text{جا}\,\text{س} = \text{جا}\,٣٠^\circ\,\text{جتا}\,٦٠^\circ + \text{جتا}\,٣٠^\circ\,\text{جا}\,٦٠^\circ$ «٩٠°»

---

٨ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية أ و ب التى قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :

(١) $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{١٢}{١٣}$

(٢) $\theta \in]\frac{\pi}{٢} ، \pi[$ ، $\text{ظا}\,\theta = -\frac{٣}{٤}$

(٣) $\theta \in]\pi ، \frac{٣\pi}{٢}[$ ، $\text{قتا}\,\theta = -\frac{٢٥}{٧}$

(٤) $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$ ، $\text{قا}\,\theta = ٢$

---

٩ إذا كان الضلع النهائى للزاوية θ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (٢أ ، ٣أ) حيث $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة : $\text{قا}^٢\,\theta - \text{ظا}^٢\,\theta$ «$\frac{١}{\sqrt{١٣}}$ ، ١»

---

١٠ إذا كانت : $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$ ، $\text{جا}\,\theta = \frac{-٢٤}{٢٥}$ فأوجد :

(١) $\frac{\text{ظتا}\,\theta - \text{قتا}\,\theta}{\text{ظا}\,\theta - \text{قا}\,\theta}$

(٢) $\text{جتا}\,\theta - \text{قتا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta$ «$\frac{-٣}{٢٨}$ ، $\frac{-٥٧٦}{١٧٥}$»

اكتشف الخطأ

١١ 📖 طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج ٢ جا ٤٥°

إجابة كريم

$٢\,\text{جا}\,٤٥^\circ = \text{جا}\,٢ \times ٤٥^\circ = \text{جا}\,٩٠^\circ = ١$

إجابة أحمد

$٢\,\text{جا}\,٤٥^\circ = ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في دائرة الوحدة التي مركزها و إذا كان طول $\overset{\frown}{ب ح} = \frac{١}{٣}\pi$ فإن : قا (∠ب و ح) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) ٢

(٢) إذا كان أ هي أكبر قياس لزاوية حادة في مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣ من السنتيمترات

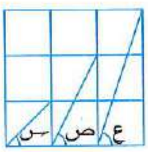
فإن : طا أ = ...

(أ) $\frac{١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{١٢}{٥}$

(٣) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث أ ب حـ قائم الزاوية هي س - ٧ ، س ، س + ١ وكان $\overline{ب ح}$ أصغر ضلع فإن : قا أ = ...

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{١٢}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٣}{١٢}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

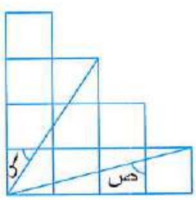
(٤) **في الشكل المقابل :**



إذا كانت جميع المربعات متطابقة فإن : طا س + طا ص + طا ع = ...

(أ) ٦ (ب) $\frac{١١}{٦}$ (جـ) $\frac{٦}{١١}$ (د) $\sqrt{٥} + ٣$

(٥) **في الشكل المقابل :**

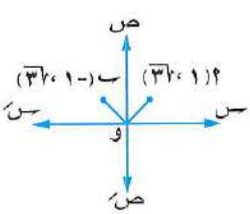


إذا كانت جميع المربعات متطابقة

فإن : طا س + طا ص = ...

(أ) $\frac{١١}{١٢}$ (ب) $\frac{٧}{٤}$ (جـ) $\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{١٤}{٣}$

(٦) **في الشكل المقابل :**



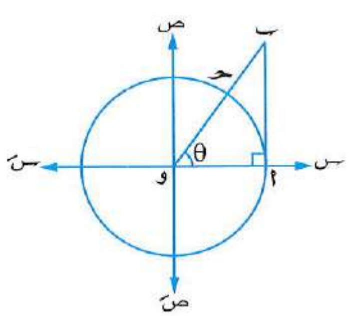
إذا كان : أ (١ ، $\sqrt{٣}$) ، ب (-١ ، $\sqrt{٣}$)

فإن : طا (∠أ و ب) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٧) **في الشكل المقابل :**



دائرة وحدة مركزها و ، $\overline{أ ب}$ قطعة مماسة فإن :

أولًا : و ب = ...

(أ) حا θ (ب) حتا θ

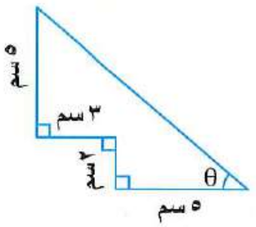
(جـ) قتا θ (د) قا θ

ثانيًا : $ب ح$ = ...

(أ) طا θ (ب) (حا θ) − ١ (جـ) (قتا θ) − ١ (د) حتا θ

ثالثًا : مساحة المثلث $أ ب و$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ حتا θ (ب) $\frac{١}{٢}$ طا θ (جـ) $\frac{١}{٢}$ حا θ (د) $\frac{١}{٢}$ حا θ حتا θ

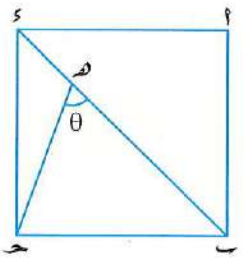


(٨) فى الشكل المقابل :

طا θ = ...

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٧}{٨}$

(جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٨}{٧}$



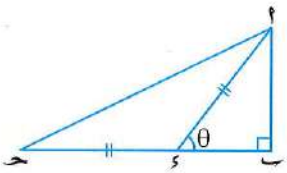
(٩) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $أ ب ح ء$ مربعًا وكان $\frac{ء هـ}{هـ ب} = \frac{٢}{٥}$

فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{٧}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٧}$

(جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٢}$

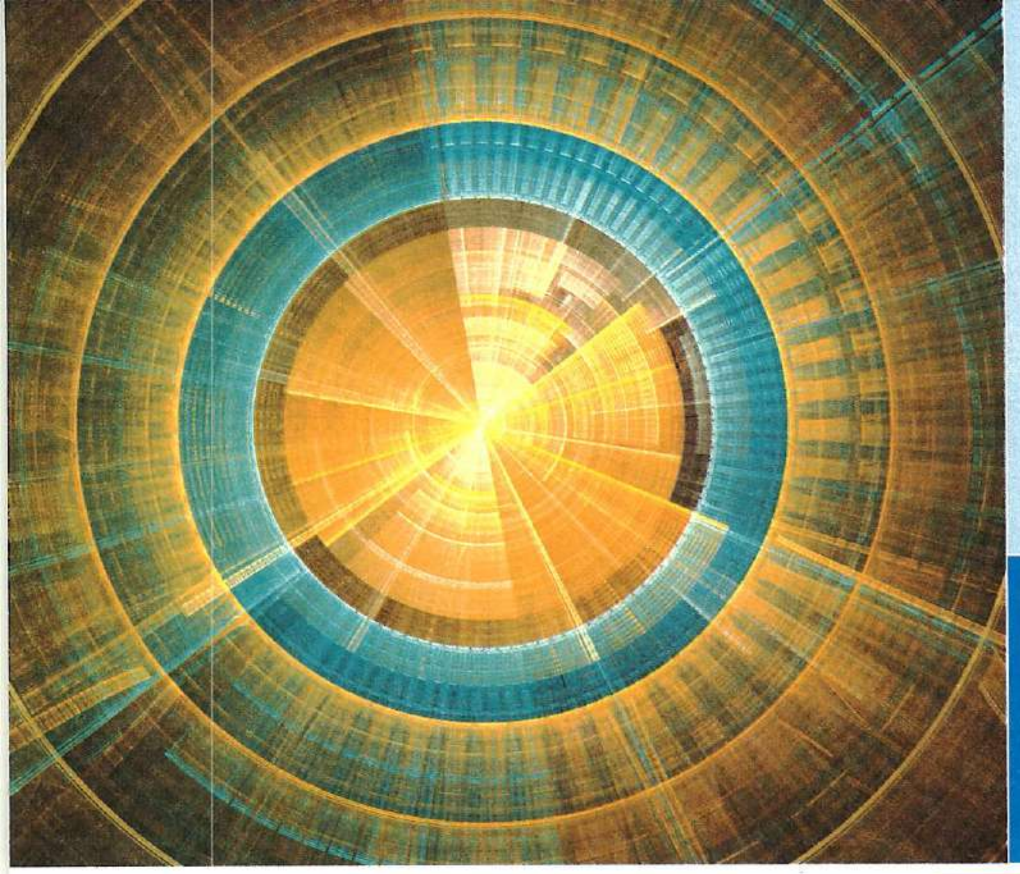


(١٠) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : $ء \in \overline{ب ح}$ وكان : $أ ء = ء ح$ ، طا $\theta = \frac{٤}{٣}$

فإن : طا $\frac{\theta}{٢}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$



الدرس

4

الزوايـــا المنتسبـــة

تعريف الزاويتين المنتسبتين

هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوى عددًا صحيحًا من القوائم.

فمثلًا الزاويتان اللتان قياساهما ٣٠° ، ٢١٠° زاويتان منتسبتان.

لأن ٢١٠° − ٣٠° = ١٨٠° أى قائمتان.

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين

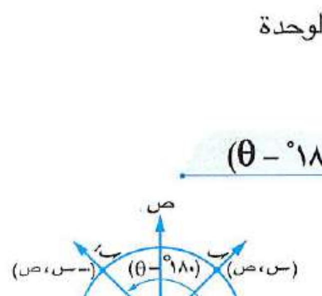
إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة ∠ أ و ب فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ، ص) وكان ق (∠ أ و ب) = θ حيث ٠° < θ < ٩٠° فإن :

١ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (١٨٠° − θ)

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس فى محور الصادات

هى النقطة بَ (− س ، ص)

فإن ق (∠ أ و بَ) الموجهة = (١٨٠° − θ)



ونستنتج أن :

حا (١٨٠° − θ) = حا θ	،	قتا (١٨٠° − θ) = قتا θ
جتا (١٨٠° − θ) = − جتا θ	،	قا (١٨٠° − θ) = − قا θ
ظا (١٨٠° − θ) = − ظا θ	،	ظتا (١٨٠° − θ) = − ظتا θ

فمثلًا

• حا ١٥٠° = حا (١٨٠° − ٣٠°) = حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ • حتا ١٢٠° = حتا (١٨٠° − ٦٠°) = − حتا ٦٠° = − $\frac{١}{٢}$

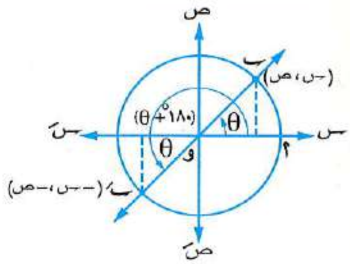
• ظتا ١٣٥° = ظتا (١٨٠° − ٤٥°) = − ظتا ٤٥° = −١

٢ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (١٨٠° + θ)

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس فى نقطة الأصل و

هى النقطة بَ (− س ، − ص)

فإن ق (∠ أ و بَ) الموجهة = (١٨٠° + θ)



ونستنتج أن :

حا (١٨٠° + θ) = − حا θ	،	قتا (١٨٠° + θ) = − قتا θ
حتا (١٨٠° + θ) = − حتا θ	،	قا (١٨٠° + θ) = − قا θ
طا (١٨٠° + θ) = طا θ	،	ظتا (١٨٠° + θ) = ظتا θ

فمثلًا

• حا ٢٢٥° = حا (١٨٠° + ٤٥°) = − حا ٤٥° = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

• قا ٢١٠° = قا (١٨٠° + ٣٠°) = − قا ٣٠° = − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

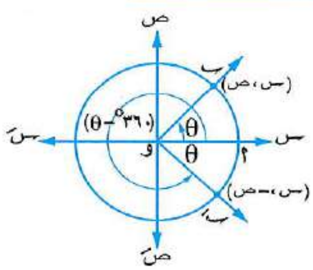
• طا ٢٤٠° = طا (١٨٠° + ٦٠°) = طا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

٣ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٣٦٠° − θ)

إذا كانت صورة النقطة ب (س ، ص) بالانعكاس فى محور السينات

هى النقطة بَ (س ، − ص)

فإن ق (∠ أ و بَ) الموجهة = (٣٦٠° − θ)



ونستنتج أن :

حا (٣٦٠° − θ) = − حا θ	،	قتا (٣٦٠° − θ) = − قتا θ
حتا (٣٦٠° − θ) = حتا θ	،	قا (٣٦٠° − θ) = قا θ
طا (٣٦٠° − θ) = − طا θ	،	ظتا (٣٦٠° − θ) = − ظتا θ

فمثلًا

- حا ٣٠٠° = حا (٣٦٠° − ٦٠°) = − حا ٦٠° = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$
- ظا ٣١٥° = ظا (٣٦٠° − ٤٥°) = − ظا ٤٥° = −١
- قا ٣٣٠° = قا (٣٦٠° − ٣٠°) = قا ٣٠° = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ملاحظة

الزاوية التى قياسها (− θ) تكافئ الزاوية التى قياسها (٣٦٠° − θ)

ومن ذلك يمكن استنتاج :

العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (− θ) كما يلى :

حا (− θ) = − حا θ ، قتا (− θ) = − قتا θ

حتا (− θ) = حتا θ ، قا (− θ) = قا θ

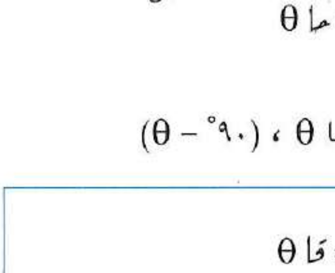
ظا (− θ) = − ظا θ ، ظتا (− θ) = − ظتا θ

فمثلًا

- حا (−٤٥°) = − حا ٤٥° = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$
- حتا (−٦٠°) = حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$
- ظتا (−٣٠°) = − ظتا ٣٠° = $-\sqrt{٣}$

٤ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° − θ)

فى الشكل المقابل :



الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها (٩٠° − θ) فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن : Δ حـ بَ و ≡ Δ أ و ب

∴ حـ بَ = أ و ومنها صَ = س **أى أن** حا (٩٠° − θ) = حتا θ

، حـ و = أ ب ومنها سَ = ص **أى أن** حتا (٩٠° − θ) = حا θ

، ∵ ظا (٩٠° − θ) = $\frac{صَ}{سَ}$ = $\frac{س}{ص}$ ∴ ظا (٩٠° − θ) = ظتا θ

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° − θ)

ونلخص ما سبق كما يلى :

حا (٩٠° − θ) = حتا θ ، قتا (٩٠° − θ) = قا θ

حتا (٩٠° − θ) = حا θ ، قا (٩٠° − θ) = قتا θ

ظا (٩٠° − θ) = ظتا θ ، ظتا (٩٠° − θ) = ظا θ

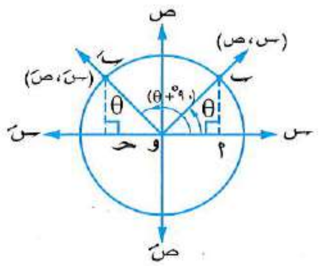
فمثلًا

• حا ٧٠° = حا (٩٠° − ٢٠°) = حتا ٢٠°

• $\frac{\text{حا ٤٠°}}{\text{حتا ٥٠°}} = \frac{\text{حا (٩٠° − ٥٠°)}}{\text{حتا ٥٠°}} = \frac{\text{حتا ٥٠°}}{\text{حتا ٥٠°}} = ١$

• طا ١٠° − طتا ٨٠° = طا (٩٠° − ٨٠°) − طتا ٨٠° = طتا ٨٠° − طتا ٨٠° = ٠

٥ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° + θ)



فى الشكل المقابل :

الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها (٩٠° + θ) فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن :

Δ حـ و بَ ≡ Δ أ ب و

∴ حـ بَ = أ و   ومنها صَ = س   **أى أن** حا (٩٠° + θ) = حتا θ

، و حـ = أ ب   ومنها سَ = − ص   **أى أن** حتا (٩٠° + θ) = − حا θ

، ∵ طا (٩٠° + θ) = $\frac{\text{صَ}}{\text{سَ}} = \frac{\text{س}}{\text{− ص}}$ ∴ طا (٩٠° + θ) = − طتا θ

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٩٠° + θ)

ونلخص ما سبق كما يلى :

حا (٩٠° + θ) = حتا θ	قا (٩٠° + θ) = قتا θ
حتا (٩٠° + θ) = − حا θ	قتا (٩٠° + θ) = − قا θ
طا (٩٠° + θ) = − طتا θ	طتا (٩٠° + θ) = − طا θ

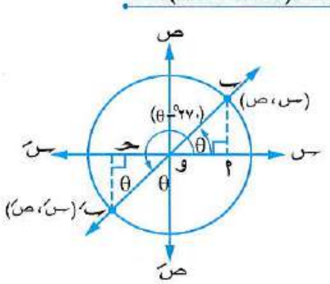
فمثلًا

• حا ١٢٠° = حا (٩٠° + ٣٠°) = حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

• حتا ١٥٠° = حتا (٩٠° + ٦٠°) = − حا ٦٠° = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

• طتا ١٣٥° = طتا (٩٠° + ٤٥°) = − طا ٤٥° = −١

٦ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° − θ)



فى الشكل المقابل :

الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها (٢٧٠° − θ) فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن :

Δ حـ و بَ ≡ Δ أ ب و

∴ حـ بَ = أ و ومنها صَ = − س **أي أن** حا (٢٧٠° − θ) = − حتا θ

، حـ و = أ ب ومنها سَ = − ص **أي أن** حتا (٢٧٠° − θ) = − حا θ

، ∵ ظا (٢٧٠° − θ) = $\frac{\text{صَ}}{\text{سَ}} = \frac{-\text{س}}{-\text{ص}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ∴ ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ

وبالمثل يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° − θ)

ونلخص ما سبق كما يلى :

حا (٢٧٠° − θ) = − حتا θ ، قتا (٢٧٠° − θ) = − قا θ

حتا (٢٧٠° − θ) = − حا θ ، قا (٢٧٠° − θ) = − قتا θ

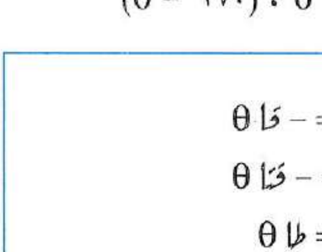
ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ ، ظتا (٢٧٠° − θ) = ظا θ

فمثلًا

- حا ٢٢٥° = حا (٢٧٠° − ٤٥°) = − حتا ٤٥° = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ظا ٢٤٠° = ظا (٢٧٠° − ٣٠°) = ظتا ٣٠° = $\sqrt{3}$
- قتا ٢١٠° = قتا (٢٧٠° − ٦٠°) = − قا ٦٠° = −٢

٧ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المنتسبتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° + θ)

فى الشكل المقابل :



الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها (٢٧٠° + θ) فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة بَ (سَ ، صَ)

من هندسة الشكل نجد أن :

Δ حـ بَ و ≡ Δ أ و ب

∴ حـ بَ = أ و ∴ صَ = − س **أي أن** حا (٢٧٠° + θ) = − حتا θ

، حـ و = أ ب ∴ سَ = ص **أي أن** حتا (٢٧٠° + θ) = حا θ

، ∵ ظا (٢٧٠° + θ) = $\frac{\text{صَ}}{\text{سَ}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$ ∴ ظا (٢٧٠° + θ) = − ظتا θ

وكذلك يمكن استنتاج العلاقة بين مقلوبات الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياساهما θ ، (٢٧٠° + θ)

ونلخص ما سبق كما يلى :

حا (٢٧٠° + θ) = − حتا θ ، قتا (٢٧٠° + θ) = − قا θ

حتا (٢٧٠° + θ) = حا θ ، قا (٢٧٠° + θ) = قتا θ

ظا (٢٧٠° + θ) = − ظتا θ ، ظتا (٢٧٠° + θ) = − ظا θ

فمثلًا

- جا ٣٠٠° = جا (٢٧٠° + ٣٠°) = − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
- قا ٣٣٠° = قا (٢٧٠° + ٦٠°) = قتا ٦٠° = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$
- ظتا ٣١٥° = ظتا (٢٧٠° + ٤٥°) = − ظا ٤٥° = −١

يمكن تلخيص كل ما سبق بالمخطط التالى (حيث θ هو قياس زاوية حادة) :

أولا

نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية المعطاة

(θ) ، (٩٠° − θ)	(٩٠° + θ) ، (١٨٠° − θ)
(٢٧٠° + θ) ، (٣٦٠° − θ)	(١٨٠° + θ) ، (٢٧٠° − θ)

ثانيا

نضع إشارة الدالة المثلثية المعطاة حسب الربع الذى حددناه.

ثالثا

في حالة الزوايا التى قياساتها θ أ، ١٨٠° − θ أ، ١٨٠° + θ أ، ٣٦٠° − θ أ، (− θ) تكتب الدالة المثلثية كما هى وتحول الزاوية أيًا كانت إلى θ

فى حالة الزوايا التى قياساتها ٩٠° − θ أ، ٩٠° + θ أ، ٢٧٠° − θ أ، ٢٧٠° + θ تتغير فيها الدالة المثلثية بوضع حرف التاء فى حالة عدم وجودها بالدالة أو بحذفها فى حالة وجودها وتحول الزاوية أيًا كانت إلى θ

فمثلا :

جتا (١٨٠° + θ)

(١٨٠° + θ) تقع فى الربع الثالث

دالة جيب التمام فى الربع الثالث سالبة (−)

− جتا θ

الدالة كما هى لأن قياس الزاوية (١٨٠° + θ)

∴ جتا (١٨٠° + θ) = − جتا θ

فمثلا :

جا (٩٠° + θ)

(٩٠° + θ) تقع فى الربع الثانى

دالة الجيب فى الربع الثانى موجبة (+)

+ جتا θ

تم إضافة التاء لأن قياس الزاوية (٩٠° + θ)

∴ جا (٩٠° + θ) = جتا θ

إيجاد دالة مثلثية لزاوية معلوم قياسها وليكن (α)

أولاً / إذا كانت $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ (أى $\alpha \in]0 ، 2\pi[$)

(1) نحدد الربع الذى تقع فيه الزاوية ثم نحدد إشارة الدالة المثلثية.

(2) نحول الدالة المثلثية للزاوية α إلى نفس الدالة المثلثية للزاوية $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ وذلك بأن :

نضع α على الصورة $(180^\circ - \theta)$ إذا كانت α فى الربع الثانى.

نضع α على الصورة $(180^\circ + \theta)$ إذا كانت α فى الربع الثالث.

نضع α على الصورة $(360^\circ - \theta)$ إذا كانت α فى الربع الرابع.

ثانيًا / إذا كانت $\alpha > 360^\circ$ (أى $\alpha > 2\pi$)

(1) نضع α على الصورة $(2 ن \pi + \theta)$ حيث $\theta \in]0 ، 2\pi[$

، ن عدد صحيح موجب فتكون الدالة المثلثية للزاوية α هى نفسها الدالة المثلثية للزاوية θ

(2) نوجد الدالة المثلثية للزاوية θ كما فى أولاً.

ثالثًا / إذا كانت α سالبة (أى $\alpha < 0$)

نتبع إحدى الطريقتين الآتيتين :

الطريقة الأولى

نطبق قاعدة الدالة المثلثية للزاوية السالبة وهى :

جا $(-\theta)$ = − جا θ ، جتا $(-\theta)$ = جتا θ ، ظا $(-\theta)$ = − ظا θ وهكذا ....

ثم نوجد الدالة المثلثية للزاوية θ كما فى (أولاً) أو (ثانيًا)

الطريقة الثانية

نضيف إلى α أى عدد صحيح من الدورات الكاملة الموجبة

(أى نضيف إلى α الزاوية 360° ن أ، 2π ن حيث ن $\in$ ص$_+$)

حتى نحصل على زاوية موجبة $\theta \in]0 ، 2\pi[$

ثم نوجد الدالة المثلثية للزاوية θ فتكون هى نفس الدالة المثلثية للزاوية السالبة α

مثال ١

أوجد قيمة كل من :

١ حا ٢٤٠° ‏ ‏ ٢ حتا $\frac{٥ \pi}{٣}$ ‏ ‏ ٣ حتا ٥٧٠° ‏ ‏ ٤ ظا (−١٥٠°)

الحل

١ حا ٢٤٠° = حا (١٨٠° + ٦٠°) = − حا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢ حتا $\frac{٥ \pi}{٣}$ = حتا $\frac{٥ \times ١٨٠°}{٣}$ = حتا ٣٠٠° = حتا (٣٦٠° − ٦٠°) = حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

أ، حتا $\frac{٥ \pi}{٣}$ = حتا $\left(٢ \pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ = حتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$

٣ حتا ٥٧٠° = حتا (٣٦٠° + ٢١٠°) = حتا ٢١٠° = حتا (١٨٠° + ٣٠°) = − حتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤ ظا (−١٥٠°) = − ظا ١٥٠° = − ظا (١٨٠° − ٣٠°) = − (− ظا ٣٠°) = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

مثال ٢

أوجد قيمة كل مما يأتي بطريقتين مختلفتين :

١ حا ١٢٠° ‏ ‏ ٢ ظتا ١٣٥° ‏ ‏ ٣ حتا (−٢٤٠°) ‏ ‏ ٤ قا $\frac{١٥ \pi}{٤}$

الحل

١ حا ١٢٠° = حا (١٨٠° − ٦٠°) = حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ‏ ‏ أ، حا ١٢٠° = حا (٩٠° + ٣٠°) = حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢ ظتا ١٣٥° = ظتا (١٨٠° − ٤٥°) = − ظتا ٤٥° = −١ ‏ ‏ أ، ظتا ١٣٥° = ظتا (٩٠° + ٤٥°) = − ظا ٤٥° = −١

٣ حتا (−٢٤٠°) = حتا ٢٤٠° = حتا (١٨٠° + ٦٠°) ‏ ‏ أ، حتا (− ٢٤٠°) = حتا ٢٤٠° = حتا (٢٧٠° − ٣٠°)

= − حتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$ ‏ ‏ = − حا ٣٠° = $-\frac{١}{٢}$

٤ ∵ قا $\frac{١٥ \pi}{٤}$ = قا $\frac{١٥ \times ١٨٠°}{٤}$ = قا ٦٧٥° = قا (٣٦٠° + ٣١٥°) = قا ٣١٥°

∴ قا $\frac{١٥ \pi}{٤}$ = قا ٣١٥° = قا (٣٦٠° − ٤٥°) ‏ ‏ أ، قا $\frac{١٥ \pi}{٤}$ = قا ٣١٥° = قا (٢٧٠° + ٤٥°)

= قا ٤٥° = $\sqrt{٢}$ ‏ ‏ = قتا ٤٥° = $\sqrt{٢}$

مثال ٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يأتى :

$$\text{جتا}(-١٥٠°)\ \text{جا}\ ٦٠٠° + \text{جتا}\ \frac{٢\pi}{٣}\ \text{جا}\ ٣٣٠° - \text{قتا}\left(-\frac{٥\pi}{٤}\right)\ \text{ظا}\ ٩٠٠°$$

الحل

$\because$ جتا $(-١٥٠°)$ = جتا $١٥٠°$ = جتا $(١٨٠° - ٣٠°)$ = $-$ جتا $٣٠°$ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، جا $٦٠٠°$ = جا $(٣٦٠° + ٢٤٠°)$ = جا $٢٤٠°$ = جا $(١٨٠° + ٦٠°)$ = $-$ جا $٦٠°$ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ = جتا $١٢٠°$ = جتا $(١٨٠° - ٦٠°)$ = $-$ جتا $٦٠°$ = $-\frac{١}{٢}$

، جا $٣٣٠°$ = جا $(٣٦٠° - ٣٠°)$ = $-$ جا $٣٠°$ = $-\frac{١}{٢}$

، قتا $\left(\frac{-٥\pi}{٤}\right)$ = قتا $\frac{٥\pi}{٤}$ = قتا $٢٢٥°$ = قتا $(١٨٠° + ٤٥°)$ = $-$ قتا $٤٥°$ = $-\sqrt{٢}$

، ظا $٩٠٠°$ = ظا $(٧٢٠° + ١٨٠°)$ = ظا $١٨٠°$ = صفر

$\therefore$ المقدار = $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) + \left(\frac{-١}{٢}\right)\left(\frac{-١}{٢}\right) - \left(-\sqrt{٢}\right)$ (صفر) = $\frac{٣}{٤} + \frac{١}{٤}$ + صفر = ١

حاول بنفسك

بدون استخدام الآلة الحاسبة :

١ أوجد قيمة : جتا $٢١٠°$ جا $٥١٠°$ $-$ جا $٣٣٠°$ جتا $(-٣٣٠°)$

٢ أثبت أن : جا $٦٠٠°$ جتا $(-٣٩٠°)$ + جا $١٥٠°$ جتا $(-٢٤٠°)$ = -١

مثال ٤

إذا كانت الزاوية الموجهة التى قياسها θ فى الوضع القياسى ، ويمر ضلعها النهائى بالنقطة $\left(\frac{٥}{١٣}، \frac{١٢}{١٣}\right)$ فأوجد الدوال المثلثية الآتية :

١ جا $(٩٠° - \theta)$ ٢ جتا $(١٨٠° + \theta)$ ٣ قا $(٩٠° + \theta)$

٤ قتا $(٢٧٠° - \theta)$ ٥ ظا $(٣٦٠° - \theta)$ ٦ ظتا $(-\theta)$

الحل

$\because$ س^٢ + ص^٢ = $\left(\frac{٥}{١٣}\right)^٢ + \left(\frac{١٢}{١٣}\right)^٢ = \frac{٢٥}{١٦٩} + \frac{١٤٤}{١٦٩} = ١$

$\therefore$ النقطة $\left(\frac{٥}{١٣}، \frac{١٢}{١٣}\right) \in$ دائرة الوحدة.

١ جا $(٩٠° - \theta)$ = جتا θ = $\frac{٥}{١٣}$

٢ جتا $(١٨٠° + \theta)$ = $-$ جتا θ = $\frac{-٥}{١٣}$

٣ قا $(٩٠° + \theta)$ = $-$ قتا θ = $-\frac{١٣}{١٢}$

٤ قتا $(٢٧٠° - \theta)$ = $-$ قا θ = $-\frac{١٣}{٥}$

٥ ظا $(٣٦٠° - \theta)$ = $-$ ظا θ = $-\frac{١٢}{٥}$

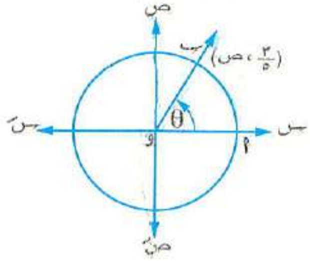
٦ ظتا $(-\theta)$ = $-$ ظتا θ = $-\frac{٥}{١٢}$

مثال ٥

إذا كان θ قياس زاوية حادة موجبة في وضع قياسي وتعين على دائرة الوحدة النقطة ب $(\frac{٣}{٥}$ ، ص$)$ فأوجد قيمة :

[١] ظا $(٩٠° - \theta)$ + قا $(٩٠° - \theta)$ [٢] ظتا $(٢٧٠° + \theta)$ − ظا $(٩٠° + \theta)$ − جا $(١٨٠° + \theta)$

الحل



∵ س^٢ + ص^٢ = ١ لأى نقطة على دائرة الوحدة.

∴ $\frac{٩}{٢٥}$ + ص^٢ = ١ ∴ ص^٢ = $\frac{١٦}{٢٥}$

∴ ص = $\frac{٤}{٥}$ حيث ص > ٠ ∴ ب = $(\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥})$

[١] ظا $(٩٠° - \theta)$ + قا $(٩٠° - \theta)$ = ظتا θ + قتا θ = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٥}{٤}$ = ٢

[٢] ظتا $(٢٧٠° + \theta)$ − ظا $(٩٠° + \theta)$ − جا $(١٨٠° + \theta)$

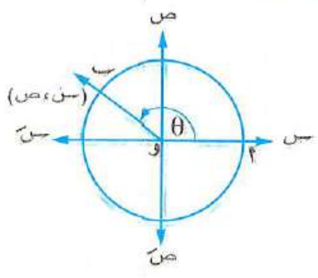
= − ظا θ − (− ظتا θ) − (− جا θ) = − ظا θ + ظتا θ + جا θ = − $\frac{٤}{٣}$ + $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{١٣}{٦٠}$

مثال ٦

إذا كانت : جتا θ = − $\frac{٤}{٥}$ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠° فأوجد قيمة كل من :

[١] جا $(١٨٠° - \theta)$ [٢] قا $(٣٦٠° - \theta)$ [٣] جتا $(-\theta)$ [٤] ظا $(\theta - ١٨٠°)$

الحل



بفرض أن ق (∠ أ و ب) = θ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠°

(كما في الشكل المقابل) وأن ب (س ، ص)

∴ س = جتا θ = − $\frac{٤}{٥}$ ، ص = جا θ حيث ص > ٠

، ∵ س^٢ + ص^٢ = ١ ∴ $\frac{١٦}{٢٥}$ + ص^٢ = ١ ∴ ص^٢ = $\frac{٩}{٢٥}$

∴ ص = $\frac{٣}{٥}$ ∴ ب = $(-\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥})$

[١] جا $(١٨٠° - \theta)$ = جا θ = $\frac{٣}{٥}$ [٢] قا $(٣٦٠° - \theta)$ = قا θ = − $\frac{٥}{٤}$

[٣] جتا $(-\theta)$ = جتا θ = س = − $\frac{٤}{٥}$

[٤] ظا $(\theta - ١٨٠°)$ = ظا $(\theta - ١٨٠° + ٣٦٠°)$ = ظا $(١٨٠° + \theta)$ = ظا θ = − $\frac{٣}{٤}$

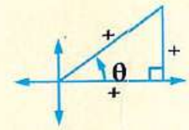
حاول بنفسك

إذا كان الضلع النهائي للزاوية الموجهة في وضعها القياسي والتي قياسها θ يقطع دائرة الوحدة في النقطة (س ، $\frac{١٢}{١٣}$) حيث ٩٠° < θ < ١٨٠°

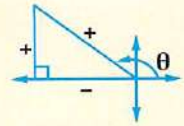
فأوجد قيمة : ١٣ جتا $(٣٦٠° - \theta)$ + ظا ٢٢٥° + قا^٢ ٣٠٠° + ١٢ ظا $(٢٧٠° - \theta)$

ملاحظة

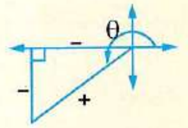
يمكن إيجاد قيم **الدوال المثلثية** لزاوية مباشرة إذا رسمت الزاوية فى وضعها القياسى ورسم المثلث القائم الخاص بها بالاستعانة بقيمة الدالة المثلثية المعطاة مع مراعاة الإشارات حسب الربع الذى تقع فيه الزاوية كما يلى :



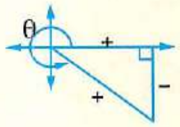
فى الربع الأول



فى الربع الثانى



فى الربع الثالث



فى الربع الرابع

مثال ٧

إذا كانت : جتا $\alpha = -\frac{٧}{٢٥}$ حيث α أصغر زاوية موجبة ، ظا $\beta = \frac{٣}{٤}$ حيث β أكبر زاوية موجبة بحيث $٠^\circ \le \beta \le ٣٦٠^\circ$

فأوجد قيمة : جتا $(١٨٠^\circ + \alpha)$ جا $(\beta - ٩٠^\circ)$ + جا $(٣٦٠^\circ - \alpha)$ جا $(١٨٠^\circ - \beta)$

الحل

$\because$ جتا $\alpha < ٠$ $\quad$ $\therefore$ α تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

، $\because$ α أصغر زاوية موجبة. $\quad$ $\therefore$ α تقع فى الربع الثانى.

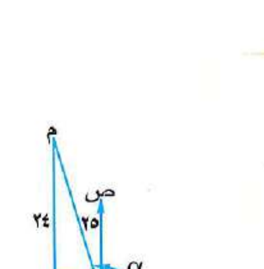
، $\because$ جتا $\alpha = -\frac{٧}{٢٥}$

$\because$ (م ن)^٢ = $(٢٥)^٢ - (٧)^٢ = ٥٧٦$ $\quad$ $\therefore$ م ن = ٢٤ وحدة طول.

، $\because$ ظا $\beta > ٠$ $\quad$ $\therefore$ β تقع فى الربع الأول أو الثالث.

، $\because$ β أكبر زاوية موجبة. $\quad$ $\therefore$ β تقع فى الربع الثالث.

، $\because$ ظا $\beta = \frac{٣}{٤}$



$\therefore$ (و ق)^٢ = $(٣)^٢ + (٤)^٢ = ٢٥$ $\quad$ $\therefore$ و ق = ٥ وحدة طول.

$\therefore$ المقدار = جتا $(١٨٠^\circ + \alpha)$ جا $(\beta - ٩٠^\circ)$ + جا $(٣٦٠^\circ - \alpha)$ جا $(١٨٠^\circ - \beta)$

= − جتا α جا $(٢٧٠^\circ + \beta)$ + (− جا α) جا β

= − جتا α (− جتا β) − جا α جا β = جتا α جتا β − جا α جا β

$= -\frac{٧}{٢٥} \times \left(-\frac{٤}{٥}\right) - \frac{٢٤}{٢٥} \times \frac{-٣}{٥} = \frac{٢٨}{١٢٥} + \frac{٧٢}{١٢٥} = \frac{١٠٠}{١٢٥} = \frac{٤}{٥}$

ملاحظة

إذا كان : جا α = جتا β أ، طا α = ظتا β أ، قتا α = قا β

فإن : $\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ}$ حيث α ، β قياسا زاويتين حادتين موجبتين.

فمثلاً إذا كان : طا 23° = ظتا α فإن : $23^\circ + \alpha = 90^\circ$ **أى** $\alpha = 67^\circ$

مثال ٨

إذا كان : جا $(3\theta + 28^\circ)$ = جتا $(2\theta - 13^\circ)$ أوجد قيمة واحدة لـ θ حيث $0^\circ < \theta < 90^\circ$

الحل

$\because$ جا $(3\theta + 28^\circ)$ = جتا $(2\theta - 13^\circ)$ $\therefore 3\theta + 28^\circ + 2\theta - 13^\circ = 90^\circ$

$\therefore 5\theta + 15^\circ = 90^\circ$ $\therefore 5\theta = 75^\circ$ $\therefore \theta = 15^\circ$

لاحظ أنه

توجد قيم أخرى لـ θ تنحصر بين 0° ، 90° مثل $\theta = 49^\circ$ أ، $\theta = 87^\circ$

ولإيجاد هذه القيم لابد من حل المثال باستخدام القانون العام كتعميم للملاحظة السابقة.

استنتاج القانون العام

١ إذا كان : جا α = جتا β فإن : جا α = جا $(90^\circ - \beta)$

$\therefore \alpha = 90^\circ - \beta$ أ، $\therefore \alpha + 90^\circ - \beta = 180^\circ$

$\therefore \alpha + \beta = 90^\circ$ $\therefore \alpha - \beta = 90^\circ$

ويمكن إضافة عدد من الدورات (360°) على الزاوية 90°

تنبيه هام جداً

عند الحل لا بد أن نبدأ بزاوية دالة الجيب α

٢ وبنفس الطريقة يمكن استنتاج نفس القوانين إذا كان : قتا α = قا β

٣ إذا كان : طا α = ظتا β فإن :

طا α = طا $(90^\circ - \beta)$ أ، طا α = طا $(270^\circ - \beta)$

$\therefore \alpha = 90^\circ - \beta$ $\therefore \alpha = 270^\circ - \beta$

$\therefore \alpha + \beta = 90^\circ$ $\therefore \alpha + \beta = 270^\circ$

ويمكن إضافة عدد من الدورات (360°) على الزاويتين 90° ، 270°

وبالتالى يمكن كتابة القانون العام لأى زاويتين α ، β كما يلى :

القانون العام لحل المعادلات على الصور جا α = جتا β أو قتا α = قا β أو ظا α = ظتا β

١ إذا كان : جا α = جتا β

فإن : $\boxed{\alpha \pm \beta = 90^\circ + 360^\circ\, ن}$ **أى أن** $\boxed{\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi\, ن}$ حيث ن $\in$ ص

أى أن قياس زاوية الجيب ± قياس زاوية جيب التمام = $90^\circ + 360^\circ$ ن

٢ إذا كان : قتا α = قا β

فإن : $\boxed{\alpha \pm \beta = 90^\circ + 360^\circ\, ن}$ **أى أن** $\boxed{\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi\, ن}$ حيث ن $\in$ ص

، $\alpha \neq \pi$ ن ، $\beta \neq (2ن + 1)\frac{\pi}{2}$

٣ إذا كان : ظا α = ظتا β

فإن : $\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ + 180^\circ\, ن}$ **أى أن** $\boxed{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi\, ن}$ حيث ن $\in$ ص

، $\alpha \neq (2ن + 1)\frac{\pi}{2}$ ، $\beta \neq \pi$ ن

مثال ٩

أوجد الحل العام للمعادلة : جتا 2θ = جا 4θ ثم أوجد : قيم θ حيث $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$

الحل

$\because$ جتا 2θ = جا 4θ $\therefore$ جا 4θ = جتا 2θ

$\therefore \alpha = 4\theta$ ، $\beta = 2\theta$ $\therefore 4\theta \pm 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن

$\therefore$ إما $6\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن $\therefore \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}$ ن

أو $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن $\therefore \theta = \frac{\pi}{4} + \pi$ ن

$\therefore$ الحل العام هو $\boxed{\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\, ن}$ أ، $\boxed{\frac{\pi}{4} + \pi\, ن}$ حيث ن $\in$ ص

- عند ن = ٠ : $\therefore \theta = \frac{\pi}{12} \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ أو $\theta = \frac{\pi}{4} \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$
- عند ن = ١ : $\therefore \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{12}\pi \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$ أو $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi \notin]0 ، \frac{\pi}{2}[$
- عند ن = ٢ : $\therefore \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi \notin]0 ، \frac{\pi}{2}[$

$\therefore$ قيم θ هى : $\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{12}$ **أى** 15° ، 45° ، 75°

حاول بنفسك

أوجد الحل العام للمعادلة : حا ٣θ = حتا θ

ثم أوجد : جميع قيم θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ التى تحقق المعادلة.

مثال ١٠

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ ٢ حا θ − ١ = ٠ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

٢ ٢ حتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta) + \sqrt{٣} = ٠$ حيث $\theta \in]٠ ، ٢\pi[$

٣ ٤ حتا^٢ θ − ٣ = ٠ حيث $\theta \in]٠ ، ٢\pi[$

الحل

١ ∵ ٢ حا θ − ١ = ٠ ∴ حا $\theta = \frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى ، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{١}{٢}$ هى ٣٠°

∴ $\theta = ٣٠^\circ$ (تكافىء $\frac{\pi}{٦}$) أ، $\theta = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ$ (تكافىء $\frac{٥\pi}{٦}$) (مرفوض لأن $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$)

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{\pi}{٦}\}$

٢ ∵ ٢ حتا $(\frac{\pi}{٢} - \theta) + \sqrt{٣} = ٠$ ∴ ٢ حا $\theta = -\sqrt{٣}$

∴ حا $\theta = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة) ∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta = ١٨٠^\circ + ٦٠^\circ = ٢٤٠^\circ$ (تكافىء $\frac{٤\pi}{٣}$) أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠٠^\circ$ (تكافىء $\frac{٥\pi}{٣}$)

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{٤\pi}{٣} ، \frac{٥\pi}{٣}\}$

٣ ∵ ٤ حتا^٢ θ − ٣ = ٠ ∴ ٤ حتا^٢ θ = ٣

∴ حتا^٢ $\theta = \frac{٣}{٤}$ ∴ حتا $\theta = \pm\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ إما حتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة) ∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

∴ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ قياسها ٣٠°

∴ $\theta = ٣٠^\circ$ (تكافىء $\frac{\pi}{٦}$) أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ = ٣٣٠^\circ$ (تكافىء $\frac{١١\pi}{٦}$)

أ، حتا $\theta = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة) ∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

∴ $\theta = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ$ (تكافىء $\frac{٥\pi}{٦}$) أ، $\theta = ١٨٠^\circ + ٣٠^\circ = ٢١٠^\circ$ (تكافىء $\frac{٧\pi}{٦}$)

∴ مجموعة الحل = $\{\frac{\pi}{٦} ، \frac{٥\pi}{٦} ، \frac{٧\pi}{٦} ، \frac{١١\pi}{٦}\}$

تمارين 10 على الزوايا المنتسبة

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) طا ٤٢° = ...

(أ) ظتا ٤٢°　　(ب) طا ٤٨°　　(جـ) ظتا ٤٨°　　(د) قتا ٤٨°

(٢) $\frac{\text{قا } ١٠٥°}{\text{قتا } ١٥°}$ = ...

(أ) $\frac{\text{جا } ١٠٥°}{\text{جتا } ١٥°}$　　(ب) طا ١٣٥°　　(جـ) ظتا ١٥°　　(د) جتا ٩٠°

(٣) طا (١٨٠° − θ) = ...

(أ) طا θ　　(ب) − طا θ　　(جـ) ظتا θ　　(د) − ظتا θ

(٤) قا (٩٠° + θ) = ...

(أ) قتا (١٨٠° − θ)　　(ب) قتا (١٨٠° + θ)

(جـ) قتا (٢٧٠° − θ)　　(د) قتا (٢٧٠° + θ)

(٥) إذا كان : جا θ = $\frac{٣}{٥}$ فإن : جتا (٢٧٠° − θ) = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$　　(ب) $\frac{-٣}{٥}$　　(جـ) $\frac{٤}{٥}$　　(د) $\frac{-٤}{٥}$

(٦) جتا (٩٠° − θ) × قتا θ = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) −١　　(د) ظتا θ

(٧) $\frac{\text{جا } ٥٠°}{\text{جتا } ٤٠°} + \frac{\text{جا } ٧٠°}{\text{جا } ١١٠°}$ = ك فإن : ك = ...

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) صفر

(٨) طا (٩٠° − θ) + طا (٩٠° + θ) = ...

(أ) ٢ ظتا θ　　(ب) ٢ طا θ　　(جـ) صفر　　(د) طا θ + ظتا θ

(٩) $\frac{\text{طا } (٤٥° + \text{س})}{\text{ظتا } (٤٥° - \text{س})}$ = ...

(أ) −١　　(ب) ١　　(جـ) طا (٩٠° + س)　　(د) ظتا (٩٠° + س)

(١٠) حا $(٩٠° - \theta)$ قا $(٣٦٠° - \theta)$ − حتا $(٢٧٠° + \theta)$ قتا $(١٨٠° + \theta)$ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

(١١) إذا كان : ٢ + ب = ٩٠° ، طا ٢ = $\frac{١}{٣}$ فإن : طا ب = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ١ (د) ٣

(١٢) إذا كان : س + ص = $\frac{\pi}{٢}$ فإن : $\frac{\text{حا س} - \text{حا ص}}{\text{حتا س} - \text{حتا ص}}$ = ...

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

(١٣) حتا θ + حتا $(١٨٠° - \theta)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ حتا θ (د) حتا θ

(١٤) حا θ + حتا $(٢٧٠° + \theta)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ حا θ (د) حا θ حتا θ

(١٥) حا $(١٨٠° - \theta)$ + حتا $(-٦٠°)$ + حتا $(٩٠° + \theta)$ + حا $(-١٥٠°)$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢ حا θ

(١٦) إذا كانت : حتا θ = − حا ٢ θ ، θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٩٠° (د) ٣٣٠°

(١٧) إذا كان : $\sqrt{٣}$ قتا θ = −٢ حيث θ أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٢٤٠°

(١٨) إذا كان : حتا θ = $-\frac{١}{٢}$ ، θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٢٤٠° (د) ٣٠٠°

(١٩) إذا كانت : حتا $(٩٠° + \theta)$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ١٥٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٢٠) إذا كان : طا θ = طا $(٩٠° - \theta)$ حيث θ قياس زاوية حادة فإن : θ = ...°

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

(٢١) إذا كان : حتا $(٩٩٠° - \theta)$ = $\frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٢٢) إذا كانت : ٢ حتا θ + $\sqrt{٣}$ = ٠ حيث $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$ فإن : θ = ...

(أ) ١٥٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٠٠°

(٢٣) إذا كان : ٥ جا س = ٣ فإن : قا (٢٧٠° + س) = ...

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $-\frac{٥}{٤}$ (جـ) $-\frac{٥}{٣}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٢٤) إذا كان : جا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، طا θ > ٠ فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

(٢٥) إذا كان : طا θ = $\frac{-٥}{١٢}$ ، جتا θ < ٠ فإن : قتا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{-٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٣}{٥}$ (د) $\frac{-١٣}{٥}$

(٢٦) إذا كان : ٥ جتا (٩٠° − θ) = ٤ ، ٠° < θ < ٩٠° فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٢٧) إذا كان : جا θ = −٠,٨ حيث ١٨٠° < θ < ٢٧٠° فإن : ٣ ظتا (٢٧٠° − θ) = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) −٤ (د) ٤

(٢٨) إذا كان : ٢٤ طا θ + ٧ = ٠ ، ٩٠° < θ < ٢٧٠° فإن : قا (١٠٨٠° + θ) = ...

(أ) $\frac{٢٤}{٧}$ (ب) $\frac{-٢٤}{٧}$ (جـ) $\frac{٢٥}{٢٤}$ (د) $\frac{-٢٥}{٢٤}$

(٢٩) إذا كانت : ظتا (٩٠° + θ) + ١ = ٠ حيث ٠° < θ < ٩٠° فإن : جتا ٤ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

(٣٠) إذا كان : جتا (٩٠° + θ) + جا (٩٠° − ٢ θ) = ٠ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[فإن : جا ٢ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٣١) إذا كان : ظتا (٩٠° + θ) + طا (٩٠° − ٢ θ) = ٠ حيث θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

فإن : طا ٢ θ = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\sqrt{٣}$

(٣٢) إذا كان : طا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث π < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ فإن : جتا (٣٦٠° − ب) − جتا (٩٠° − ب) = ...

(أ) $\frac{-٧}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{-٤}{٥}$ (د) $\frac{-١}{٥}$

(٣٣) إذا كان : ١٣ جا θ − ٥ = ٠ حيث θ ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[

فإن : قيمة جا (٢٧٠° − θ) × قا (٩٠° + θ) = ...

(أ) $\frac{-١٢}{٥}$ (ب) $\frac{١٢}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{-٥}{١٢}$

(٣٤) إذا كان : (س ، $\frac{١}{٢}$) نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في وضعها القياسي مع دائرة الوحدة حيث ٩٠° < θ < ١٨٠° فإن : جا (٩٠° − θ) طا θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) −٣

(٣٥) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ فإن : قتا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right) =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{-٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{-٥}{٤}$

(٣٦) إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة $(٩٠° - \theta)$ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{-٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$ فإن : جا $\theta =$ ....

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{-٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(٣٧) إذا كان : جا α = جتا β فإن : قتا $(\alpha + \beta) =$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) غير معرفة.

(٣٨) إذا كان : جا α = جتا β فإن : ظتا $(\alpha + \beta) =$ ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) صفر (د) غير معرفة.

(٣٩) إذا كان : جا θ = جتا ٢θ ، $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فإن : جا $٣\theta =$ ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤٠) إذا كان : جا ٢θ = جتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : ظا $(٩٠° - ٣\theta) =$ ....

(أ) −١ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{٣}$

(٤١) إذا كان : جا $(\theta + ١٣°)$ = جتا $(\theta + ١٧°)$ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : ظا $\theta =$ ....

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤٢) لكل ن $\in$ ص يكون الحل العام للمعادلة ظا ٢θ = ظتا θ هو ....

(أ) $\frac{\pi}{٢} + \pi$ ن (ب) $\frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{٣}$ ن (جـ) $\frac{\pi}{٦} + ٢\pi$ ن (د) $\frac{\pi}{٦} + \pi$ ن

(٤٣) لكل ن $\in$ ص الحل العام للمعادلة : قا θ = قتا $(٣٠° + \theta)$ هو ....

(أ) $٦٠° + ١٨٠°$ ن (ب) $٣٠° + ٣٦٠°$ ن

(جـ) $٦٠° + ٣٦٠°$ ن (د) $٣٠° + ١٨٠°$ ن

(٤٤) إذا كان أ ب جـ ء شكلاً رباعيًا دائريًا وكان : جا أ = $\frac{٣}{٥}$ فإن : جا جـ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{-٤}{٥}$

(٤٥) إذا كان : س ص ع ل شكل رباعى دائرى ، جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن : جا $(٢٧٠° - ع) =$ ....

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

(٤٦) في مثلث قائم الزاوية إحدى زواياه س° وكان : جا س = $\frac{٤}{٥}$ فإن : جتا (٩٠ − س°) = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (ج) $\frac{-٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٤٧) إذا كان Δ أ ب ح منفرج الزاوية في أ ، جا أ = $\frac{٤}{٥}$ فإن : جا (٢ أ + ب + ح) = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (ج) $\frac{-٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٤٨) أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان : جتا أ = $\frac{١}{٢}$ فإن : قيمة جا (أ + ب + ٢ ح) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) صفر

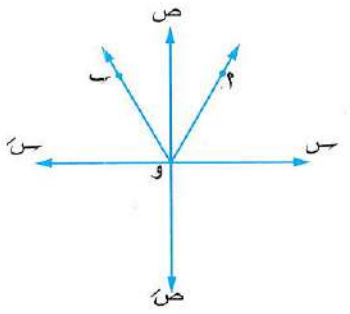
(٤٩) س ص ع مثلث حاد الزوايا فيه : ظا ع = $\sqrt{٣}$ فإن : جا (س + ص + ٢ ع) = ...

(أ) $-\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

(٥٠) إذا كان أ ب ح مثلثًا حاد الزوايا فإن : جتا أ + جتا (ب + ح) = ...

(أ) −١ (ب) صفر (ج) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٥١) في الشكل المقابل :



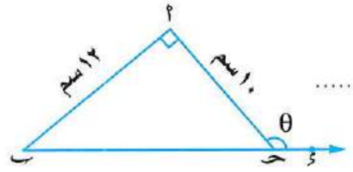
إذا كان : أ = (٢ ، ٢$\sqrt{٣}$) ، ب = (−٢ ، ٢$\sqrt{٣}$)

فإن : ظتا (١٨٠° − ق(∠ أ و ب)) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(ج) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٥٢) في الشكل المقابل :

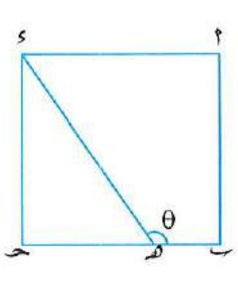


ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ ، أ ح = ١٠ سم ، أ ب = ١٢ سم فإن : ظتا θ = ...

(أ) $\frac{٦}{٥}$ (ب) $-\frac{٦}{٥}$

(ج) $\frac{٥}{٦}$ (د) $-\frac{٥}{٦}$

(٥٣) في الشكل المقابل :

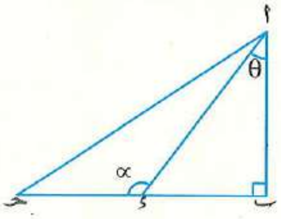


أ ب ح ء مربع فيه : ح هـ = ٢ ب هـ فإن : ظا θ = ...

(أ) $-\frac{٣}{٢}$ (ب) $-\frac{٢}{٣}$

(ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٥٤) في الشكل المقابل :



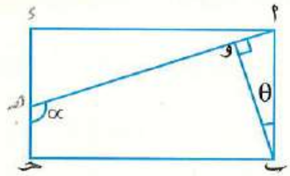
Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

، طا $\theta = \frac{٣}{٤}$

فإن : حتا α = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $-\frac{٣}{٤}$ (جـ) $-\frac{٤}{٥}$ (د) $-\frac{٣}{٥}$

(٥٥) في الشكل المقابل :

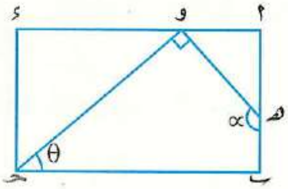


أ ب حـ ء مستطيل ، طا $\theta = \frac{١}{٣}$

، $\overline{\text{ب و}} \perp \overline{\text{أ هـ}}$ فإن : طتا α = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $-\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٥٦) في الشكل المقابل :

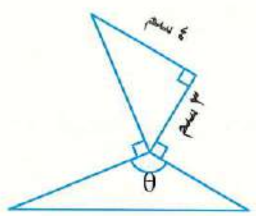


أ ب حـ ء مستطيل فيه : حتا $\theta = \frac{٣}{٤}$

، $\overline{\text{هـ و}} \perp \overline{\text{و حـ}}$ فإن : حتا α = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $-\frac{٤}{٥}$ (جـ) $-\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٥٧) في الشكل المقابل :

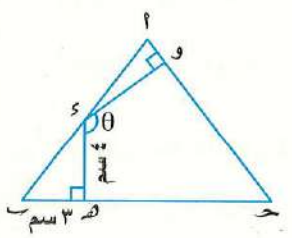


حتا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$

(جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{-٤}{٥}$

(٥٨) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ ، ء $\in \overline{\text{أ ب}}$

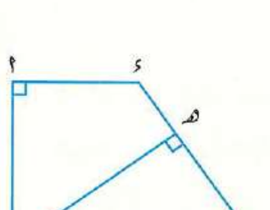
، $\overline{\text{ء هـ}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ء و}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ، ق (∠ هـ ء و) = θ

، ء هـ = ٤ سم ، ب هـ = ٣ سم

فإن : حتا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $-\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{-٤}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

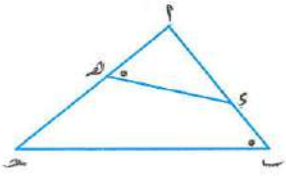
(٥٩) في الشكل المقابل :



إذا كان : ٣ ب هـ = ٤ حـ هـ

فإن : طا (∠ أ ء حـ) = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$



(٦٠) في الشكل المقابل :

ق (∠ أ هـ ء) = ق (∠ ب)

فإن : جتا جـ + جتا (∠ ب ء هـ) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) π (د) صفر

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) جا ١٥٠° (٢) قا ٢١٠° (٣) ظا ٢٤٠° (٤) جتا (−١٥٠٠°)

(٥) ظا ٢٢٥° (٦) قتا $\frac{11\pi}{6}$ (٧) ظتا ٧٨٠° (٨) جتا (−٩٠٠°)

(٩) جا $\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$ (١٠) قا $\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ (١١) قا (−٤٨٠°) (١٢) جا $\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$

---

٢ أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) جتا ١٢٠° + ظا ٢٢٥° + قتا ٣٣٠° + جتا ٤٢٠° «−١»

(٢) جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠° «$-\frac{1}{4}$»

(٣) ظا $\frac{2\pi}{3}$ قا $\frac{11\pi}{3}$ + ظتا $\frac{11\pi}{6}$ قتا $\frac{19\pi}{6}$ + ظا $\frac{25\pi}{6}$ قا $\left(\frac{-19\pi}{3}\right)$ «$-\frac{2}{3}$»

---

٣ أثبت صحة كل من المتساويات الآتية :

(١) جتا (−٣٠٠°) جا ٤٢٠° − جتا ٧٥٠° جتا ٦٦٠° = صفر

(٢) جا ٦٠٠° جتا (−٣٠°) + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠°) = −١

(٣) جا ١٥٠° ظا ٢٢٥° + جتا ٣١٥° قا (−١٢٠°) + جا (−١٣٥°) قتا ٢١٠° = $\frac{1}{2}$

---

٤ إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها θ في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $\left(\frac{-3}{5} ، \frac{4}{5}\right)$ فأوجد :

(١) جا $(180° + \theta)$ (٢) جتا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (٣) ظا $(360° - \theta)$

(٤) قتا $\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)$ (٥) قا $(\pi + \theta)$ (٦) جا $(\pi - \theta)$

---

٥ إذا كانت الزاوية الموجهة التي قياسها θ في الوضع القياسي ضلعها النهائي يمر بالنقطة $\left(\frac{\sqrt{5}}{3} ، \frac{2}{3}\right)$

فأوجد الدوال المثلثية الآتية :

(١) جا $(270° + \theta)$ (٢) قا $(270° + \theta)$ (٣) قتا $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

(٤) ظا $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ (٥) ظتا $(\theta - 180°)$ (٦) قتا $(-\theta)$

٦ إذا كان θ قياس زاوية حادة موجبة فى الوضع القياسى ويقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة ب $\left(س ، \frac{٣}{٥}\right)$ فأوجد قيمة : جا $(٩٠° - \theta)$ + ظا $(٩٠° - \theta)$ جتا $(٩٠° + \theta)$ «صفر»

---

٧ إذا كان : جتا $\theta = -\frac{٣}{٥}$ حيث $١٨٠° < \theta < ٢٧٠°$ فأوجد قيمة كل من :

(١) قتا $(١٨٠° + \theta)$ | (٢) قا $(-\theta)$ | (٣) ظا $(٣٦٠° - \theta)$

(٤) ظتا $(\theta - ٩٠°)$ | (٥) قا $(٩٠° + \theta)$ | (٦) ظا $(٢٧٠° - \theta)$

---

٨ أوجد إحدى قيم θ حيث $٠° \le \theta < ٩٠°$ التى تحقق كلاً مما يأتى :

(١) جا $(٣\theta + ١٥°)$ = جتا $(٢\theta - ٥°)$ «١٦°»

(٢) قا $(\theta + ٢٥°)$ = قتا $(\theta + ١٥°)$ «٢٥°»

(٣) ظا $(\theta + ٢٠°)$ = ظتا $(٣\theta + ٣٠°)$ «١٠°»

(٤) جتا $\left(\frac{\theta + ٢٠°}{٢}\right)$ = جا $\left(\frac{\theta + ٤٠°}{٢}\right)$ «٦٠°»

(٥) ظا $(\theta + ١٨° ٢٤')$ = ظتا $(\theta + ١٠° ٥٢')$ «٩° ٤٣'»

---

٩ أوجد الحل العام لكل من المعادلتين الآتيتين :

(١) جا ٢θ = جتا θ | (٢) جتا ٥θ = جا θ

---

١٠ أوجد قيم θ فى كل من الحالات الآتية حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$:

(١) قتا $(\theta + ١٥°)$ = قا $٤٢°$ | (٢) جا $(\theta + ٣٠°)$ = جتا θ

(٣) جا θ − جتا $\theta = ٠$ | (٤) قتا $\left(\theta - \frac{\pi}{٦}\right)$ = قا θ

(٥) ظا $(\theta + ٢٧°)$ = ظتا ٢θ | (٦) ظا $(\theta + ١٠°)$ = ظتا $(٤\theta - ١٠°)$

(٧) قا $(٢\theta + ٣٥°)$ = قتا $(٣\theta - ١٠°)$ | (٨) قا θ = قتا $(٣\theta - ٩٠°)$

(٩) جا $(٤\theta + ٤٨°)$ = جتا $(\theta - ٣٣°)$ | (١٠) قتا ٨θ = قا ٢θ

---

١١ أوجد جميع قيم θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ التى تحقق كلاً من المعادلات الآتية :

(١) ظا $\theta - ١ = ٠$ | (٢) ٢ جتا $\theta - ١ = ٠$

(٣) ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = ١$ | (٤) ٢ جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \sqrt{٣}$

١٢ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية علمًا بأن $\theta \in]٠ ، ٢\pi[$:

(١) $٢ \text{ جتا } \theta + ١ = ٠$

(٢) $\text{قا } \theta - \sqrt{٢} = ٠$

(٣) $٢ \text{ جا } \theta - \sqrt{٣} = ٠$

(٤) $\text{جتا } \theta + ١ = ٠$

(٥) $٢ \text{ جا } \theta + \sqrt{٣} = ٠$

(٦) $\text{ظا } \theta + ١ = ٠$

(٧) $\sqrt{٣} \text{ قتا } \theta = -٢$

(٨) $\text{جا}^{٢} \theta = \frac{١}{٤}$

---

١٣ إذا كان : $\text{جتا}\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = \frac{١}{٢}$

فأوجد أصغر قياس موجب للزاوية θ «٣٠٠°»

---

١٤ إذا كان : $\frac{\text{جا}(٣\theta - ٢٥^\circ)}{\text{جتا}(٢\theta - ٣٥^\circ)} = ١$ فأوجد قيمة : θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

ثم أوجد قيمة : $\frac{\text{جا } ١٨^\circ}{\text{جتا } ٧٢^\circ} + \text{جا}(١٨٠^\circ - \theta)$ «٣٠° ، $١\frac{١}{٢}$»

---

١٥ إذا كان : $\frac{\text{ظا } \theta}{\text{ظتا } ٢\theta} = ١$ حيث $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$ فأوجد قيمة : θ

ثم أوجد قيمة : $\text{جا}(١٨٠^\circ - ٣\theta) \text{ جتا}(٣٦٠^\circ - ٢\theta) + \text{ظا } ٢\theta \text{ ظتا}(\theta - ١٨٠^\circ)$ «٣٠° ، $٣\frac{١}{٢}$»

---

١٦ إذا كان : $\text{ظا}(\theta - ١٥^\circ) = \text{ظتا}(٢\theta + ١٥^\circ)$ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

فأوجد قيمة θ ثم أثبت أن : $\frac{١ + \text{جا}(٢٧٠^\circ + ٢\theta)}{١ + \text{جا}(٩٠^\circ + ٢\theta)} = \frac{١}{٣}$ «٣٠°»

---

١٧ إذا كان : $\text{جتا } \theta = \frac{٣}{٥}$ حيث $٢٧٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$

فأوجد قيمة المقدار : $\text{جا}(١٨٠^\circ - \theta) + \text{ظا}(٩٠^\circ - \theta) - \text{ظا}(٢٧٠^\circ - \theta)$ «$\frac{-٤}{٥}$»

---

١٨ إذا كانت ب $(-٥ \text{ ك} ، -١٢ \text{ ك})$ هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ فى وضعها القياسى مع دائرة الوحدة ، $١٨٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$

أوجد قيمة : $\text{قتا}(٩٠^\circ - \theta) \text{ جا}(٩٠^\circ + \theta) + ١٢ \text{ ظا}(٢٧٠^\circ + \theta)$ «-٤»

---

١٩ إذا كانت : $\text{جتا}^{٢} \propto = \frac{٩}{٢٥}$ حيث $٩٠^\circ < \propto < ١٨٠^\circ$ أوجد قيمة : $٢٥ \text{ جا } \propto - ٤ \text{ ظتا } \propto$ «٢٣»

---

٢٠ إذا كان : $\text{ظا } \propto = \frac{٣}{٤}$ حيث $\propto$ أصغر زاوية موجبة ، $\text{ظا } \beta = \frac{٥}{١٢}$ حيث $١٨٠^\circ < \beta < ٢٧٠^\circ$

أوجد الدوال المثلثية لكل من الزاويتين $\propto$ ، β ثم أوجد قيمة : $\text{جا } \propto \text{ جتا } \beta - \text{جتا } \propto \text{ جا } \beta$ «$\frac{-١٦}{٦٥}$»

٢١ إذا كان : $\text{جا}\,\alpha = \frac{٣}{٥}$ حيث $\alpha \in \left]\frac{\pi}{٢} \text{ ، } \pi\right[$ ، $١٣\ \text{جتا}\,\beta - ٥ = ٠$ حيث $\beta \in \left]\frac{٣\pi}{٢} \text{ ، } ٢\pi\right[$

أوجد قيمة : $\text{جتا}\,\alpha\ \text{جتا}\,\beta + \text{جا}\,\alpha\ \text{جا}\,\beta$ «$\frac{-٥٦}{٦٥}$»

---

٢٢ إذا كان : $٢٥\ \text{جا}\,\alpha + ٢٤ = ٠$ حيث $١٨٠^\circ < \alpha < ٢٧٠^\circ$ ، $٥\ \text{ظا}\,\beta + ١٢ = ٠$

حيث β أكبر زاوية موجبة ، $\beta \in]٠^\circ \text{ ، } ٣٦٠^\circ[$ أوجد قيمة :

(١) $\text{جا}\,(١٨٠^\circ + \alpha) + \text{جتا}\,(١٨٠^\circ - \beta)$

(٢) $\text{قتا}\,(١٨٠^\circ + \alpha)\ \text{ظتا}\,(٩٠^\circ - \beta) - \text{قا}\,(٣٦٠^\circ + \alpha)\ \text{ظا}\,(٣٦٠^\circ - \beta)$

(٣) $\text{قتا}\,(٩٠^\circ + \alpha)\ \text{ظتا}\,(٢٧٠^\circ + \beta)\ \text{ظا}\,(٢٧٠^\circ - \alpha)\ \text{قتا}\,(٢٧٠^\circ + \beta)$

«$\frac{١٨٧}{٣٢٥}$ ، $\frac{٨٥}{١٤}$ ، $٦\frac{١}{٢}$»

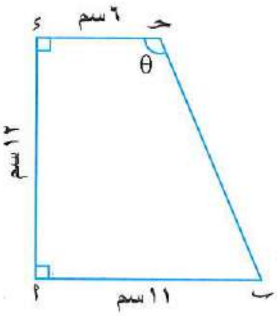
---

٢٣ إذا كان الضلع النهائى للزاوية التى قياسها $(٩٠^\circ - \theta)$ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{٥}{١٣} \text{ ، ص}\right)$

فأوجد الدوال المثلثية للزاوية θ حيث $\theta \in \left]٠ \text{ ، } \frac{\pi}{٢}\right[$

---

٢٤ فى الشكل المقابل :



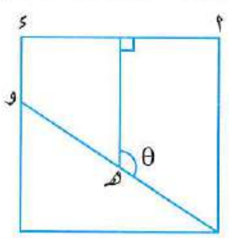
أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : ق (∠ أ) = ق (∠ ء) = ٩٠°

، حـ ء = ٦ سم ، ء أ = ١٢ سم ، أ ب = ١١ سم

أوجد : $\text{جا}\,\theta$ «$\frac{١٢}{١٣}$»

---

٢٥ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء مربع فيه : ٢ ء و = و حـ

أوجد : $\text{قتا}\,\theta$ «$\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$»

اكتشف الخطأ

٢٦ فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزياد إيجاد قيمة : $\text{جا}\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$

فأيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر ذلك.

إجابة كريم

$$\text{جا}\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right) = \text{جا}\left(٢\pi + \theta - \frac{\pi}{٢}\right)$$
$$= \text{جا}\left(\frac{٣\pi}{٢} + \theta\right)$$
$$= -\,\text{جتا}\,\theta$$

إجابة زياد

$$\text{جا}\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right) = \text{جا}\left[-\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)\right]$$
$$= -\,\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$$
$$= -\,(-\,\text{جتا}\,\theta) = \text{جتا}\,\theta$$

ثالثًا / مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) حتا ٤٥° × حتا ٤٦° × حتا ٤٧° × ⋯ × حتا ١٣٥° = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢) حا ٧٥° × حتا ١٢° × قا ١٥° × قتا ٧٨° = ...

(أ) ١ + $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ − ١ (جـ) ٢ (د) ١

(٣) إذا كانت النقاط أ ، ب ، حـ على شبكة تربيعية حيث أ (٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ١) ، حـ (٠ ، −٢)

فإن : حا (∠ ب أ حـ) = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{\sqrt{١٧}}$ (د) $\frac{-٤}{\sqrt{١٧}}$

(٤) $\frac{\text{قا ١° × قا ٢° × ⋯ × قا ٨٨° × قا ٨٩°}}{\text{قتا ١° × قتا ٢° × ⋯ × قتا ٨٨° × قتا ٨٩°}}$ = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٩٠

(٥) إذا كان : ٧ س = $\frac{\pi}{٢}$ فإن : $\frac{\text{حا ٣ س}}{\text{حتا ٤ س}}$ + $\frac{\text{طا ٢ س}}{\text{طتا ٥ س}}$ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

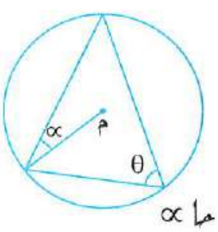
(٦) إذا كانت : حتا^{٢} θ = ١ فإن : θ = ... حيث ن ∈ ص

(أ) ن π (ب) $\frac{ن}{٢}$ π (جـ) ٢ ن π (د) (٢ ن + ١) π

(٧) عدد حلول المعادلة : طا س = −$\sqrt{٣}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ١٥ π هو ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٥ (د) ٣٠

(٨) في الشكل المقابل :

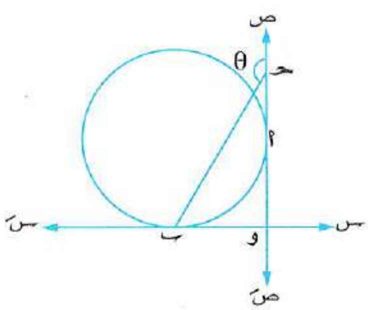


دائرة مركزها م

فإن : طا θ = ...

(أ) طا ∝ (ب) طتا ∝ (جـ) حتا ∝ (د) حا ∝

(٩) في الشكل المقابل :

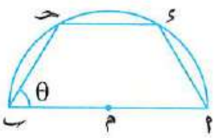


إذا كان : أ (٠ ، ٣) ، حـ (٠ ، ٤)

فإن : حتا θ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{-٣}{٥}$ (د) $\frac{-٣}{٤}$

(١٠) في الشكل المقابل :

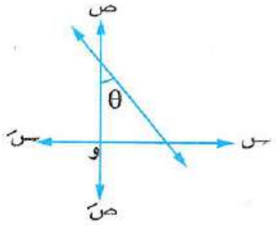


إذا كان : $\overline{\text{أب}}$ قطرًا في نصف دائرة م ، ١٣ حا θ = ١٢

فإن : حتا (∠ أ ء حـ) = ...

(أ) $\frac{-١٢}{١٣}$ (ب) $\frac{-٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥}{١٣}$ (د) $\frac{١٢}{١٣}$

(١١) في الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة الخط المستقيم هي ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٥

، θ زاوية حادة تتكون من تقاطع الخط المستقيم مع محور الصادات

فإن : ....

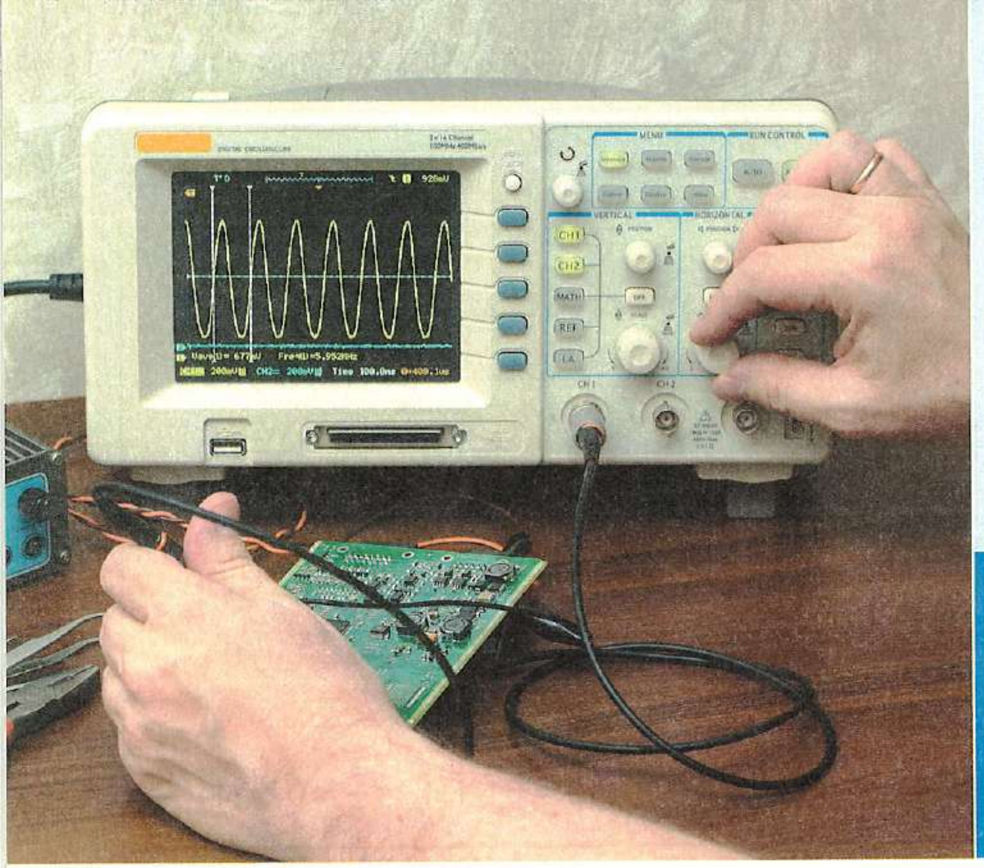
(أ) حتا θ = $\frac{٣}{٤}$ (ب) حا θ = $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ (د) حا θ = $\frac{٣}{٥}$

---

٢ أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) حتا ٢٠° + حتا ٤٠° + حتا ٦٠° + ... + حتا ١٦٠° + حتا ١٨٠° «-١»

(٢) حا ١° + حا ٢° + حا ٣° + ... + حا ٣٥٨° + حا ٣٥٩° «صفر»



الدرس 5

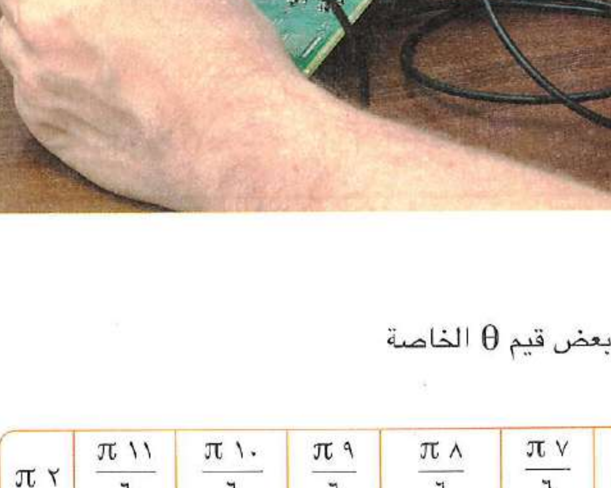
التمثيل البيانى للدوال المثلثية

أولًا دالة الجيب د : د (θ) = جا θ

لتمثيل الدالة د : د (θ) = جا θ بيانيًا نكوِّن جدولًا من بعض قيم θ الخاصة حيث $\theta \in [\,٠ ، ٢\pi\,]$ وقيم جا θ المناظرة لها.

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
جا θ	٠	٠,٥	٠,٨٧	١	٠,٨٧	٠,٥	٠	−٠,٥	−٠,٨٧	−١	−٠,٨٧	−٠,٥	٠

نعيِّن جميع النقط التى حصلنا عليها فى الجدول على شبكة الإحداثيات ونصل جميع النقاط لنحصل على منحنى الدالة د فى الفترة $[\,٠ ، ٢\pi\,]$

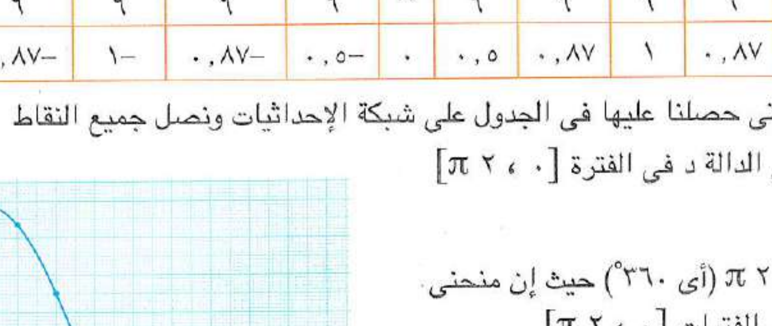


ونلاحظ أن

الدالة دورية ودورتها ٢π (أى ٣٦٠°) حيث إن منحنى هذه الدالة يتكرر فى الفترات $[\,٠ ، ٢\pi\,]$ ، $[\,٢\pi ، ٤\pi\,]$ ، $[\,٤\pi ، ٦\pi\,]$ ، ...

وكذلك فى الفترات $[\,-٢\pi ، ٠\,]$ ، $[\,-٤\pi ، -٢\pi\,]$ ، ...

ويكون الشكل العام لمنحنى هذه الدالة كما يلى :



مما سبق يمكن استنتاج خواص دالة الجيب د : د (θ) = جا θ

١ مجال دالة الجيب هو $]-\infty , \infty[$

٢ • القيمة العظمى للدالة تساوى ١ وتحدث عندما $\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ حيث $ن \in$ ص

• القيمة الصغرى للدالة تساوى -١ وتحدث عندما $\theta = \frac{٣\pi}{٢} + ٢ ن \pi$ حيث $ن \in$ ص

٣ مدى الدالة = $[-١ ، ١]$

٤ الدالة دورية ودورتها ٢π (أى ٣٦٠°)

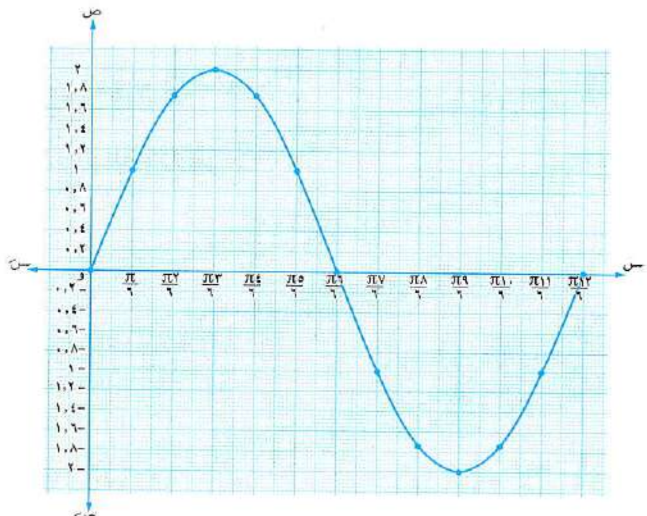
مثال ١

ارسم منحنى الدالة د : ص = ٢ جا θ حيث $\theta \in [٠ ، ٢\pi]$

ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومداها واذكر دورتها.

الحل

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ص	٠	١	١,٧	٢	١,٧	١	٠	١-	١,٧-	٢-	١,٧-	١-	٠



• القيمة العظمى للدالة = ٢ ، القيمة الصغرى للدالة = -٢

• مدى الدالة = $[-٢ ، ٢]$ • دورة الدالة = ٢π (أى ٣٦٠°)

حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة د : ص = ٣ جا θ حيث $\theta \in [٠ ، ٢\pi]$ ومن الرسم أوجد :

١ القيم العظمى والصغرى للدالة. ٢ مدى الدالة. ٣ دورة الدالة.

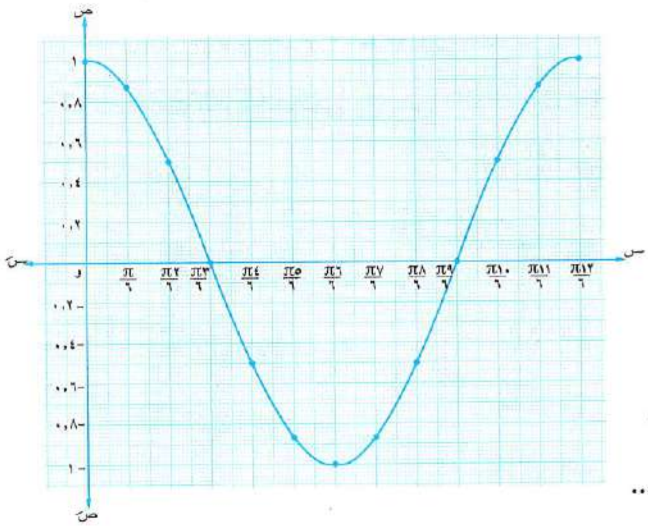
ثانيًا دالة جيب التمام د : د (θ) = جتا θ

لتمثيل الدالة د : د (θ) = جتا θ بيانيًا نكوِّن جدولًا من بعض قيم θ الخاصة

حيث $\theta \in [\,٠ \,،\, ٢\pi\,]$ وقيم جتا θ المناظرة لها

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
جتا θ	١	٠,٨٧	٠,٥	٠	٠,٥−	٠,٨٧−	١−	٠,٨٧−	٠,٥−	٠	٠,٥	٠,٨٧	١

نعيِّن جميع النقط التى حصلنا عليها فى الجدول على شبكة الإحداثيات ونصل جميع النقاط لنحصل على منحنى الدالة د فى الفترة $[\,٠ \,،\, ٢\pi\,]$



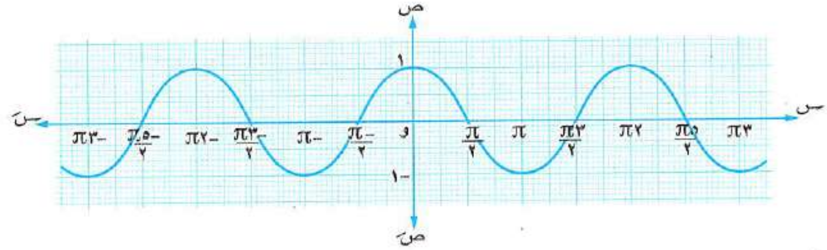
ونلاحظ أن

الدالة دورية ودورتها ٢π (أى ٣٦٠°) حيث إن منحنى هذه الدالة يتكرر فى الفترات

$[\,٠ \,،\, ٢\pi\,]$ ، $[\,٢\pi \,،\, ٤\pi\,]$ ، $[\,٤\pi \,،\, ٦\pi\,]$ ، ...

وكذلك فى الفترات $[\,-٢\pi \,،\, ٠\,]$ ، $[\,-٤\pi \,،\, -٢\pi\,]$ ، ...

ويكون الشكل العام لمنحنى هذه الدالة كما يلى :



مما سبق يمكن استنتاج خواص دالة جيب التمام د : د (θ) = جتا θ

١ مجال دالة جيب التمام هو $]-\infty \,،\, \infty[$

٢
- القيمة العظمى للدالة تساوى ١ وتحدث عندما $\theta = ٢ن\pi$ حيث ن $\in$ ص
- القيمة الصغرى للدالة تساوى −١ وتحدث عندما $\theta = \pi + ٢ن\pi$ حيث ن $\in$ ص

٣ مدى الدالة = $[-١ \,،\, ١]$

٤ الدالة دورية ودورتها ٢π (أى ٣٦٠°)

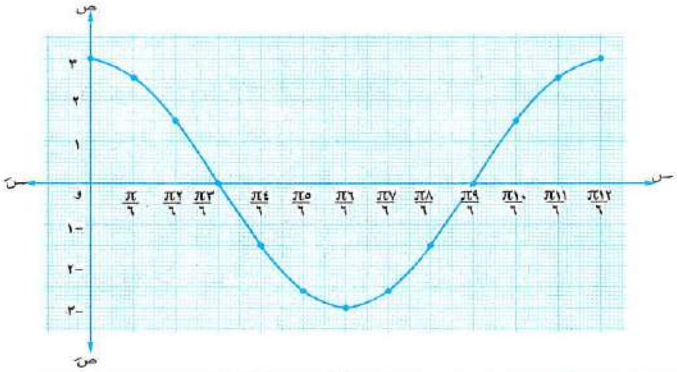
مثـــال ٢

ارسم منحنى الدالة د : ص = ٣ جتا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

ومن الرسم أوجد القيم العظمى والصغرى للدالة ومدى الدالة واذكر دورتها.

الحـــل

θ	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{٢\pi}{٦}$	$\frac{٣\pi}{٦}$	$\frac{٤\pi}{٦}$	$\frac{٥\pi}{٦}$	π	$\frac{٧\pi}{٦}$	$\frac{٨\pi}{٦}$	$\frac{٩\pi}{٦}$	$\frac{١٠\pi}{٦}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢ π
ص	٣	٢,٦	١,٥	٠	−١,٥	−٢,٦	−٣	−٢,٦	−١,٥	٠	١,٥	٢,٦	٣



- القيمة العظمى للدالة = ٣
- ، القيمة الصغرى للدالة = −٣
- مدى الدالة = [−٣ ، ٣]
- دورة الدالة = ٢ π (أى ٣٦٠°)

حاول بنفسك

ارسم منحنى الدالة د : د (θ) = ٢ جتا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

ومن الرسم استنتج :

[١] القيم العظمى والصغرى للدالة. [٢] مدى الدالة. [٣] دورة الدالة.

ملاحظتان

* كل من الدالتين : ص = أ جا ب θ ، ص = أ جتا ب θ دالة دورية دورتها $\frac{٢\pi}{|ب|}$ ومداها [−أ ، أ] حيث أ موجبة.

فمثلًا الدالة د : د (س) = ٣ جا ٥ س مداها [−٣ ، ٣] ودورتها $\frac{٢\pi}{٥}$

* إذا كان مدى الدالة د : د (س) = أ جا ٥ س هو [−٣ ، ٣] فإن : أ = ± ٣

مثـــال ٣

استخدام التكنولوجيا

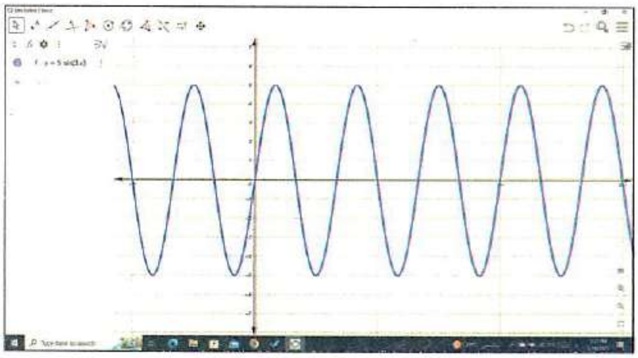
باستخدام أحد برامج الكمبيوتر الرسومية مثل بيانيًا الدالة ص = ٥ جا ٣ θ ومن الرسم أوجد :

- مدى الدالة.
- القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة.
- دورة الدالة.

الحــل

سوف نستخدم برنامج GeoGebra الذى تستطيع تنزيله مجانًا من الموقع www.geogebra.org

١ اكتب فى شريط الإدخال (input) صيغة الدالة كالآتى : $\boxed{Y = 5 \sin (3x)}$



٢ اضغط زر الإدخال (Enter) فى جهازك وسوف يظهر لك الشكل البيانى للدالة كما فى الشكل التالى :

- مدى الدالة = [−٥ ، ٥]
- القيمة العظمى = ٥ ، القيمة الصغرى = −٥
- دورة الدالة = $\frac{٢\pi}{|ب|} = \frac{٢\pi}{٣}$ أى ١٢٠°

ملاحظة :

يمكن رسم الدالة ص = ٥ جا ٣ θ (بالمثال السابق) حيث : ٠° ≤ θ ≤ ١٢٠° بدون استخدام جهاز الكمبيوتر كما يلى :

∵ ٠° ≤ θ ≤ ١٢٠° ∴ ٠° ≤ ٣ θ ≤ ٣٦٠°

بإعطاء ٣ θ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة : ٠° ، ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٢٠° ، ... ، ٣٦٠°

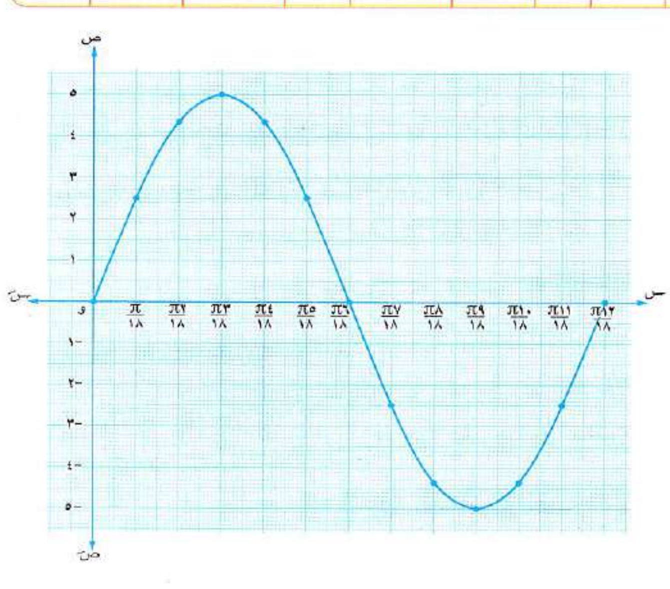
نحصل على قيم θ بالقسمة على ٣ وهى : ٠° ، ١٠° ، ٢٠° ، ٣٠° ، ٤٠° ، ... ، ... ، ١٢٠°

وهى تكافئ : ٠ ، $\frac{\pi}{١٨}$ ، $\frac{٢\pi}{١٨}$ ، $\frac{٣\pi}{١٨}$ ، ... ، $\frac{١٢\pi}{١٨}$

ثم نكوّن الجدول الآتى :

θ	٠	$\frac{\pi}{١٨}$	$\frac{٢\pi}{١٨}$	$\frac{٣\pi}{١٨}$	$\frac{٤\pi}{١٨}$	$\frac{٥\pi}{١٨}$	$\frac{٦\pi}{١٨}$	$\frac{٧\pi}{١٨}$	$\frac{٨\pi}{١٨}$	$\frac{٩\pi}{١٨}$	$\frac{١٠\pi}{١٨}$	$\frac{١١\pi}{١٨}$	$\frac{١٢\pi}{١٨}$
ص = ٥ جا ٣ θ	٠	٢,٥	٤,٣	٥	٤,٣	٢,٥	٠	−٢,٥	−٤,٣	−٥	−٤,٣	−٢,٥	٠

وهذا الشكل يمثل دورة واحدة للدالة ص = ٥ جا ٣ θ والتى يمكن تكرارها للحصول على الشكل الذى ظهر لنا عند تمثيلها باستخدام الكمبيوتر.



تمـارين 11

على التمثيل البيانى للدوال المثلثية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مدى الدالة د : د (θ) = جا θ هو ....

(أ) {١ ، -١}　(ب) [-١ ، ١]　(جـ)]-١ ، ١[　(د)]-∞ ، ∞[

(٢) إذا كانت : د (θ) = جتا ٥ θ فإن مدى الدالة هو ....

(أ) {-٥ ، ٥}　(ب) [-١ ، ١]　(جـ)]-٥ ، ٥[　(د) [-٥ ، ٥]

(٣) مدى الدالة د : د (θ) = ٤ جا ٢ θ حيث $\theta \in$ [٠ ، ٢ π] يساوى ....

(أ) [-٤ ، ٤]　(ب)]-٤ ، ٤[　(جـ) [-٢ ، ٢]　(د)]-٢ ، ٢[

(٤) إذا كان : د (θ) = جا θ ، $\theta \in$]٠ ، π[فإن : مدى الدالة د هو ....

(أ) [-١ ، ١]　(ب)]٠ ، ١]　(جـ) [-١ ، ٠[　(د) ح

(٥) مدى الدالة د : د (س) = $\frac{\text{جتا س}}{٥}$ حيث س $\in$ ح هو ....

(أ) [$-\frac{١}{٥}$ ، $\frac{١}{٥}$]　(ب) [-١ ، ١]　(جـ) [-٥ ، ٥]　(د) [٠ ، $\frac{٢}{٥}$]

(٦) إذا كان مدى الدالة د حيث : د (θ) = ٢ أ جا θ هو الفترة [-٦ ، ٦] فإن : قيمة أ = ...

(أ) ٣　(ب) -٣　(جـ) ٦　(د) أ ، ب معًا.

(٧) القيمة الصغرى للدالة ع : ع (θ) = ٥ جتا ٧ θ هى ....

(أ) ٥　(ب) صفر　(جـ) -٥　(د) -٧

(٨) القيمة الصغرى للدالة د : د (θ) = ١ + جا ٣ θ هى ....

(أ) -٣　(ب) -٢　(جـ) صفر　(د) -٤

(٩) القيمة العظمى للدالة ع : ع (θ) = ٤ جا θ هى ....

(أ) ٤　(ب) ١　(جـ) صفر　(د) ∞

(١٠) الدالة د : د (س) = ٣ + جا (س) تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$　(ب) $\frac{\pi}{٦}$　(جـ) $\frac{\pi}{٢}$　(د) $\frac{٧\pi}{٦}$

(١١) الدالة ص = جا $\left(\frac{\pi}{4} + س\right)$ تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $\frac{-\pi}{2}$ (جـ) $\frac{\pi}{4}$ (د) صفر

(١٢) إذا كان : د (θ) = ٤ جا ٣ θ فإن مجموع القيمة العظمى والصغرى للدالة د (θ) = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) صفر

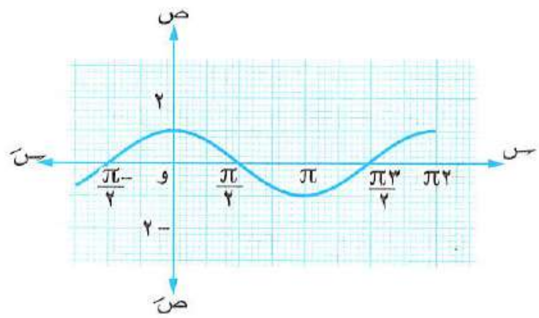
(١٣) الدالة د : د (θ) = ٢ جا ٤ θ دالة دورية ودورتها تساوى ....

(أ) ٢ π (ب) π (جـ) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

(١٤) إذا كانت د دالة دورية ودورتها تساوى $\frac{\pi}{2}$ فإن : د (س) يمكن أن تكون ....

(أ) ٤ جا س (ب) جا ٤ س (جـ) $\frac{1}{4}$ جا س (د) جا $\frac{1}{4}$ س

(١٥) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة مثلثية :



ص = د (س) فإن قاعدة الدالة هى ....

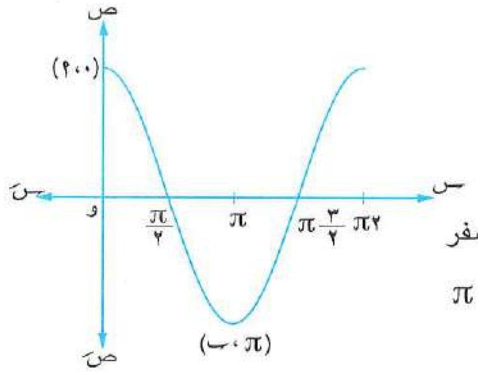
(أ) ص = جا θ

(ب) ص = جتا θ

(جـ) ص = ٢ جتا θ

(د) ص = ٢ جا θ

(١٦) إذا كان الشكل المقابل يوضح منحنى



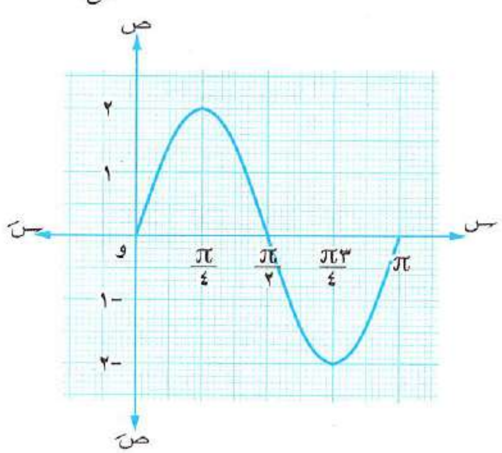
الدالة د : د (س) = جتا س

فإن : ٢ + ب = ...

(أ) ١ (ب) صفر

(جـ) π (د) ٢ π

(١٧) الشكل المقابل يمثل دورة واحدة لمنحنى دالة مثلثية :



ص = د (س) فإن قاعدة الدالة

هى ....

(أ) ص = ٢ جا س

(ب) ص = جا ٢ س

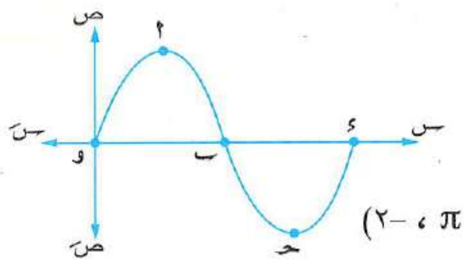
(جـ) ص = ٢ جا ٢ س

(د) ص = جا س

(١٨) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د (س) = ٢ جا $\frac{١}{٣}$ س

فإن إحداثى نقطة حـ ....



(أ) ($\frac{٣}{٢}$ π ، −١) (ب) (٩ π ، −٢)

(جـ) ($\frac{٢}{٩}$ π ، −٢) (د) ($\frac{٩}{٢}$ π ، −٢)

(١٩) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جاس مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ π] يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والمدى لكل من الدوال الآتية :

(١) ص = $\frac{١}{٢}$ جا θ (٢) ص = $\frac{١}{٣}$ جا ٢ θ (٣) ص = ٢ جا ٣ θ

---

٢ ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية ومن الرسم أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة واكتب مدى الدالة :

(١) ص = ٤ جتا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

(٢) ص = ٤ جا θ حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π]

(٣) ص = ٢ جتا θ حيث θ ∈ [−٢ π ، ٢ π]

(٤) ص = ٣ جا θ حيث θ ∈ [−٢ π ، ٢ π]

---

٣ ارسم الشكل البيانى لكل من الدالتين الآتيتين ومن الرسم أوجد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة واكتب مدى الدالة :

(١) ص = جتا ٣ θ حيث ٠° ≤ θ ≤ ١٢٠°

(٢) ص = ٥ جا ٢ θ حيث ٠° ≤ θ ≤ ١٨٠°

---

٤ مثل كلًا من الدالتين ص = ٤ جتا θ ، ص = ٣ جا θ باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية أو بأحد برامج الحاسوب الرسومية ومن الرسم أوجد :

(١) مدى الدالة. (٢) القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\frac{٢ - جا س}{٣}$ = م فإن : ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ ≥ م ≥ ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ ≥ م ≥ ٣ (جـ) ١ ≥ م ≥ ٣ (د) ٢ ≥ م ≥ ٤

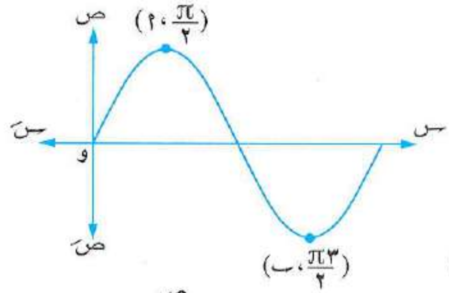
(٢) إذا كانت النقطتان (س$_١$ ، جتا س$_١$) ، (س$_٢$ ، جتا س$_٢$) تقعان على منحنى الدالة د : د (س) = جتا س فإن أكبر قيمة للمقدار (جتا س$_١$ − جتا س$_٢$) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) °١٨٠

(٣) إذا كانت : د (س) = ؟ جتا ب س حيث ؟ > ٠ ، ب > ٠ دالة دورية ودورتها π ومداها [−٣ ، ٣] فإن : ؟ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ٦ (د) ٥

(٤) إذا كان الشكل المقابل يوضح منحنى ص = جا س فإن : |؟| + |ب| = ...



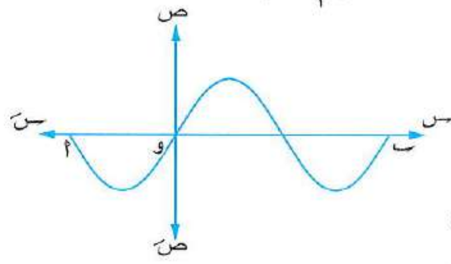
(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) π (د) ٢ π

(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت : ص = جا س

فإن : ب − ؟ = ...



(أ) π (ب) ٢ π

(جـ) ٣ π (د) ٤ π

(٦) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٣ س مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ π] يساوى ....

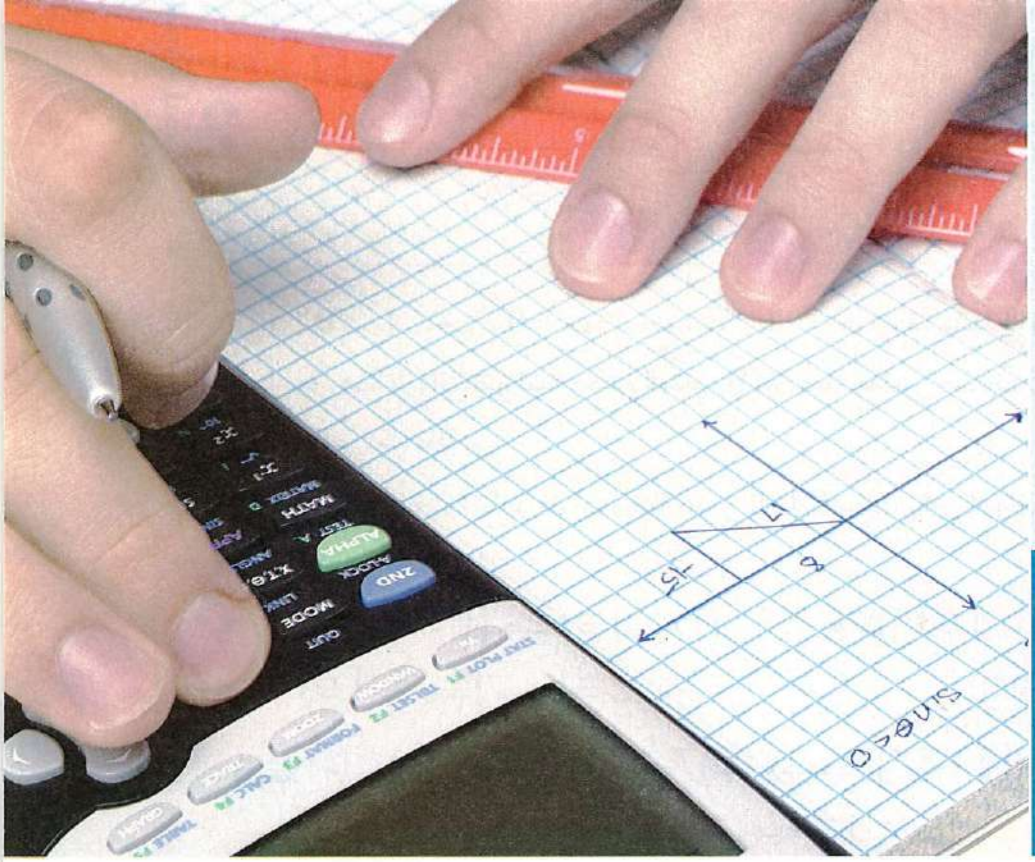
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

(٧) إذا كان عدد مرات تقاطع منحنى الدالة د مع محور السينات حيث د (س) = جا ؟ س يساوى ٩ مرات فى الفترة [٠ ، ٢ π] فإن : ؟ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٤

(٨) عدد المرات التى تصل فيها الدالة د : د (س) = جا ٢ س + ١ إلى قيمتها العظمى فى الفترة [٠ ، ٢ π] يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤



الدرس

6

إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

* نعلم أنه : إذا كانت $\boxed{\text{ص} = \text{جا}\ \theta}$ فإنه يمكن إيجاد قيمة ص إذا علمنا قيمة θ

فمثلًا إذا كانت θ = ٣٠° فإن : ص = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

* هناك صورة أخرى تستخدم فى إيجاد قيمة θ إذا علمت قيمة ص وهى : $\boxed{\theta = \text{جا}^{-1}\ \text{ص}}$

فمثلًا إذا كانت ص = $\frac{١}{٢}$ فإن : θ = جا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٣٠°

مثال ١

أوجد قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التى تحقق كلًا مما يأتى :

١ جا θ = ٠,٦٤٣٨ ٢ جتا θ = ٠,٤٥١٧

الحل

١ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

SHIFT Sin^{-1} Sin 0 . 6 4 3 8 = 0,,,

فيظهر على الشاشة العدد "32.75 '4 °40

∴ θ ≃ ٤٠° ٤′ ٣٣″

٢ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

SHIFT cos^{-1} cos 0 . 4 5 1 7 = 0,,,

فيظهر على الشاشة "49.9 '8 °63 ∴ θ ≃ ٦٣° ٨′ ٥٠″

لاحظ

إننا استخدمنا الآلة الحاسبة لأن قيم الدالة المثلثية ليست من الدوال الخاصة أو المنتسبة إليها.

ملاحظة

الدوال : θ = جا$^{-1}$ س ، θ = جتا$^{-1}$ س ، θ = ظا$^{-1}$ س تعرف بأنها الدوال العكسية للدوال المثلثية الأساسية وهذه الدوال تنتج قيمة وحيدة للمتغير θ لكل قيمة للمتغير س وتعين قيمة θ داخل نطاق محدد حسب خواص كل دالة

ولذلك فإن الآلة الحاسبة تأخذ فترات معينة تنتمى إليها θ بحيث يكون للدوال المثلثية دوالاً عكسية وهى كالتالى :

- جا$^{-1}$ أ ∈ $\left[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right]$ حيث أ ∈ [-١ ، ١]
- جتا$^{-1}$ أ ∈ [٠ ، π] حيث أ ∈ [-١ ، ١]
- ظا$^{-1}$ أ ∈ $\left]\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right[$ حيث أ ∈ ح

فمثلًا جا$^{-1}$ $\left(-\frac{١}{٢}\right)$ = -٣٠° **أى** $\frac{-\pi}{٦}$ (قيمة وحيدة ∈ $\left[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}\right]$)

، جتا$^{-1}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ = ٦٠° **أى** $\frac{\pi}{٣}$ (قيمة وحيدة ∈ [٠ ، π])

وبالتالى فإنه عند حساب θ حيث θ = جا$^{-1}$ أ أ، θ = جتا$^{-1}$ أ أ، θ = ظا$^{-1}$ أ

نستخدم الآلة مباشرة ويكون الحل قيمة وحيدة

أما عند حساب θ حيث ٠ < θ < ٣٦٠° ، جا θ = أ أ، جتا θ = أ أ، ظا θ = أ = أ

نتبع الخطوات كما بالمثال التالى.

مثال ٢

إذا كان : ٠° < θ < ٣٦٠° فأوجد θ التى تحقق كلًّا مما يأتى :

١ جتا θ = ٠,٨١٧٧ ٢ ظا θ = -٨,٦٤٢١

الحل

١ ∵ جتا θ = ٠,٨١٧٧ > ٠ (موجبة) ∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

نوجد الزاوية الحادة التى جيب تمامها ٠,٨١٧٧ وذلك بكتابة جتا$^{-1}$ ٠,٨١٧٧ باستخدام مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

SHIFT COS ($\cos^{-1}$) 0 . 8 1 7 7 = °'''

∴ جتا$^{-1}$ ٠,٨١٧٧ ≃ ٣٥° ٨َ ٤١ً

∴ الربع الأول : θ ≃ ٣٥° ٨َ ٤١ً ، الربع الرابع : θ ≃ ٣٦٠° - (٣٥° ٨َ ٤١ً) = ٣٢٤° ٥١َ ١٩ً

[٢] ∵ ظتا θ = −٨,٦٤٢١ < ٠ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع.

نوجد الزاوية الحادة التى ظل تمامها | −٨,٦٤٢١ |

وذلك بكتابة ظتا$^{-1}$ ٨,٦٤٢١ باستخدام مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار :

SHIFT tan^{-1} tan 8 . 6 4 2 1 x^{-1} = °'''

∴ ظتا$^{-1}$ ٨,٦٤٢١ ≃ ٦ ٣٦ ٢°

∴ الربع الثانى : θ ≃ ١٨٠° − (٦ ٣٦ ٢°) = ٥٨ ٢٣ ١٧٣°

، الربع الرابع : θ ≃ ٣٦٠° − (٦ ٣٦ ٢°) = ٥٨ ٢٣ ٣٥٣°

حاول بنفسك

أوجد θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠° التى تحقق أن :

[١] حا θ = ٠,٨ [٢] ظا θ = ٠,٤٦٩٥ [٣] قتا θ = −٢,٩١١٥

مثال ٣

إذا قطع الضلع النهائى لزاوية موجبة قياسها θ فى وضعها القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب ($\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$)
فأوجد : θ حيث ٠° < θ < ٣٦٠°

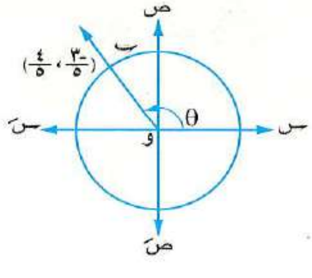
الحل

∵ النقطة ب ($\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$) تقع فى الربع الثانى.

∴ الزاوية الموجهة التى قياسها θ تقع فى الربع الثانى.

، ∵ حا θ = ص = $\frac{٤}{٥}$

∴ θ = حا$^{-1}$ $\frac{٤}{٥}$



وباستخدام الآلة الحاسبة بالتتابع من اليسار إلى اليمين لإيجاد حا$^{-1}$ $\frac{٤}{٥}$

SHIFT sin $\frac{4}{5}$ = °'''

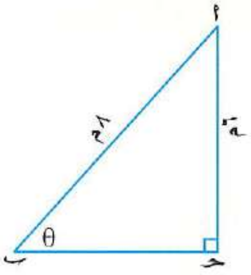
∴ حا$^{-1}$ $\frac{٤}{٥}$ ≃ ٤٨ ٧ ٥٣°

∴ θ = ١٨٠° − (٤٨ ٧ ٥٣°) = ١٢ ٥٢ ١٢٦°

مثال ٤

سلم طوله ٨ أمتار يستند على جدار رأسى وأرض أفقية فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوى ٦ أمتار. فأوجد بالراديان قياس زاوية ميل السلم على الأرض.

الحل



السلم يصنع مع الحائط الرأسى والأرض الأفقية مثلثاً قائم الزاوية وليكن

Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى حـ

∴ جا θ = $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

حيث : $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$ ∴ θ = جا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$

وباستخدام الآلة الحاسبة بالتتابع من اليسار إلى اليمين لإيجاد جا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$

SHIFT sin $\frac{3}{4}$ = °'''

∴ $\theta \simeq ٤٨^\circ\ ٣٥'\ ٢٥''$ ∴ $\theta^{د} = ٤٨^\circ\ ٣٥'\ ٢٥'' \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ٠,٨٤٨^{د}$

∴ قياس زاوية ميل السلم على الأرض $\simeq ٠,٨٤٨^{د}$

ملاحظة

فى المثال السابق :

θ = جا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$ يمكن إيجاد θ بالراديان مباشرةً باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى :

١ اضغط بالتتابع من اليسار إلى اليمين لتحويل الآلة من النظام الستينى (Deg) إلى النظام الدائرى (Rad)

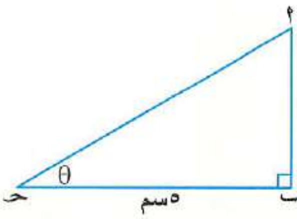
SHIFT MODE 4

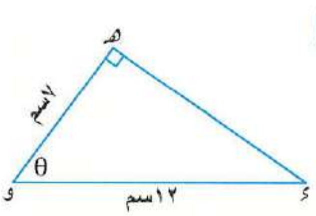
٢ أوجد θ بالراديان مباشرةً بالضغط بالتتابع من اليسار إلى اليمين SHIFT sin $\frac{3}{4}$ =

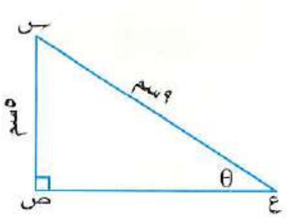
∴ $\theta^{د} \simeq ٠,٨٤٨$

حاول بنفسك

أوجد θ بالراديان فى كل من المثلثات القائمة الآتية :

١


٢


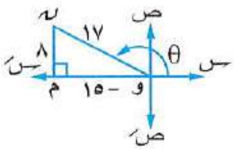
٣


مثال ٥

إذا كان : جا θ = $\frac{٨}{١٧}$ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠°

فأوجد θ لأقرب ثانية ثم أوجد باقى الدوال المثلثية للزاوية التى قياسها θ

الحل



∵ جا θ = $\frac{٨}{١٧}$ ∴ θ = جا$^{-١}$ $\frac{٨}{١٧}$ ≃ ٢١ ٤ً ٢٨ °

، ∵ ٩٠° < θ < ١٨٠° ∴ θ تقع فى الربع الثانى.

∴ θ = ١٨٠° − ٢١ ٤ً ٢٨ ° = ١٥١° ٥٥َ ٣٩ً

∵ جا θ = $\frac{٨}{١٧}$ ∴ نعتبر أن م ن = ٨ وحدة طول ، و ن = ١٧ وحدة طول

فيكون (باستخدام نظرية فيثاغورس) و م = ١٥ وحدة طول وله إشارة سالبة

∴ جتا θ = $\frac{\text{و م}}{\text{و ن}}$ = $\frac{-١٥}{١٧}$ ، ظا θ = $\frac{\text{م ن}}{\text{و م}}$ = $\frac{٨}{-١٥}$ = − $\frac{٨}{١٥}$

، قتا θ = $\frac{\text{و ن}}{\text{م ن}}$ = $\frac{١٧}{٨}$ ، قا θ = $\frac{\text{و ن}}{\text{و م}}$ = $\frac{١٧}{-١٥}$ = − $\frac{١٧}{١٥}$ ، ظتا θ = $\frac{\text{و م}}{\text{م ن}}$ = $\frac{-١٥}{٨}$

حاول بنفسك

إذا كان : جا θ = − $\frac{١}{٣}$ ، ٢٧٠° ≤ θ ≤ ٣٦٠°

[١] أوجد : θ لأقرب ثانية. [٢] أوجد قيمة كل من : جتا θ ، ظا θ ، قا θ

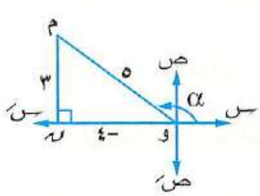
مثال ٦

إذا كان : جا α = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٩٠° < α < ١٨٠° ، ظا β = − $\frac{١٢}{٥}$ حيث β ∈] $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π [

، جا θ = جا (١٨٠° − α) جتا (β − ١٨٠°) جتا α

أوجد : θ لأقرب دقيقة حيث ٠° < θ < ٩٠°

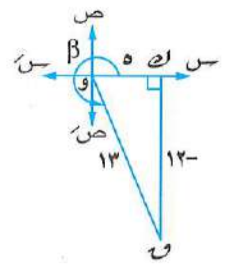
الحل



∵ (و ن)^٢ = (٥)^٢ − (٣)^٢ = ١٦

∴ و ن = ٤ وحدة طول وإشارته سالبة.

، ∵ (و ق)^٢ = (١٢)^٢ + (٥)^٢ = ١٦٩ ∴ و ق = ١٣ وحدة طول.



∴ حا θ = حا (١٨٠° − α) حتا (β − ١٨٠°) حتا α

= حا α حتا (١٨٠° + β) حتا α

= حا α × (− حتا β) × حتا α = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{-٥}{١٣}$ × $\frac{-٤}{٥}$ = $\frac{١٢}{٦٥}$

، ∵ ٠° < θ < ٩٠°   ∴ θ تقع فى الربع الأول.

وباستخدام حاسبة الجيب نجد أن : θ ≃ ١٠° ٣٨َ

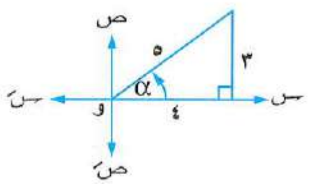
مثال ٧

إذا كان : ٥ حا (١٨٠° − α) = ٣ حيث ٠° < α < ٩٠°

، ٥ ظتا (٩٠° + β) − ١٢ = ٠ حيث ٩٠° < β < ١٨٠°

أوجد قيمة θ حيث : حتا θ = حتا (٩٠° + α) ظا (٢٧٠° + β) ظا (٢٧٠° − α) حيث θ ∈]٠ ، ٢π[

الحل



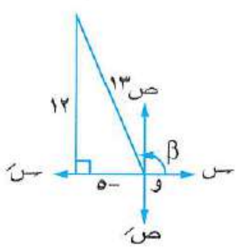
∵ ٥ حا (١٨٠° − α) = ٣   ∴ ٥ حا α = ٣

∴ حا α = $\frac{٣}{٥}$ حيث α تقع فى الربع الأول.

كذلك ∵ ٥ ظتا (٩٠° + β) = ١٢

∴ ٥ (− ظا β) = ١٢

∴ ظا β = $\frac{-١٢}{٥}$ حيث β تقع فى الربع الثانى.



حتا θ = حتا (٩٠° + α) ظا (٢٧٠° + β) ظا (٢٧٠° − α)

= (− حا α) × (− ظتا β) × ظتا α = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{-٥}{١٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{-١}{٣}$

، ∵ حتا θ < ٠

∴ θ ∈ الربع الثانى.   أ، θ ∈ الربع الثالث.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها $\frac{١}{٣}$ هى ٧٠° ٣٢َ

∴ θ = ١٨٠° − ٧٠° ٣٢َ = ١٠٩° ٢٨َ   أ، θ = ١٨٠° + ٧٠° ٣٢َ = ٢٥٠° ٣٢َ

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : θ = جا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٢٤٠° (د) ٣٠٠°

(٢) إذا كان : قتا θ = −٢ ، ٢٧٠° < θ < ٣٦٠° فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٣٠٠° (جـ) ٣٣٠° (د) ١٥٠°

(٣) إذا كان : ظا θ = − $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، ٩٠° < θ < ١٨٠° فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٢١٠°

(٤) إذا كان : ظا θ = ١,٨ وكانت ٩٠° $\leq \theta \leq$ ٣٦٠° فإن : $\theta \simeq$ ....

(أ) ٥٧َ ٦٠° (ب) ٣َ ١١٩° (جـ) ٥٧َ ٢٤٠° (د) ٣َ ٢٩٩°

(٥) إذا كان : ص = جا (٩٠° − θ) فإن : θ = ...

(أ) جا$^{-1}$ ص (ب) جتا$^{-1}$ ص (جـ) جا$^{-1}$ θ (د) جتا$^{-1}$ θ

(٦) إذا كانت : قتا θ = − $\sqrt{2}$ فإن كلًا مما يأتى يصلح أن يكون قيمة θ ماعدا ....

(أ) ٤٥° (ب) −٤٥° (جـ) −١٣٥° (د) ٢٢٥°

(٧) جا$^{-1}$ ٠,٧ $\simeq$ ....

(أ) ٣٧ً ٢٥َ ٤٤° (ب) ٢٣ً ٣٤َ ١٣٥°

(جـ) ٣٧ً ٢٥َ ٢٢٤° (د) ٢٣ً ٣٤َ ٣١٥°

(٨) جا$^{-1}$ (−٠,٦) $\simeq$ ....

(أ) −٣٦,٨٧° (ب) ١٤٣,١٣° (جـ) ٢١٦,٨٧° (د) ٣٢٣,١٣°

(٩) إذا كان : جتا θ = ٠,٤٣٦ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : $\theta \simeq$ ....

(أ) ٩َ ٦٤° (ب) ٥١َ ١١٥° (جـ) ٩َ ٢٤٤° (د) ٥١َ ٢٩٥°

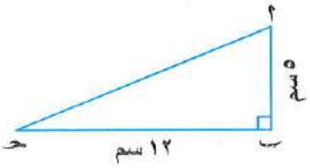
(١٠) إذا كان : جا θ = − $\frac{1}{2}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة فإن : θ = ...°

(أ) −٣٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٢١٠ (د) ١٥٠

(١١) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى وضعها القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ، ص\right)$ حيث ص $\in$ ح$^{+}$ فإن : θ = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٢١٠ (د) ٣٣٠

(١٢) فى الشكل المقابل :



ق(∠ أ حـ ب) = ...

(أ) ظا$^{-1}\left(\frac{١٢}{٥}\right)$ (ب) حا$^{-1}\left(\frac{١٢}{١٣}\right)$

(جـ) قا$^{-1}\left(\frac{١٣}{١٢}\right)$ (د) حتا$^{-1}\left(\frac{١٢}{١٣}\right)$

(١٣) حتا$\left(\frac{١}{٢}\right)^{\circ}$ × حتا$^{-1}\left(\frac{١}{٢}\right)$ ≃ ....°

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٦٠ (د) حتا $\frac{١}{٤}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد بالقياس الستينى قياس أصغر زاوية موجبة θ تحقق كلًا من :

(١) حا θ = ٠,٦	(٢) حتا θ = ٠,٧٨٦٥	(٣) ظا θ = ٢,٤٥٧٧
(٤) ظا θ = −٠,٨٢٢٧	(٥) حا θ = −٠,٤٦٥٢	(٦) حتا θ = −٠,٥٢٠٦
(٧) ظتا θ = ٣,٦٣١٨	(٨) ظتا θ = −١,٤٦١٢	(٩) قا θ = ١,٠٤٧٨
(١٠) قتا θ = −٢,٥٤٦٦	(١١) قا θ = −٣,٥٧	(١٢) قتا θ = ٢,٩٨١١

٢ إذا كان ٠° < θ < ٣٦٠° فأوجد θ التى تحقق كلًا مما يأتى :

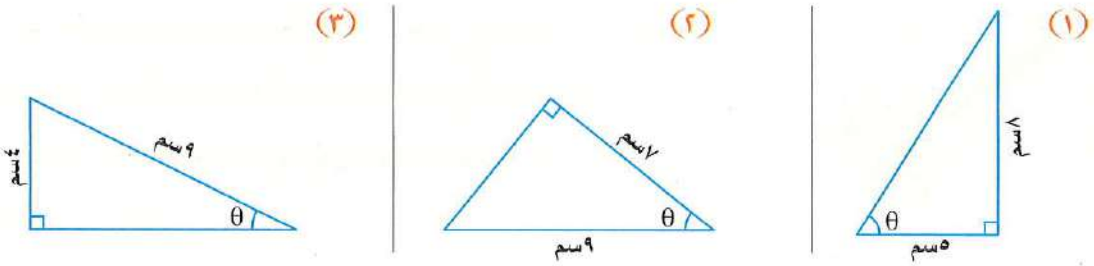
(١) حا θ = ٠,٨٦٦٠٣	(٢) حتا θ = −٠,٤٧٥٢	(٣) قتا θ = −١,٢٥٧٦
(٤) ظا θ = ١,٥٤١٧	(٥) حتا θ = −٠,٦٤٢	(٦) قا θ = ٢,٠٥١٥
(٧) قتا θ = −١,٨٧١٥	(٨) ظتا θ = −٢,٧٠١٢	(٩) ظا θ = −٢,١٤٥٦

٣ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها θ فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب

فأوجد : ق(∠ θ) حيث ٠° < θ < ٣٦٠° عندما :

(١) ب$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ (٢) ب$\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ (٣) ب$\left(\frac{٦}{١٠} ، \frac{-٨}{١٠}\right)$

٤ أوجد قياس زاوية θ بالقياس الستينى فى كل شكل من الأشكال الآتية :



---

٥ إذا كان : حا $\theta = \frac{١}{٣}$ وكانت $٩٠° \leq \theta \leq ١٨٠°$:

(١) احسب قياس زاوية θ لأقرب ثانية. (٢) أوجد قيمة كل من : حتا θ ، ظا θ ، قتا θ

---

٦ أ ب حـ مثلث فيه حتا أ = −٠,٥٨٠٧ ، ظا ب = ٠,٤٥٧٨ فأوجد لأقرب دقيقة ق (∠ حـ) «٢٩° ٥٤´»

---

٧ إذا كان : $٠° < \theta < ٣٦٠°$ أوجد قيم θ بالدرجات والدقائق والتى تحقق :

ظا θ = حا ٤٨ ٢٣° + حتا ٣٢ ٨٤° «٣١ ٢٦° أ، ٣١ ٢٠٦°»

---

٨ إذا كان : $٠° < \theta < ٣٦٠°$ أوجد قيم θ بالدرجات والدقائق والتى تحقق :

حتا θ = حا ٧٠° − ٢ حتا ٨٠° ظا ٧٥° «٥٣ ١١٠° أ، ٧ ٢٤٩°»

---

٩ إذا كان : ظا $\theta = \frac{٤}{٣}$ حيث θ قياس أكبر زاوية موجبة ، $\theta \in [٠ ، ٢\pi]$

أوجد قيمة α لأقرب دقيقة إذا كان :

حا α = حا ١٥٠° حا $(-\theta)$ + $\frac{١}{٥}$ قتا $(١٨٠° + \theta)$ ظا ٢٢٥° «٣٢ ٤٠° أ، ٢٨ ١٣٩°»

---

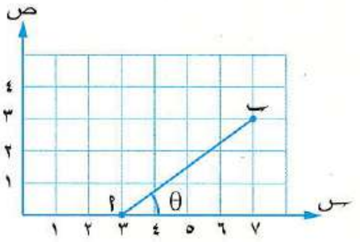
١٠ إذا كان : حا $\alpha = \frac{٣}{٥}$ حيث $٩٠° < \alpha < ١٨٠°$ أوجد θ من المعادلة :

$\frac{-٥}{٤}$ حتا $(٣٦٠° - \alpha)$ + ظتا $(٢٧٠° - \theta) = ٢$ حيث $٠° < \theta < ٣٦٠°$ «٤٥° أ، ٢٢٥°»

---

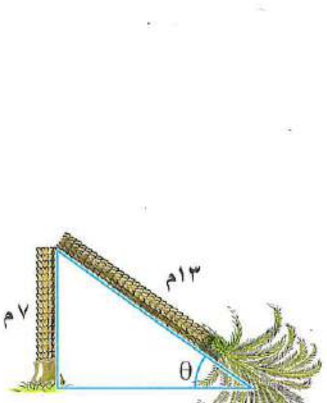
١١ الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين أ (٣ ، ٠) ، ب (٧ ، ٣)

أوجد قياس الزاوية المحصورة بين $\overline{\text{أب}}$ ومحور السينات.



«٢ ٥٢ ٣٦°»

اكتشف الخطأ



١٢ بسبب الرياح انكسرت نخلة طولها ٢٠ مترًا ، بحيث تأخذ الشكل المجاور ، فإذا كان طول الجزء الرأسى منها ٧ أمتار ، والجزء المائل ١٣ مترًا وكانت θ هى الزاوية التى يصنعها الجزء المائل مع الأفقى. فأوجد θ بالتقدير الستينى.

إجابة كريم

$\because$ قتا $\theta = \frac{١٣}{٧}$ $\therefore$ $\theta =$ قتا$^{-1}$ $\frac{١٣}{٧}$

$\therefore \theta \simeq ٣٢^\circ\ ٣٤'\ ٤٤''$

إجابة عمر

$\because$ قا $\theta = \frac{١٣}{٧}$ $\therefore$ $\theta =$ قا$^{-1}$ $\frac{١٣}{٧}$

$\therefore \theta \simeq ٥٧^\circ\ ٢٥'\ ١٦''$

أى الإجابتين صحيحة ؟ ولماذا ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

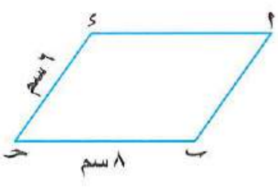
(١) قتا (جتا$^{-1}$ صفر) = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) صفر

(٢) حا (ظا$^{-1}$ $\frac{٥}{١٢}$) = ...

(أ) $\frac{٥}{١٢}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٢}{١٣}$ (د) ١٣

(٣) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء متوازى أضلاع مساحته = ٤٠ سم^٢

فإن : ق (د أ) ≃ ....

(أ) ٣٧° (ب) ٥٦° (جـ) ٥٣° (د) ٣٤°

(٤) ظا$^{-1}$ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ + ظتا$^{-1}$ $\sqrt{٣}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$

(٥) جتا$^{-1}$ س + جا$^{-1}$ س = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

تطبيقات حياتية على الوحدة الثانية

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ يدور أحد لاعبى الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها 200°
ارسم هذه الزاوية فى الوضع القياسى وأوجد قياسها بالتقدير الدائرى. «$3,49^{ء}$»

---

٢ كم المسافة التى تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم ؟
«2π سم»

---

٣ قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٦ ساعات ، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم ، فأوجد سرعته بالكيلو متر فى الساعة. «٩٤٢٤,٧٨ كم/س»

---

٤ قمر صناعى يدور حول الأرض فى مسار دائرى دورة كاملة كل ٣ ساعات ، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريبًا ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم.

فأوجد المسافة التى يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقربًا الناتج لأقرب كيلومتر. «٢٠٩٤٤ كم»

---

٥ تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذى يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها ، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل 15° لكل ساعة.

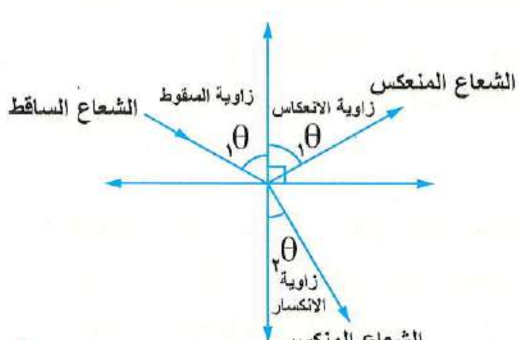
(١) أوجد قياس الزاوية بالراديان التى يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

(٢) بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ راديان ؟

(٣) مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم ، أوجد بدلالة π طول القوس الذى يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.
«$1,05^{ء}$ ، ٨ ساعات ، 20π سم»

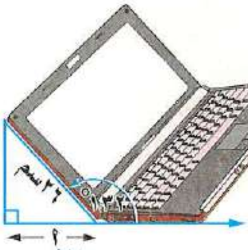
---

٦ عند سقوط أشعة الضوء على سطح شبه شفاف ، فإنها تنعكس بنفس زاوية السقوط ولكن البعض منها ينكسر عند مروره خلال هذا السطح. كما فى الشكل المجاور :



إذا كان جا θ_1 = ن جا θ_2
، كانت ن = $\sqrt{3}$ ، $\theta_1 = 60^\circ$ فأوجد قياس زاوية θ_2
«30°»

٧ عند استخدام كريم حاسوبه المحمول كان قياس زاوية ميله مع الأفقى ١٣٢° كما هو موضح بالشكل المقابل :

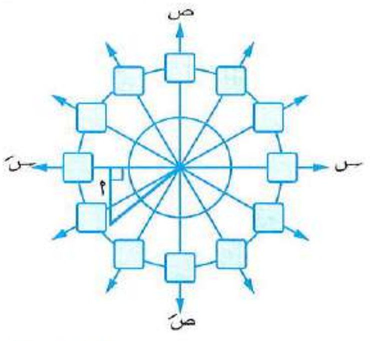


(١) ارسم الشكل السابق فى المستوى الإحداثى ، بحيث تكون الزاوية ١٣٢° فى الوضع القياسى ثم أوجد زاويتها المنتسبة.

(٢) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيم أ ، ثم أوجد قيمة أ لأقرب سنتيمتر. «١٧ سم»

---

٨ تنتشر لعبة العجلة الدوارة فى مدينة الملاهى ، وهى عبارة عن عدد من الصناديق تدور فى قوس دائرى يبلغ طول نصف قطره ١٢ مترًا ، فإذا كان قياس الزاوية المشتركة مع الضلع النهائى فى الوضع القياسى $\frac{٥\pi}{٤}$:



(١) ارسم الزاوية التى قياسها $\frac{٥\pi}{٤}$ فى الوضع القياسى.

(٢) اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيمة أ ثم أوجد قيمة أ بالمتر لأقرب رقمين عشريين. «٨,٤٩ متر»

---

٩ يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعًا نتيجة حركة المد والجذر ، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار ، وكانت حركة المد والجذر فى ذلك اليوم تخضع للعلاقة ف = ٦ جا (١٥ ن)° + ١٠ حيث ن هو الزمن الذى ينقضى بعد منتصف الليل بالساعات تبعًا لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة.

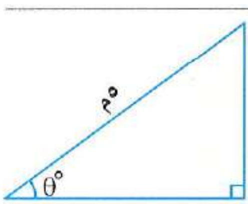
(١) أوجد عدد المرات التى يبلغ فيها عمق المياه فى الميناء ١٠ أمتار تمامًا.

(٢) ارسم مخططًا بيانيًا يبيّن كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجذر أثناء اليوم.

(٣) أوجد عدد الساعات خلال اليوم التى تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء.

---

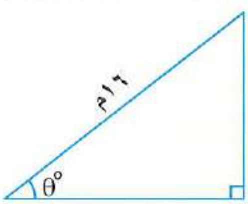
١٠ سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوى ٣ أمتار فأوجد بالراديان قياس زاوية ميل السلم على الأفقى.



«٠,٦٤٤ ء»

---

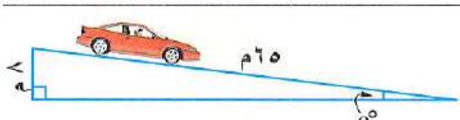
١١ توجد لعبة التزحلق فى مدينة الألعاب، فإذا كان ارتفاع إحــدى اللعبات ١٠ أمتار وطولها ١٦ مترًا كما فى الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية θ ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات لأقرب جزء من ألف.



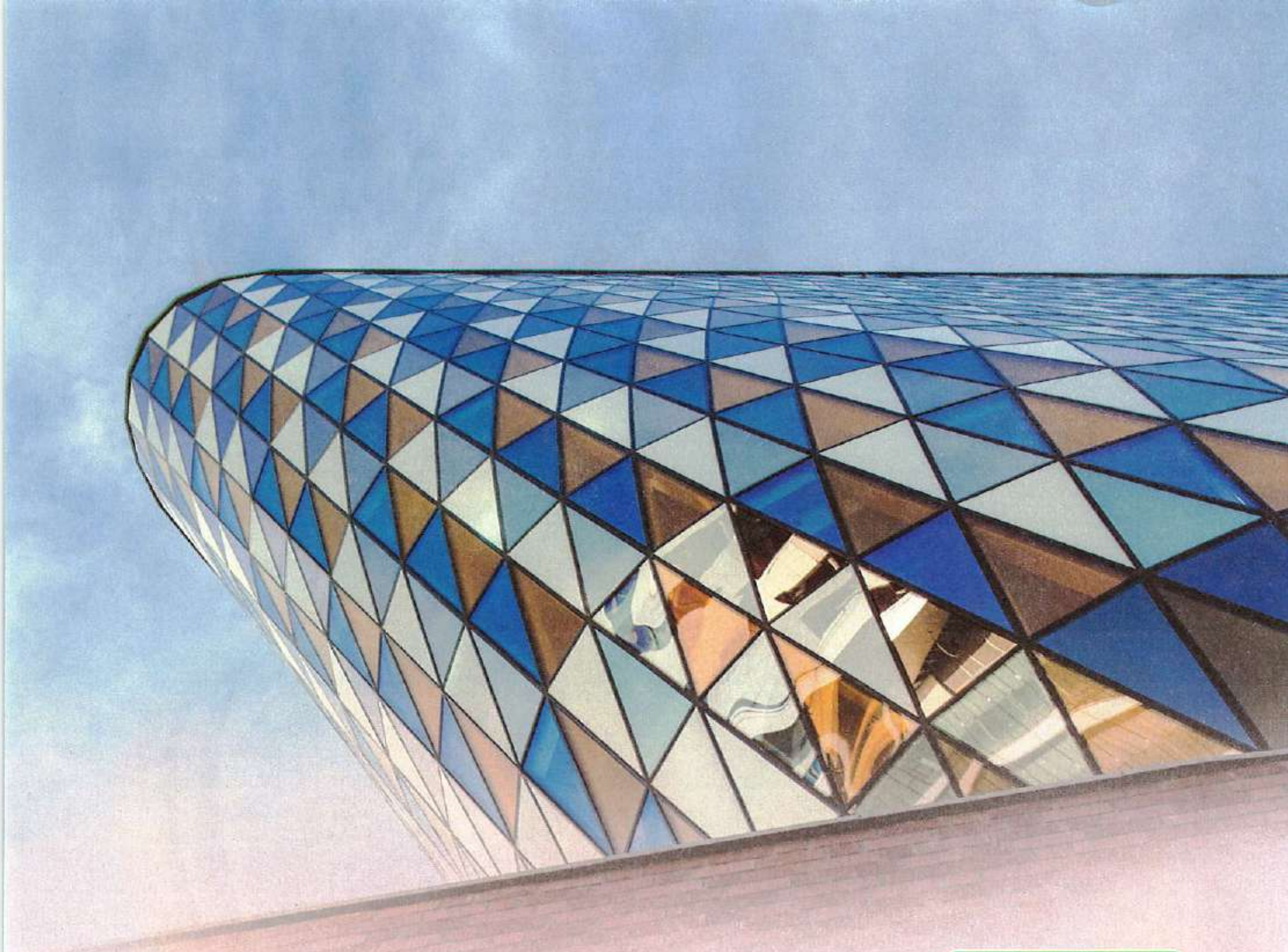
«٣٨,٦٨٢°»

---

١٢ يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ مترًا وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى زاوية قياسها θ أوجد θ بالتقدير الستينى.



«٧° ٤َ ١١ً»



ثانيًا

الهندسة

الوحدة 3 التشابه.

الوحدة 4 نظريات التناسب فى المثلث.

الوحدة الثالثة

التشابه

دروس الوحدة

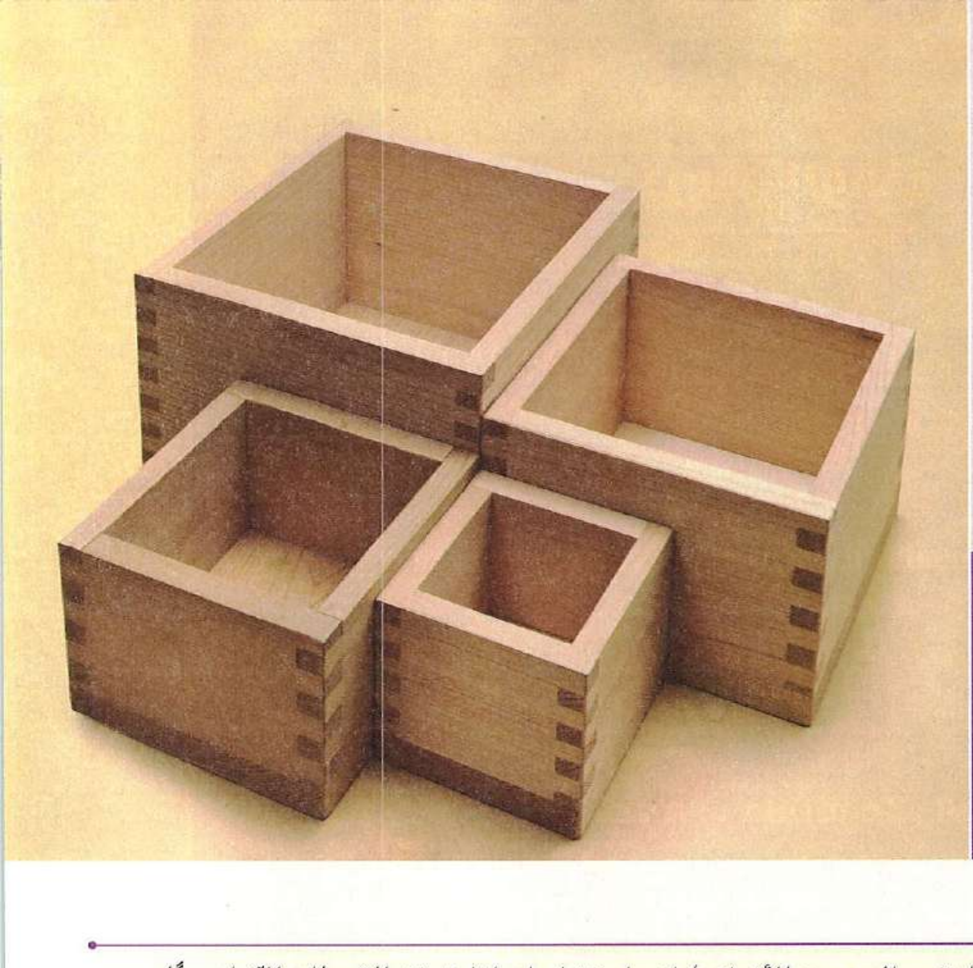
- الدرس 1 : تشـابه المضلعــات.
- الدرس 2 : تشـابه المثلثــات.
- الدرس 3 : العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين.
- الدرس 4 : تطبيقـات التشـابه فى الدائـــرة.

فى نهاية الوحـــدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الثالثة.

نـواتـج الـتـعـلُّـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يستدعى ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية عن موضوع التشابه.
- يستخدم معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.
- يتعرف مسلمة التشابه «إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظيرتيهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين».
- يعرف أنه إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.
- يعرف أنه إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين ، وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.
- يحل تمارين وتطبيقات رياضية على حالات تشابه المثلثات.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر ، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان ، كان المثلثان متشابهين».
- يستخدم تشابه المثلثات فى القياس غير المباشر.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على : «النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما».
- يتعرف ويستنتج العلاقة بين وترين متقاطعين فى دائرة.
- يتعرف ويستنتج العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- يتعرف العلاقة بين طول مماس وجزأى قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- ينمذج ويحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات فى الدائرة.



الدرس

1

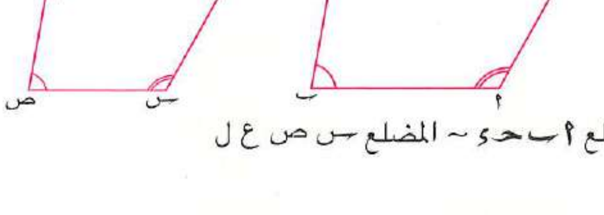
تشابه المضلعات

تعريف

يُقال لمضلعين $م_1$ ، $م_2$ (لهما نفس العدد من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق **الشرطان الآتيان معًا** :

1. تساوى قياسات الزوايا المتناظرة.
2. تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

وفى هذه الحالة نكتب : المضلع $م_1$ ~ المضلع $م_2$ **لتعنى أن :** المضلع $م_1$ **يشابه** المضلع $م_2$



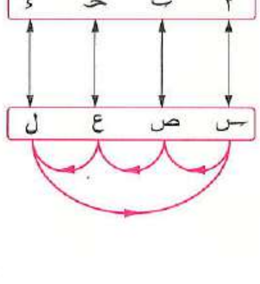
ففى الشكل المقابل إذا كان :

1. ق (∠ أ) = ق (∠ س) ، ق (∠ ب) = ق (∠ ص)
   ، ق (∠ ح) = ق (∠ ع) ، ق (∠ ء) = ق (∠ ل)
2. $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{ح ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}}$ فإن : المضلع أ ب ح ء ~ المضلع س ص ع ل

ملاحظة 1

يُفضل عند كتابة المضلعين المتشابهين أن نكتبهما بنفس ترتيب رءوسهما المتناظرة حتى يسهل استنتاج الزوايا المتساوية فى القياس وكتابة التناسب بين أطوال الأضلاع.

فمثلًا إذا كتبنا أن المضلع أ ب ح ء ~ المضلع س ص ع ل



فإننا نستنتج مباشرة أن :

1. ق (∠ أ) = ق (∠ س) ، ق (∠ ب) = ق (∠ ص)
   ، ق (∠ ح) = ق (∠ ع) ، ق (∠ ء) = ق (∠ ل)
2. $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{ح ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}}$

ملاحظة ٢

إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع س ص ع ل فإن :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ د}}{\text{س ل}} = \text{ك}$ (نسبة التشابه أو معامل التشابه) حيث : ك > صفر

فإذا كان معامل تشابه المضلع أ ب جـ د للمضلع س ص ع ل = ك

فإن معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب جـ د = $\frac{١}{\text{ك}}$

ملاحظة ٣

ليكن ك معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$

إذا كان : ك > ١ فإن : المضلع $م_١$ هو **تكبير** للمضلع $م_٢$ وتسمى ك نسبة التكبير

إذا كان : ٠ < ك < ١ فإن : المضلع $م_١$ هو **تصغير** للمضلع $م_٢$ وتسمى ك نسبة التصغير

إذا كان : ك = ١ فإن : المضلع $م_١$ **يطابق** المضلع $م_٢$

وبصفة عامة : يمكن استخدام معامل التشابه فى حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.

ملاحظة ٤

لكى يتشابه مضلعان يجب أن يتحقق شرطا التشابه معًا ولا يكفى تحقق أحدهما دون الآخر.

فمثلًا

- ليس جميع المستطيلات متشابهة فبرغم تساوى قياسات زواياها المتناظرة (كل = ٩٠°)
إلا أن أطوال أضلاعها المتناظرة يمكن أن تكون غير متناسبة.
- كذلك ليس جميع المعينات متشابهة فبرغم أن أطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة
إلا أن زواياها المتناظرة يمكن أن تكون غير متساوية القياس.

ملاحظة ٥

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين ، بينما ليس من الضرورى أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين.

ملاحظة ٦

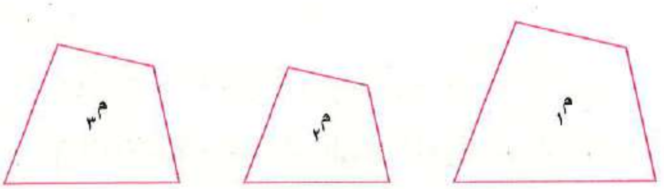
المضلعان المشابهان لمضلع ثالث متشابهان.

أى أنه

إذا كان المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٣$

، المضلع $م_٢$ ~ المضلع $م_٣$

فإن : المضلع $م_١$ ~ المضلع $م_٢$



ملاحظة ٧

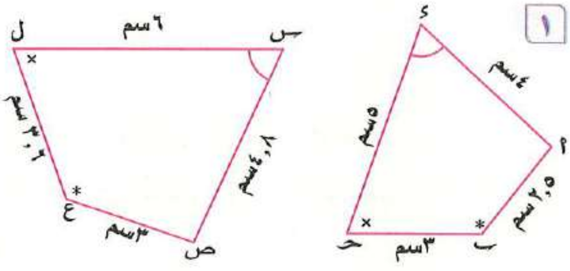
كل المضلعات المنتظمة التى لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة.

- جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة.
- جميع المربعات متشابهة.
- جميع الأشكال الخماسية المنتظمة متشابهة ، وهكذا.

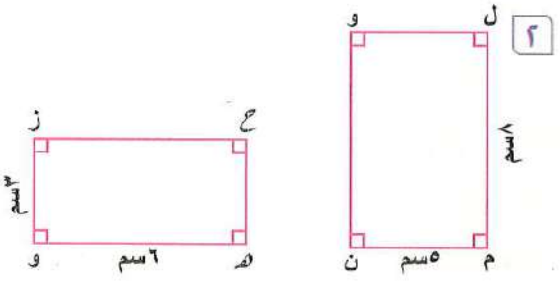
مثال ١

بيِّن أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة مع ذكر السبب وإذا كانت متشابهة أوجد نسبة التشابه :

١



٢



الحل

١ المضلعان أ ب جـ د ، ص ع ل س متشابهان

لأن ق(∠ب) = ق(∠ع) ، ق(∠جـ) = ق(∠ل) ، ق(∠د) = ق(∠س) ∴ ق(∠أ) = ق(∠ص)

، $\frac{أب}{صع} = \frac{بجـ}{عل} = \frac{جـد}{لس} = \frac{دأ}{سص}$ ، $\frac{٢,٥}{٣} = \frac{٣}{٣,٦} = \frac{٥}{٦} = \frac{٤}{٤,٨}$ ∴ نسبة التشابه = $\frac{٥}{٦}$

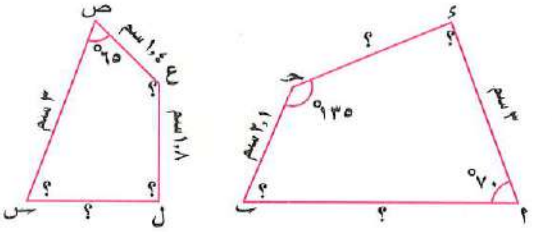
٢ المضلعان ل م ن و ، هـ و ز ح غير متشابهين

فبرغم أن ق(∠ل) = ق(∠هـ) ، ق(∠م) = ق(∠و) ، ق(∠ن) = ق(∠ز)

، ق(∠و) = ق(∠ح) (الزوايا المتناظرة متساوية فى القياس)

ولكن $\frac{لم}{هـو} \neq \frac{من}{وز}$ **لأن** $\frac{٨}{٦} \neq \frac{٥}{٣}$

مثال ٢



فى الشكل المقابل :

إذا كان المضلعان أ ب جـ د

، س ص ع ل متشابهين

فأوجد :

١ معامل تشابه المضلع أ ب جـ د للمضلع س ص ع ل

٢ أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا المجهولة فى كلا المضلعين.

الحـــل

$\because$ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل $\therefore$ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}}$ = معامل التشابه.

$\therefore$ $\frac{\text{أ ب}}{٣} = \frac{٢,١}{١,٤} = \frac{\text{حـ ء}}{١,٨} = \frac{٣}{\text{ل س}}$ $\therefore$ معامل التشابه = $\frac{٢,١}{١,٤} = \frac{٣}{٢}$ **(المطلوب أولًا)**

، أ ب = $\frac{٣ \times ٢,١}{١,٤}$ = ٤,٥ سم ، حـ ء = $\frac{١,٨ \times ٢,١}{١,٤}$ = ٢,٧ سم ، ل س = $\frac{١,٤ \times ٣}{٢,١}$ = ٢ سم

، $\because$ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

$\therefore$ ق (∠ أ) = ق (∠ س) ، ق (∠ ب) = ق (∠ ص) ، ق (∠ حـ) = ق (∠ ع) ، ق (∠ ء) = ق (∠ ل)

$\therefore$ ق (∠ س) = ٧٠° ، ق (∠ ب) = ٦٥° ، ق (∠ ع) = ١٣٥°

، $\because$ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى الداخلة = ٣٦٠°

$\therefore$ ق (∠ ء) = ق (∠ ل) = ٣٦٠° − (٧٠° + ٦٥° + ١٣٥°) = ٩٠° **(المطلوب ثانيًا)**

ملاحظة

◄ **فى المثال السابق نلاحظ أن :**

$\because$ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

$\therefore$ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{س ل}}$ = معامل التشابه

$= \frac{\text{أ ب + ب حـ + حـ ء + ء أ}}{\text{س ص + ص ع + ع ل + ل س}}$ (من خواص التناسب)

$\therefore$ $\frac{\text{محيط المضلع أ ب حـ ء}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}} = \frac{١٢,٣}{٨,٢} = \frac{٣}{٢}$ = معامل التشابه.

أى أن

النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين = النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما.

مثال ٣

مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه : ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ من السنتيمترات والآخر محيطه ٤٨ سم أوجد أطوال أضلاع المضلع الآخر.

الحـــل

بفرض أن المضلع أَ بَ حَ ءَ هَ ~ المضلع أ ب حـ ء هـ

$\therefore$ $\frac{\text{محيط المضلع أَ بَ حَ ءَ هَ}}{\text{محيط المضلع أ ب حـ ء هـ}} = \frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ حَ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{حَ ءَ}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{ءَ هَ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{هَ أَ}}{\text{هـ أ}}$

، ∵ $\frac{\text{محيط المضلع أَبَحَءَهَ}}{\text{محيط المضلع أبحـءهـ}} = \frac{48}{3+5+6+8+10} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$

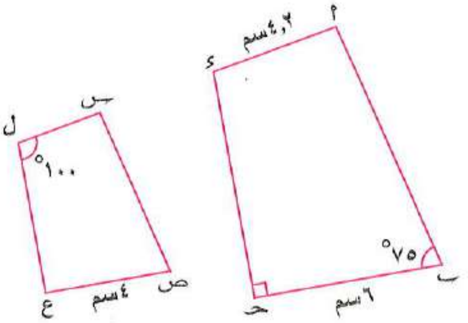
∴ $\frac{\text{أَبَ}}{\text{أب}} = \frac{\text{بَحَ}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{حَءَ}}{\text{حـء}} = \frac{\text{ءَهَ}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{هَأَ}}{\text{هـأ}} = \frac{3}{2}$ ∴ $\frac{\text{أَبَ}}{3} = \frac{\text{بَحَ}}{5} = \frac{\text{حَءَ}}{6} = \frac{\text{ءَهَ}}{8} = \frac{\text{هَأَ}}{10} = \frac{3}{2}$

∴ أَبَ = ٤,٥ سم ، بَحَ = ٧,٥ سم ، حَءَ = ٩ سم

، ءَهَ = ١٢ سم ، هَأَ = ١٥ سم (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

١ **احسب :** ق (∠ س) ، طول $\overline{\text{س ل}}$

٢ إذا كان محيط المضلع أ ب حـ ء يساوى ٢٥,٨ سم

احسب محيط المضلع : س ص ع ل

مثال ٤

أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٥ سم ، أ حـ = ٨ سم

أوجد أطوال أضلاع مثلث آخر مشابه له إذا كان :

١ معامل التشابه = ٢,٤ ٢ معامل التشابه = ٠,٧

الحل

١ ∵ معامل التشابه ك = ٢,٤ > ١ ∴ المثلث المطلوب تكبير للمثلث أ ب حـ

وبفرض أن Δ س ص ع ~ Δ أ ب حـ ∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{س ع}}{\text{أ حـ}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{\text{س ص}}{4} = \frac{\text{ص ع}}{5} = \frac{\text{س ع}}{8} = 2{,}4$

∴ س ص = ٤ × ٢,٤ = ٩,٦ سم ، ص ع = ٥ × ٢,٤ = ١٢ سم

، س ع = ٨ × ٢,٤ = ١٩,٢ سم (وهو المطلوب)

٢ ∵ معامل التشابه ك = ٠,٧ < ١

∴ المثلث المطلوب تصغير للمثلث أ ب حـ وبفرض أن Δ س ص ع ~ Δ أ ب حـ :

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{س ع}}{\text{أ حـ}}$ = معامل التشابه. ∴ $\frac{\text{س ص}}{4} = \frac{\text{ص ع}}{5} = \frac{\text{س ع}}{8} = 0{,}7$

∴ س ص = ٤ × ٠,٧ = ٢,٨ سم ، ص ع = ٥ × ٠,٧ = ٣,٥ سم

، س ع = ٨ × ٠,٧ = ٥,٦ سم (وهو المطلوب)

تمـارين 1 على تشـابه المضلعـات

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى | • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ك معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$ وكان ٠ < ك < ١

فإن المضلع $م_١$ هو .... للمضلع $م_٢$

(أ) مطابق (ب) تكبير (جـ) تصغير (د) ضعف المساحة

(٢) إذا كان : ك معامل تشابه المضلع $م_١$ للمضلع $م_٢$ وكان المضلع $م_١$ تصغير للمضلع $م_٢$

فإن : ك يمكن أن تساوى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٣) إذا كان $ك_١$ هو معامل تشابه المضلع $م_١$ إلى المضلع $م_٢$ ، $ك_٢$ هو معامل تشابه المضلع $م_٢$ إلى المضلع $م_٣$

فإن معامل تشابه المضلع $م_١$ إلى المضلع $م_٣$ هو ....

(أ) $ك_١ + ك_٢$ (ب) $ك_١ ك_٢$ (جـ) $\frac{ك_١}{ك_٢}$ (د) $\frac{ك_٢}{ك_١}$

(٤) المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كان معامل التشابه ك يحقق ....

(أ) ك = $\frac{١}{٢}$ (ب) ك = ١ (جـ) ك > ١ (د) ٠ < ك < ١

(٥) إذا كان : $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ د هـ و ، ب جـ = ٣ هـ و فإن معامل التشابه لهما = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٣

(٦) معامل التشابه بين المربع أ ب جـ د والمربع س ص ع ل يساوى كل مما يأتى ما عدا ....

(أ) أ جـ : س ع (ب) أ ب : ص ع (جـ) $(أ ب)^٢ : (س ص)^٢$ (د) ب جـ : ص ع

(٧) لكى يتشابه المضلعان $م_١$ ، $م_٢$ يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) زواياهما المتناظرة متساوية فى القياس فقط.

(ب) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) أطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية.

(٨) لكى يتشابه المعينان أ ب حـ ء ، س ص ع ل يكون كافيًا الحصول على ....

(أ) ق(∠ أ) = ٦٠° ، ق(∠ ص) = ١٢٠° فقط.

(ب) محيط المعين أ ب حـ ء = ٢ محيط المعين س ص ع ل فقط.

(جـ) (أ) ، (ب) معًا.

(د) لا شيء مما سبق.

(٩) أى من العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) كل مربعين متشابهين.

(ب) كل مثلثين متساويا الأضلاع متشابهين.

(جـ) كل معينين متشابهين.

(د) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع متشابهين.

(١٠) العبارة الصحيحة فيما يلى هى ....

(أ) جميع المثلثات المتساوية الساقين متشابهة. (ب) جميع المثلثات القائمة الزاوية متشابهة.

(جـ) جميع المربعات متشابهة. (د) جميع المضلعات المنتظمة متشابهة.

(١١) أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) كل المضلعات المنتظمة متشابهة. (ب) كل المربعات متطابقة.

(جـ) كل المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة. (د) كل المعينات متشابهة.

(١٢) إذا كان م١ ، م٢ مضلعين متشابهين وكان طولا ضلعين متناظرين فيهما ٢٠ سم ، ١٦ سم على الترتيب فإن : محيط المضلع م١ : محيط المضلع م٢ = ...

(أ) ٢٥ : ١٦ (ب) ٤١ : ٩ (جـ) ٩ : ٤١ (د) ٥ : ٤

(١٣) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٩ فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ....

(أ) ٤ : ٩ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ١٦ : ٨١ (د) ٩ : ٤

(١٤) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط الأصغر ١٥ سم فإن محيط الأكبر .... سم

(أ) ٢٠ (ب) $\frac{٨٠}{٣}$ (جـ) ٢٧ (د) $\frac{٤٥}{٤}$

(١٥) إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل وكان أ ب = ٣٢ سم ، ب حـ = ٤٠ سم ، س ص = ٣ م − ١ ، ص ع = ٣ م + ١ فإن : م = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

(١٦) مستطيلان متشابهان بعدا الأول ٤ سم ، ١٠ سم ، محيط الثانى = ١٤٠ سم فإن مساحة المستطيل الثانى = ... سم^{٢}

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٥٠٠ (د) ١٠٠٠

(١٧) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و ، أ ب = ٣ سم ، ء هـ = ٦ سم ، هـ و = ٨ سم

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١,٥

(١٨) مثلثان متشابهان محيط الأول ٧٤ سم وأطوال أضلاع الثانى ٤,٥ سم ، ٦ سم ، ٨ سم

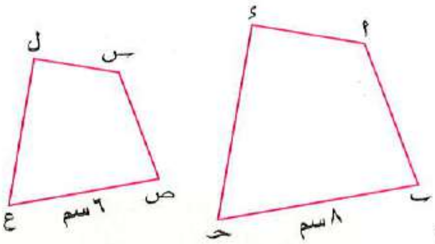
فإن طول أكبر أضلاع المثلث الأول يساوى .... سم

(أ) ٤ (ب) ٦٤ (جـ) ٣٢ (د) ١٦

(١٩) إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل فإن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ص ع}}{\text{س ل}}$ (ب) $\frac{\text{أ ء}}{\text{س ل}}$ (جـ) $\frac{\text{س ل}}{\text{أ ء}}$ (د) $\frac{\text{س ص}}{\text{ص ع}}$

(٢٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

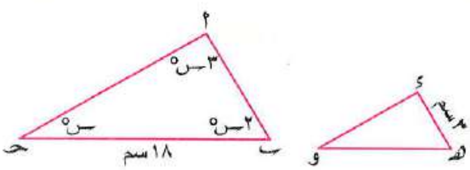
ومحيط المضلع أ ب حـ ء = ٤٨ سم

فإن محيط المضلع س ص ع ل = ... سم

(أ) ٤٨ (ب) ٣٦

(جـ) ٦٤ (د) ٣٢

(٢١) فى الشكل المقابل :

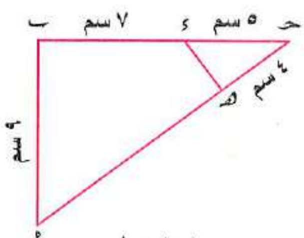


إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

فإن : طول $\overline{\text{و هـ}}$ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٢) فى الشكل المقابل :



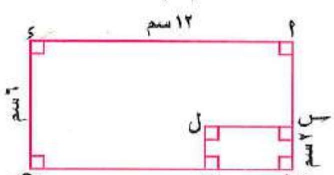
إذا كان : Δ حـ ب أ ~ Δ حـ هـ ء

، وباستخدام الأطوال المبينة على الرسم

فإن : هـ ء + هـ أ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٢٣) فى الشكل المقابل :

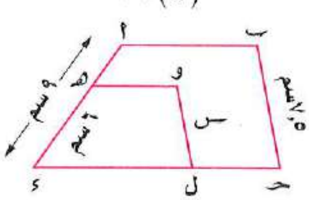


المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل س ب ص ل

فإن : طول $\overline{\text{ص حـ}}$ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١١

(٢٤) فى الشكل المقابل :

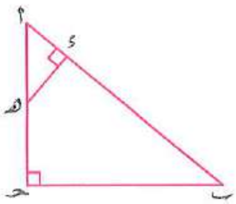


المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع هـ و ل ء

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٧,٥ (د) ٦

(٢٥) فى الشكل المقابل :



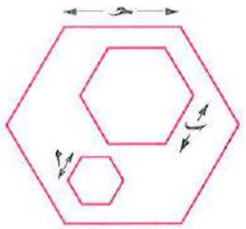
Δ أ ب جـ ~ Δ أ هـ د فإذا كان : ق (∠ ب) = ٣ س + ١٠°

، ق (∠ أ هـ د) = س + ٣٠°

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٣٠° (د) ٦٠°

(٢٦) الشكل المقابل يوضح ثلاثة أشكال سداسية منتظمة



النسبة بين أطوال أضلاعهم كما يلى :

أ : ب = ١ : ٢ ، ب : جـ = ٣ : ٨

فإذا كان طول ضلع المسدس الأكبر = ٣٢ سم

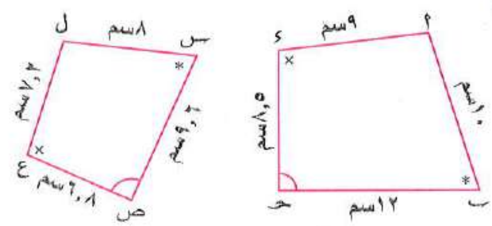
فإن محيط المسدس الأصغر = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) ٣٦ (د) ٤٨

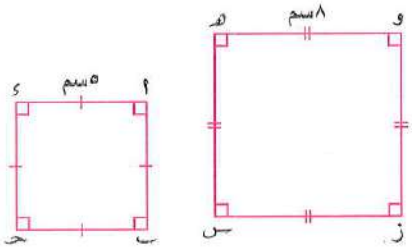
ثانيًا الأسئلة المقالية

١ بيِّن أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة ، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة ، وحدد معامل التشابه.

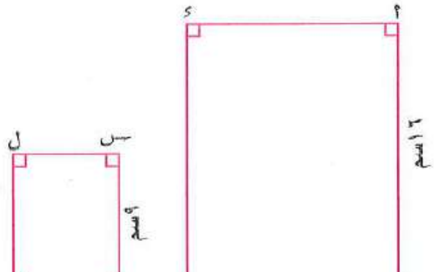
(١)



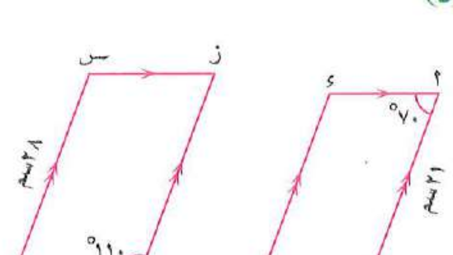
(٢)



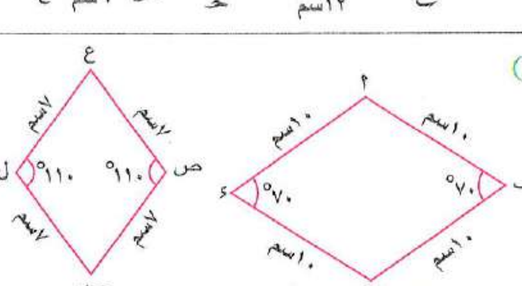
(٣)



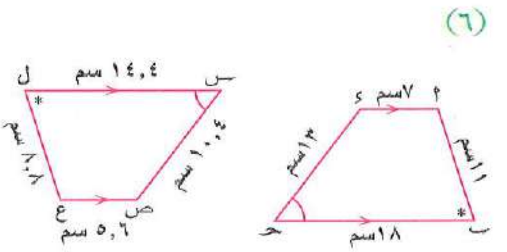
(٤)



(٥)



(٦)



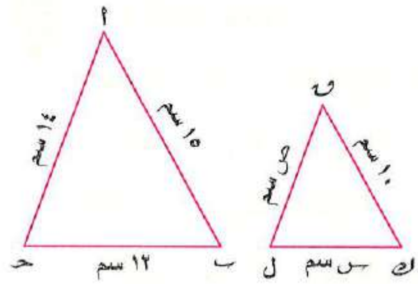
٢ **فى الشكل المقابل :**

إذا كان : Δ أ ب جـ ~ Δ ى ك ل وأطوال الأضلاع مبينة على الشكل

فأوجد :

(١) معامل تشابه المثلث أ ب جـ للمثلث ى ك ل «$\frac{٣}{٢}$»

(٢) قيمة كل من س ، ص «٨ سم ، $٩\frac{١}{٢}$ سم»



---

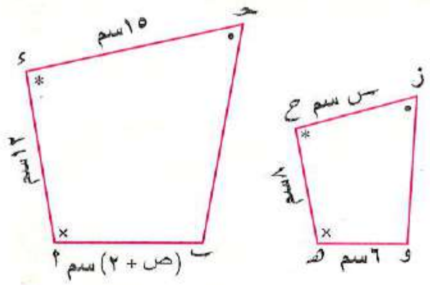
٣ 📖 **فى الشكل المقابل :**

المضلع أ ب جـ د ~ المضلع هـ و ز ح

أوجد :

(١) معامل تشابه المضلع أ ب جـ د للمضلع هـ و ز ح «$\frac{٣}{٢}$»

(٢) قيمة كل من س ، ص «١٠ سم ، ٧ سم»



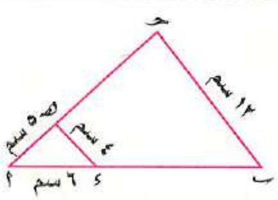
---

٤ **فى الشكل المقابل :**

Δ أ د هـ ~ Δ أ ب جـ أثبت أن : $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، ومن الأطوال المبينة على الشكل

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ «١٢ سم ، ١٠ سم»



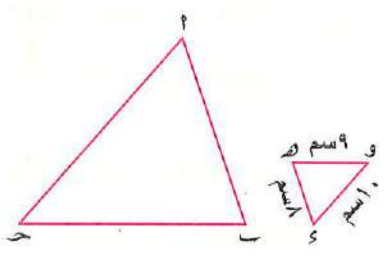
---

٥ 📖 **فى الشكل المقابل :**

Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و ، د هـ = ٨ سم ، هـ و = ٩ سم

، و د = ١٠ سم إذا كان محيط Δ أ ب جـ = ٨١ سم

أوجد : أطوال أضلاع Δ أ ب جـ



«٢٤ سم ، ٢٧ سم ، ٣٠ سم»

---

٦ 📖 مستطيلان متشابهان بُعدا الأول ٨ سم ، ١٢ سم ، ومحيط الثانى ٢٠٠ سم.

أوجد طول المستطيل الثانى ومساحته. «٦٠ سم ، ٢٤٠٠ سم^{٢}»

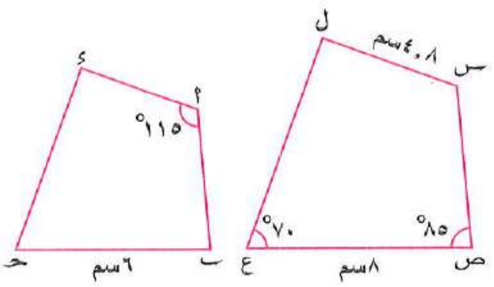
٧ في الشكل المقابل :

المضلع أ ب جـ ء ∽ المضلع س ص ع ل

(١) **احسب :** ق (∠ س ل ع) ، طول $\overline{\text{أ ء}}$

(٢) إذا كان محيط المضلع أ ب جـ ء = ١٩,٥ سم

أوجد : محيط المضلع س ص ع ل



«٩٠° ، ٣,٦ سم ، ٢٦ سم»

---

٨ إذا كان المضلع أ ب جـ ء ∽ المضلع س ص ع ل ، أكمل :

(١) $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \dfrac{\text{..........}}{\text{ص ع}}$

(٢) أ ب × ع ل = س ص × ....

(٣) $\dfrac{\text{ب جـ + ص ع}}{\text{ص ع}} = \dfrac{\text{.......... + ل س}}{\text{ل س}}$

(٤) $\dfrac{\text{محيط المضلع ....}}{\text{محيط المضلع ....}} = \dfrac{\text{س ص}}{\text{أ ب}}$

---

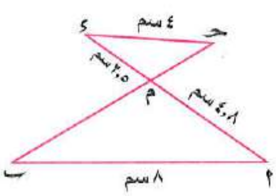
٩ في الشكل المقابل :

△ م أ ب ∽ △ م جـ ء

أثبت أن : الشكل أ ب ء جـ رباعي دائري

وإذا كان : أ ب = ٨ سم ، جـ ء = ٤ سم ، م أ = ٤,٨ سم

، م ء = ٢,٥ سم **فأوجد :** طول $\overline{\text{ب جـ}}$



«٧,٤ سم»

---

١٠ مثلث أ ب جـ فيه : أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٦ سم ، أ جـ = ٩ سم

أوجد أطوال أضلاع مثلث مشابه له إذا كان :

(١) معامل التشابه = ٢,٥ (٢) معامل التشابه = ٠,٦

---

١١ مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان :

(١) معامل التشابه = ٣ (٢) معامل التشابه = ٠,٤

---

١٢ في الشكل المقابل :

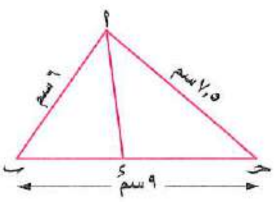
△ أ ب جـ ∽ △ ء ب أ

أثبت أن : $\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة المارة برءوس △ أ ء جـ

وأن : أ ب وسط متناسب بين ب ء ، ب جـ

وإذا كان : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم ، أ جـ = ٧,٥ سم

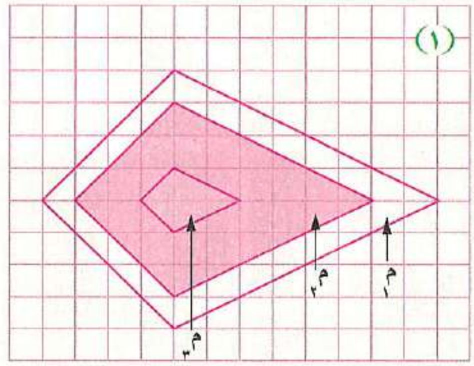
فأوجد : طول كل من $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$

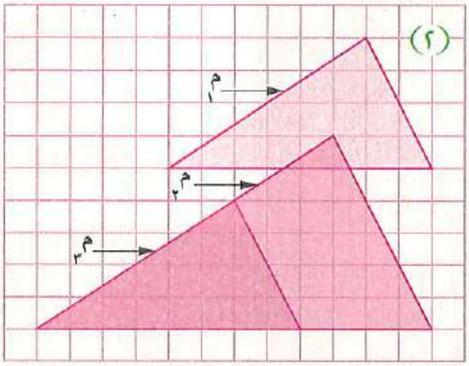


«٥ سم ، ٥ سم»

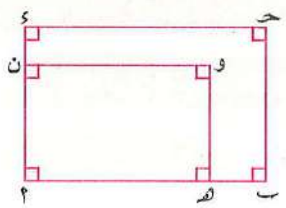
١٣ 📖 **في كل من الشكلين التاليين :** المضلع م$_1$ ~ المضلع م$_2$ ~ المضلع م$_3$

أوجد معامل تشابه كل من المضلع م$_1$ ، المضلع م$_2$ للمضلع م$_3$





ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير



في الشكل المقابل :

المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل أ هـ و ن أثبت أن :

محيط المستطيل أ ب حـ ء : محيط المستطيل أ هـ و ن

= (أ ب – أ ء) : (أ هـ – أ ن)

الدرس

2

تشابه المثلثات

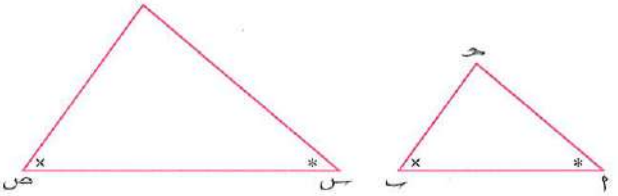
حالات تشابه المثلثات

الحالة الأولى

مسلمة

إذا طابقت زاويتان فى مثلث نظيرتيهما فى مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.

أى أنه فى الشكل المقابل :



إذا كانت : $\angle$ أ $\equiv \angle$ س ، $\angle$ ب $\equiv \angle$ ص

فإن : Δ أ ب جـ $\sim \Delta$ س ص ع

وينتج من ذلك أن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}}$

ملاحظات

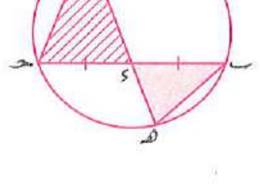
١ يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس زاوية حادة فى أحدهما قياس زاوية حادة فى الآخر.

٢ يتشابه المثلثان المتساويا الساقين إذا ساوى قياس زاوية فى أحدهما قياس الزاوية المناظرة لها فى الآخر.

٣ المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان.

مثال ١

فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ وتران فى دائرة متقاطعان فى ء حيث ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن :

١ Δ أ ء جـ $\sim \Delta$ ب ء هـ

٢ $(\text{ب ء})^2 =$ أ ء $\times$ ء هـ

الحـــل

∵ ΔΔ أ ء حـ ، ب ء هـ فيهما :

∠ أ ، ∠ ب محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{\text{حـ هـ}}$ ∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب)

، ∵ ق (∠ أ ء حـ) = ق (∠ ب ء هـ) (بالتقابل بالرأس) ∴ Δ أ ء حـ ~ Δ ب ء هـ **(المطلوب أولًا)**

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{ء هـ}}$ ∴ ب ء × ء حـ = أ ء × ء هـ لكن ء حـ = ب ء (معطى)

∴ (ب ء)^{٢} = أ ء × ء هـ **(المطلوب ثانيًا)**

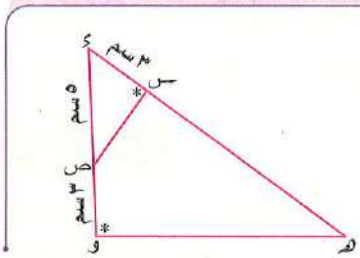
حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

ء هـ و مثلث ، ق (∠ و) = ق (∠ ء س ص)

، ء س = ص و = ٣ سم ، ء ص = ٥ سم

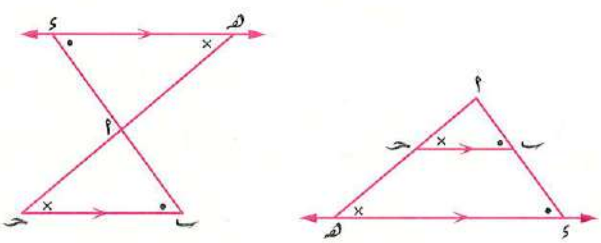
أوجد : طول $\overline{\text{س هـ}}$



نتيجــة ١

إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلى.

ففى كل من الأشكال الآتية :



إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ فى ء ، هـ على الترتيب.

فإن : Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ

مثـــال ٢

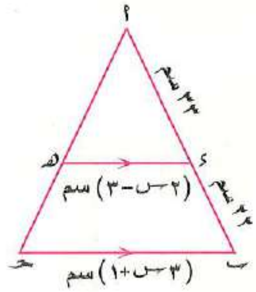
فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ ء = ٣٣ سم ، ء ب = ٢٢ سم

، ء هـ = (٢ س − ٣) سم ، ب حـ = (٣ س + ١) سم

[١] **أثبت أن :** Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ

[٢] **أوجد :** قيمة س



الحل

∵ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بجـ}$ ∴ △ أءهـ ~ △ أبجـ **(المطلوب أولًا)**

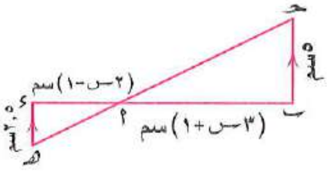
∴ $\frac{أء}{أب} = \frac{ءهـ}{بجـ}$ ∴ $\frac{٣٣}{٥٥} = \frac{٢س - ٣}{٣س + ١}$

∴ $\frac{٣}{٥} = \frac{٢س - ٣}{٣س + ١}$ ∴ ٩س + ٣ = ١٠س − ١٥ ∴ س = ١٨ **(المطلوب ثانيًا)**

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

$\overline{هـجـ} \cap \overline{بء} = \{أ\}$ ، $\overline{بجـ} \parallel \overline{ءهـ}$ ، بجـ = ٥ سم ، ءهـ = ٢,٥ سم

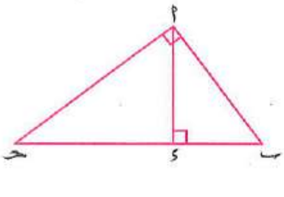


١ أثبت أن : △ أبجـ ~ △ أءهـ ٢ أوجد قيمة : س

نتيجة ٢

إذا رسم من رأس القائمة فى المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلى.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : △ أبجـ قائم الزاوية فى أ ، $\overline{أء} \perp \overline{بجـ}$

فإن : △ ءبأ ~ △ ءأجـ ~ △ أبجـ

ويترك للطالب إثبات ذلك باستخدام المسلمة السابقة وملاحظاتها.

ملاحظات على الشكل السابق

١ من تشابه △△ ءبأ ، أبجـ **ينتج أن :** $\frac{ءب}{بأ} = \frac{أب}{بجـ}$

∴ $(أب)^2 = ءب \times بجـ$ **أى أن :** أب وسط متناسب بين ءب ، بجـ

٢ من تشابه △△ ءأجـ ، أبجـ **ينتج أن :** $\frac{ءجـ}{أجـ} = \frac{أجـ}{بجـ}$

∴ $(أجـ)^2 = ءجـ \times بجـ$ **أى أن :** أجـ وسط متناسب بين ءجـ ، بجـ

٣ من تشابه △△ ءبأ ، ءأجـ **ينتج أن :** $\frac{ءأ}{ءجـ} = \frac{ءب}{ءأ}$

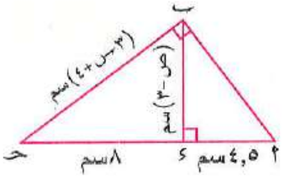
∴ $(ءأ)^2 = ءب \times ءجـ$ **أى أن :** أء وسط متناسب بين ءب ، ءجـ

٤ من تشابه △△ ءبأ ، أبجـ **ينتج أن :** $\frac{أب}{جـب} = \frac{أء}{جـأ}$

∴ $أء \times جـب = أب \times جـأ$

وتعد النتائج التى تم الحصول عليها من النتيجة السابقة برهانًا لنظرية إقليدس التى تم دراستها فى المرحلة الإعدادية.

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

فإذا كان : أ ء = ٤,٥ سم ، ء حـ = ٨ سم

فأوجد قيمتى : س ، ص

الحل

∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

∴ Δ ء ب حـ ~ Δ ب أ حـ ∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{ب حـ}}$

∴ (ب حـ)^2 = أ حـ × ء حـ

∴ (٣ س + ٤)^2 = ٨ × ١٢,٥ = ١٠٠ ∴ ٣ س + ٤ = ١٠

∴ س = ٢

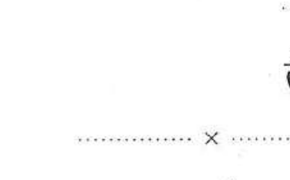
∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

∴ Δ أ ب ء ~ Δ ب حـ ء ∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$

∴ (ء ب)^2 = ء حـ × ء أ ∴ (ص − ٣)^2 = ٨ × ٤,٥ = ٣٦

∴ ص − ٣ = ٦ ∴ ص = ٩ **(وهو المطلوب)**

حاول بنفسك



فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

أكمل :

١ $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{..........}}$

٢ $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{..........}}$

٣ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{..........}}$

٤ $\frac{\text{..........}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}}$

٥ $\frac{\text{..........}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{..........}}$

٦ (ء أ)^2 = ... × ....

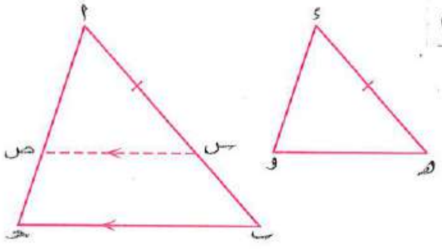
٧ (أ حـ)^2 = ... × ....

٨ أ ء = $\frac{\text{.......... × حـ أ}}{\text{حـ ب}}$

الحالة الثانية

نظرية ١

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فى مثلثين فإنهما يتشابهان.



◂ **المعطيات** المثلثان أ ب حـ ، ء هـ و فيهما : $\frac{أب}{ءهـ} = \frac{بحـ}{هـو} = \frac{حـأ}{وء}$

◂ **المطلوب** إثبات أن : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

◂ **العمل** عيِّن س $\in$ $\overline{أب}$ حيث أ س = ء هـ

، ارسم $\overline{سص}$ // $\overline{بحـ}$ وتقطع $\overline{أحـ}$ فى ص

◂ **البرهان** $\because$ $\overline{سص}$ // $\overline{بحـ}$

$\therefore$ Δ أ ب حـ ~ Δ أ س ص (نتيجة «١»)

ويكون $\frac{أب}{أس} = \frac{بحـ}{سص} = \frac{حـأ}{صأ}$ ، $\because$ أ س = ء هـ (عملاً)

$\therefore$ $\boxed{\frac{أب}{ءهـ}} = \frac{بحـ}{سص} = \frac{حـأ}{صأ}$ (١)

$\because$ $\boxed{\frac{أب}{ءهـ}} = \frac{بحـ}{هـو} = \frac{حـأ}{وء}$ (معطيات) (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : س ص = هـ و ، ص أ = و ء

ويكون Δ أ س ص $\equiv$ Δ ء هـ و (تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها فى الآخر)

$\therefore$ Δ ء هـ و ~ Δ أ س ص

، $\because$ Δ أ ب حـ ~ Δ أ س ص (برهانًا)

$\therefore$ Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و **(وهو المطلوب)**

ملاحظة

لكتابة المثلثين المتشابهين بترتيب رءوسهما المتناظرة من التناسب بين أطوال أضلاعهما نتبع الآتى :

بفرض أن رءوس أحد المثلثين هى أ ، ب ، حـ وأن رءوس المثلث الآخر هى ء ، هـ ، و

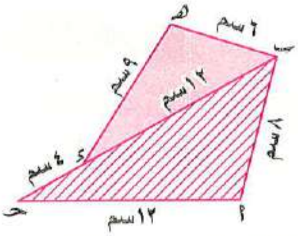
وأن لدينا التناسب الآتى : $\frac{أحـ}{ءو} = \frac{أب}{وهـ} = \frac{بحـ}{ءهـ}$

فنبحث عن رءوس المثلث التى تقابل الأضلاع : $\overline{أحـ}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ بالترتيب فنجدها ب ، حـ ، أ

ونبحث عن رءوس المثلث التى تقابل الأضلاع : $\overline{ءو}$ ، $\overline{وهـ}$ ، $\overline{ءهـ}$ بالترتيب فنجدها هـ ، ء ، و

فيكون : Δ ب حـ أ ~ Δ هـ ء و أ، Δ أ ب حـ ~ Δ و هـ ء أ، ... إلخ.

مثال ٤



من الشكل المقابل أثبت أن :

[١] المثلثين المظللين متشابهان.

[٢] $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب هـ

الحل

$\because \frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{١٦}{١٢} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ء هـ}}$ ∴ Δ جـ أ ب ~ Δ ء هـ ب **(المطلوب أولاً)**

وينتج من التشابه أن : ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ هـ ب ء)

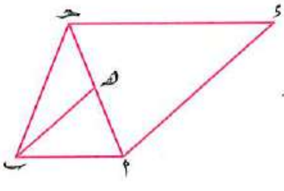
∴ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب هـ **(المطلوب ثانيًا)**

مثال ٥

أ ب جـ ء شكل رباعى ، هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ بحيث : $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{أ جـ}}$

أثبت أن : [١] $\overline{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$ [٢] $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$

الحل



$\because \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}}$ $\therefore \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ب هـ}}$ (١)

، $\because \frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{أ جـ}}$ $\therefore \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{أ ب}}$ (٢)

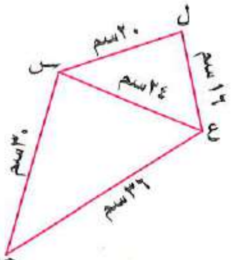
من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{أ ب}}$ ∴ Δ ء جـ أ ~ Δ ب أ هـ

وينتج من التشابه أن : ق (∠ أ جـ ء) = ق (∠ هـ أ ب) وهما متبادلتان

∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ // $\overline{\text{ب أ}}$ **(المطلوب أولاً)**

، ق (∠ جـ أ ء) = ق (∠ أ هـ ب) و متبادلتان. ∴ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ **(المطلوب ثانيًا)**

حاول بنفسك



فى الشكل المقابل :

س ص ع ل شكل رباعى فيه :

س ص = ٣٠ سم ، ص ع = ٣٦ سم ، ع ل = ١٦ سم

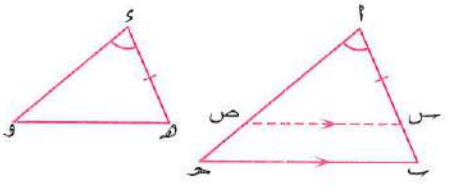
، ل س = ٢٠ سم ، س ع = ٢٤ سم

أثبت أن : Δ س ص ع ~ Δ ل س ع

الحالة الثالثة

نظرية ٢

إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر ، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان ، كان المثلثان متشابهين.



المعطيات $\angle\text{أ} \equiv \angle\text{د}$ ، $\frac{\text{أب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$

المطلوب إثبات أن : $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ د هـ و

العمل خذ س $\in \overline{\text{أب}}$ حيث أ س = د هـ

، وارسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ في ص

البرهان ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ أ س ص (نتيجة) (١)

ويكون $\boxed{\frac{\text{أ ب}}{\text{أ س}}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ص}}$

، ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$ (معطى) ، أ س = د هـ (عملاً)

∴ $\boxed{\frac{\text{أ ب}}{\text{أ س}}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$ ويكون أ ص = د و

∴ $\triangle$ أ س ص $\equiv$ $\triangle$ د هـ و (ضلعان وزاوية محصورة)

ويكون $\triangle$ أ س ص ~ $\triangle$ د هـ و (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ د هـ و (وهو المطلوب)

مثال ٦

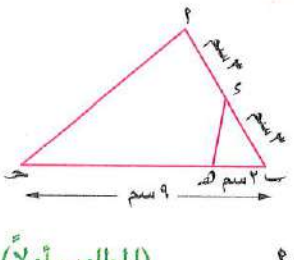
أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم ، د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ $\in \overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب هـ = ٢ سم

أثبت أن :

١ $\triangle\triangle$ د ب هـ ، جـ ب أ متشابهان.

٢ الشكل أ د هـ جـ رباعي دائري.

الحل



∵ $\triangle\triangle$ د ب هـ ، جـ ب أ فيهما :

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}}$

، ∵ $\angle$ ب مشتركة.

∴ $\triangle$ د ب هـ ~ $\triangle$ جـ ب أ (المطلوب أولاً)

وينتج أن :

ق (∠ ب هـ ء) = ق (∠ أ) ، ∵ ∠ ب هـ ء خارجة عن الشكل الرباعى أ ء هـ حـ

∴ الشكل أ ء هـ حـ رباعى دائرى. **(المطلوب ثانيًا)**

مثال ٧

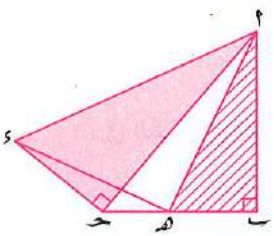
أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ق (∠ ب) = ق (∠ أ حـ ء) = ٩٠° ، هـ ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث $\frac{\text{حـ ء}}{\text{حـ أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}}$

أثبت أن :

[١] Δ Δ أ ب هـ ، أ حـ ء متشابهان.

[٢] ق (∠ أ هـ ء) = ٩٠°

الحل



∵ $\frac{\text{حـ ء}}{\text{حـ أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}}$

∴ $\frac{\text{حـ ء}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{حـ أ}}{\text{ب أ}}$

، ∵ ق (∠ ب) = ق (∠ أ حـ ء)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ أ حـ ء **(المطلوب أولاً)**

وينتج أن :

ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ أ ء حـ)

، ∵ ∠ أ هـ ب خارجة عن الشكل الرباعى أ هـ حـ ء

∴ الشكل أ هـ حـ ء رباعى دائرى.

∴ ق (∠ أ هـ ء) = ق (∠ أ حـ ء) (مرسومتان على $\overline{\text{أ ء}}$ وفى جهة واحدة منها)

∴ ق (∠ أ هـ ء) = ٩٠° **(المطلوب ثانيًا)**

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ء = ٣ سم ، ء ب = ٥ سم

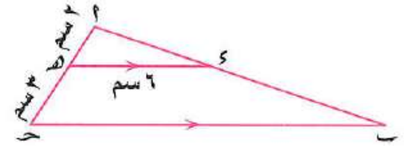
، أ هـ = ٤ سم ، هـ حـ = ٢ سم ، ب حـ = ١٢ سم

[١] **أثبت أن :** Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب

[٢] **أوجد :** طول $\overline{\text{ء هـ}}$

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



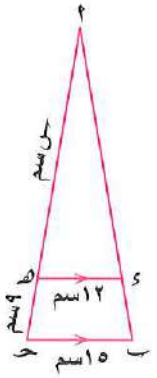
(١) في الشكل المقابل :

ءهـ // بحـ ، أهـ = ٢ سم

، هـ حـ = ٣ سم ، ءهـ = ٦ سم

فإن : بحـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (د) ١٠

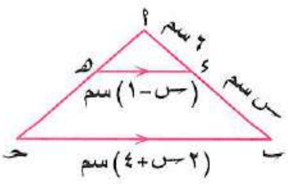


(٢) في الشكل المقابل :

س = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٢٤

(جـ) ٣٦ (د) ٤٨

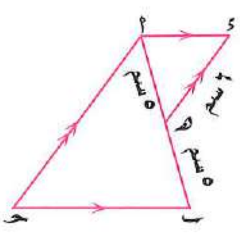


(٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : ءهـ // بحـ فإن : س = ...

(أ) ١٠ (ب) ٣٠

(جـ) ٣ (د) ٢٤

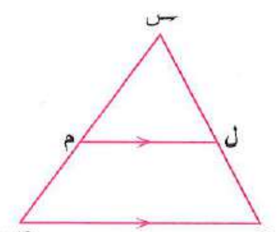


(٤) في الشكل المقابل :

أحـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٩

(جـ) ١٢ (د) ١٥



(٥) في الشكل المقابل :

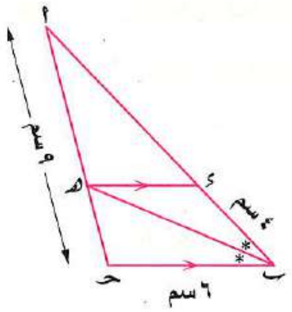
ل م // ع ص ، $\frac{\text{ل م}}{\text{ع ص}} = \frac{٤}{٧}$

فإن : $\frac{\text{ص م}}{\text{م س}} = $ ....

(أ) $\frac{١١}{٤}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٤}{١١}$

(٦) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ جـ = ٩ سم

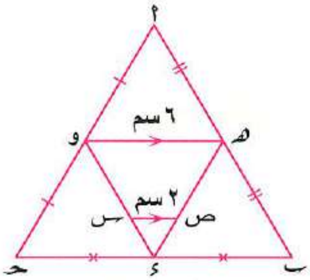
، ب ء = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم

فإن محيط Δ أ ء هـ = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ١٦

(جـ) ١٤ (د) ١٢

(٧) فى الشكل المقابل :



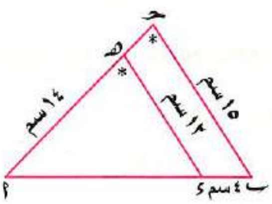
إذا كان محيط Δ ء س ص = ٨ سم

فإن محيط Δ أ ب جـ = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ٢٤

(جـ) ٣٦ (د) ٤٨

(٨) فى الشكل المقابل :



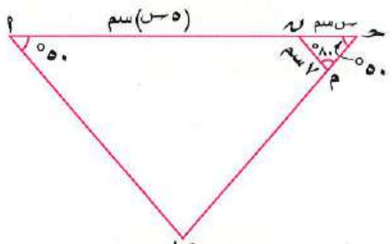
ق (∠ أ هـ ء) = ق (∠ جـ) ، أ هـ = ١٤ سم

، هـ ء = ١٢ سم ، جـ ب = ١٥ سم ، ء ب = ٤ سم

فإن : أ جـ + أ ء + أ ب = ... سم

(أ) ٦٢,٥ (ب) ٤٨ (جـ) ٥٦ (د) ٥٣,٥

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان : جـ ن = س سم ، ن أ = (٥ س) سم

، م ن = ٧ سم ، ق (∠ جـ) = ق (∠ أ) = ٥٠°

، ق (∠ جـ م ن) = ٨٠° فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٣٥ (جـ) ٤٢ (د) ٢٨

(١٠) المثلث الذى أطوال أضلاعه ل ، م ، ن يشابه المثلث الذى أطوال أضلاعه ....

(أ) ل + ٢ ، م + ٢ ، ن + ٢ (ب) ل − ٢ ، م − ٢ ، ن − ٢

(جـ) ٢ ل ، ٢ م ، ٢ ن (د) ل + م ، م + ن ، ن + ل

(١١) المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٥٠° ، ٧٠° يشابه المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٥٠° ، ....°

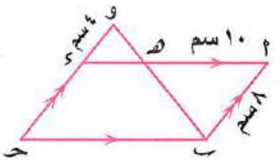
(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٥٥ (د) ٤٠

(١٢) مثلثان الأول به زاويتان قياسهما ٥٠° ، ٦٠° والثانى به زاويتان قياسهما ٦٠° ، ٧٠° فإن : ....

(أ) المثلثان متطابقان وغير متشابهان. (ب) المثلثان متشابهان وليس بالضرورة متطابقان.

(جـ) المثلثان متطابقان ومتشابهان. (د) المثلثان غير متطابقان وغير متشابهان.

(١٣) **في الشكل المقابل :**

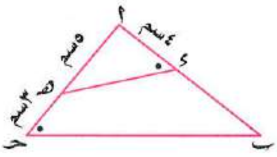


أ ب حـ ء متوازي الأضلاع ، و $\in$ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) ٨

(١٤) **في الشكل المقابل :**

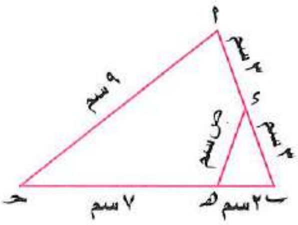


ب ء = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٧

(١٥) **في الشكل المقابل :**

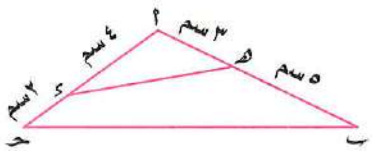


ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٤,٥

(جـ) ٣,٥ (د) ٣

(١٦) **في الشكل المقابل :**

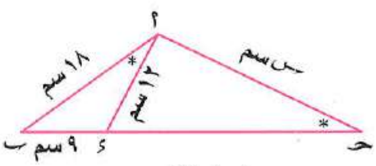


النسبة بين محيطي المثلثين

Δ أ ء هـ ، Δ أ ب حـ هي ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ٣ : ٥ (جـ) ١ : ٢ (د) ١ : ٤

(١٧) **في الشكل المقابل :**

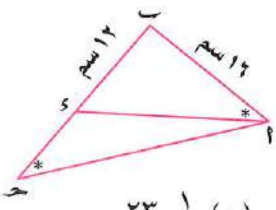


إذا كان : ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ حـ)

فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢١ (د) ٢٤

(١٨) **في الشكل المقابل :**



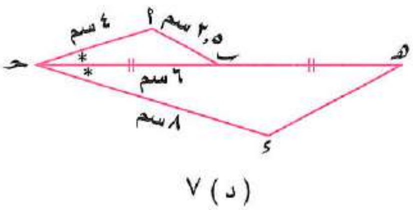
ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ)

، أ ب = ١٦ سم ، ب ء = ١٢ سم

فإن : ء حـ = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (جـ) $9\frac{1}{3}$ (د) $23\frac{1}{3}$

(١٩) **في الشكل المقابل :**

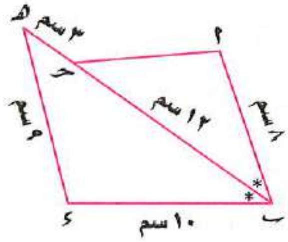


إذا كانت : ب منتصف $\overline{\text{حـ هـ}}$

فإن : ء هـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٠) **في الشكل المقابل :**

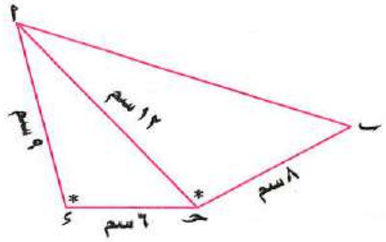


أ حـ = ... سم

(أ) ٦,٢ (ب) ٦

(جـ) ٧,٢ (د) ٧

(٢١) **في الشكل المقابل :**



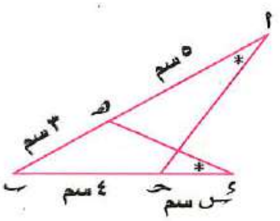
إذا كان : ق (∠ أ ء حـ) = ق (∠ أ حـ ب)

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٢٢) **في الشكل المقابل :**



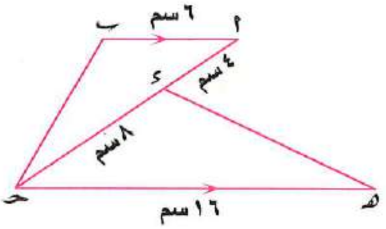
إذا كان : ق (∠ أ) = ق (∠ ء)

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٤

(جـ) ٣ (د) ٢

(٢٣) **في الشكل المقابل :**



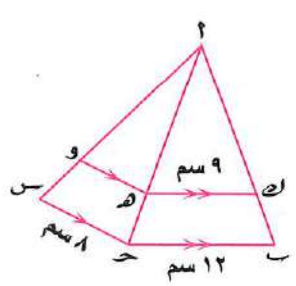
إذا كانت : $\overline{أب} // \overline{هـ حـ}$

فإن : $\frac{هـ ء}{ب حـ}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٤) **في الشكل المقابل :**

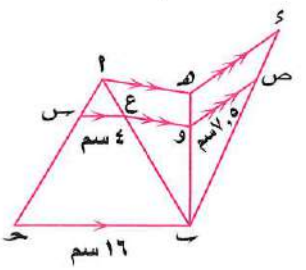


هـ و = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٥) **في الشكل المقابل :**

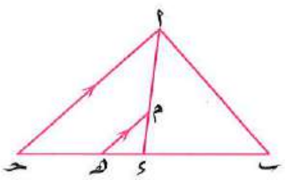


ء هـ = ... سم

(أ) ٨ (ب) ١٠

(جـ) ١٢ (د) ١٥

(٢٦) **في الشكل المقابل :**



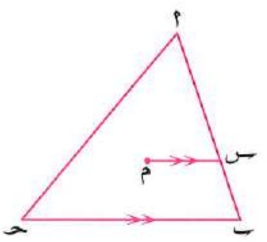
م نقطة تلاقى المتوسطات Δ أ ب جـ

، م ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{م هـ}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ ، م هـ = ٣ سم

فإن : طول $\overline{\text{أ جـ}}$ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٢٧) **في الشكل المقابل :**



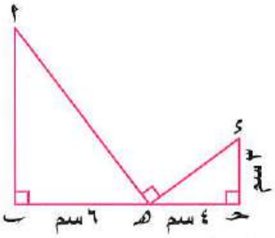
م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب جـ

، $\overline{\text{م س}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ب جـ = ١٢ سم

فإن : م س = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

(٢٨) **في الشكل المقابل :**



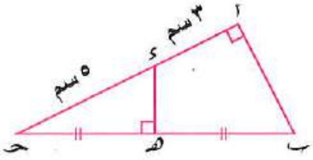
ق (∠ ب) = ق (∠ جـ) = ق (∠ أ هـ ء) = ٩٠°

فإن : طول $\overline{\text{أ ب}}$ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٥

(٢٩) **في الشكل المقابل :**

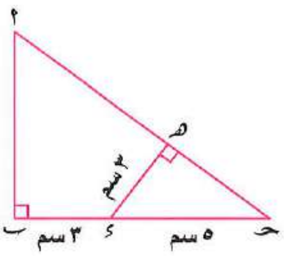


هـ جـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٢ $\sqrt{٥}$ (د) ٥

(٣٠) **في الشكل المقابل :**

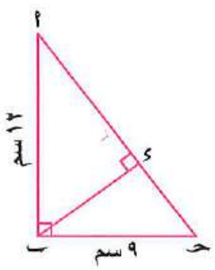


أ هـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٧ (د) ٨

(٣١) **في الشكل المقابل :**

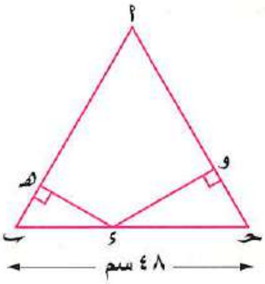


طول $\overline{\text{ب ء}}$ = ... سم

(أ) ٩,٥ (ب) ٧,٢

(جـ) ٧,٥ (د) ٨

(٣٢) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث متساوى الساقين حيث أ ب = أ حـ

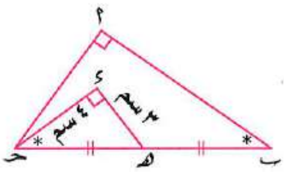
، ب حـ = ٤٨ سم ، $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ء و}} = \frac{5}{7}$

فإن : ء حـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٤ (د) ٢٨

(٣٣) في الشكل المقابل :

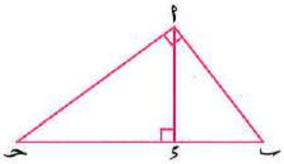


ء هـ = ٣ سم ، ء حـ = ٤ سم

فإن : م (Δ أ ب حـ) = ... سم^2

(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٣٤) في الشكل المقابل :



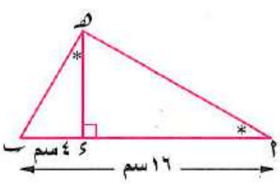
إذا كان : Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

فإن العبارة الخاطئة فيما يلى هى ....

(أ) Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ (ب) Δ أ ب حـ ~ Δ ء أ حـ

(جـ) Δ ب أ ء ~ Δ أ حـ ء (د) أ ء = ء ب × ء حـ

(٣٥) في الشكل المقابل :



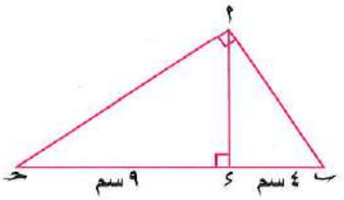
أ ب هـ مثلث ، $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، ق (∠ أ) = ق (∠ ب هـ ء)

فإذا كان : أ ب = ١٦ سم ، ب ء = ٤ سم

فإن : طول $\overline{\text{ب هـ}}$ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) $8\sqrt{3}$

(٣٦) في الشكل المقابل :



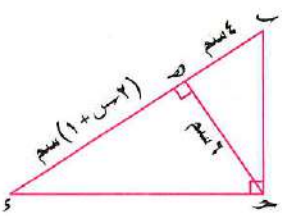
أ ء = (س + ٢) سم

، ب ء = ٤ سم ، حـ ء = ٩ سم

فإن : س = ... سم.

(أ) ١١ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٤

(٣٧) في الشكل المقابل :

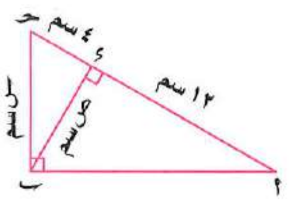


س = ...

(أ) ٨ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٨ ، ٤

(٣٨) في الشكل المقابل :

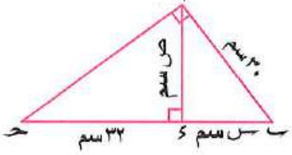


(س ، ص) = ...

(أ) (٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨) (ب) (٨ ، ٤ $\sqrt{٣}$)

(جـ) (٤ $\sqrt{٣}$ ، ٤ $\sqrt{٣}$) (د) (٨ ، ٨)

(٣٩) في الشكل المقابل :



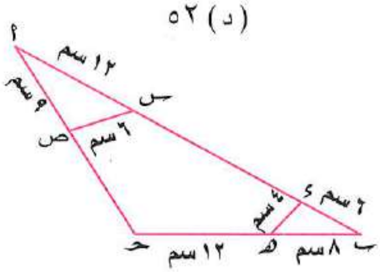
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، أ ء ⊥ ب جـ

، أ ب = ٣٠ سم ، ء جـ = ٣٢ سم

فإن : س + ص = ...

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨ (جـ) ٤٢ (د) ٥٢

(٤٠) في الشكل المقابل :

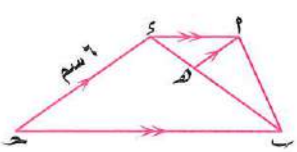


ص جـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠

(جـ) ١١ (د) ١٢

(٤١) في الشكل المقابل :

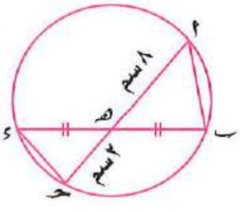


إذا كان : ب هـ = ٢ هـ ء

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤٢) في الشكل المقابل :

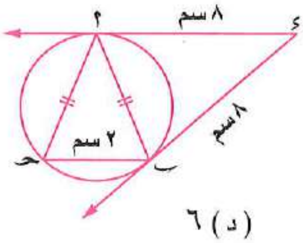


ب ء = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٤

(جـ) ١٦ (د) ٢

(٤٣) في الشكل المقابل :



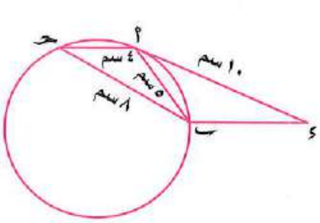
إذا كان : ء أ ، ء ب مماسين للدائرة عند أ ، ب على الترتيب

، ء أ = ء ب = ٨ سم ، ب جـ = ٢ سم

فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤٤) في الشكل المقابل :



أ ء مماسة للدائرة طول : ء ب = ... سم

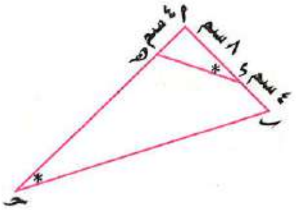
(أ) ٥ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٦ $\frac{١}{٤}$

(٤٥) يقف شخص طوله ١,٦ م بجانب عمود إنارة فإذا كان طول ظل الشخص ٢,٤ م وكان طول ظل عمود الإنارة هو ٦,٦ م فإن طول عمود الإنارة يساوى .... م

(أ) ٤,٤ (ب) ٩,٩ (جـ) ٨,٨ (د) ١٠,١

(٤٦) باستخدام الشكل المقابل :



جميع العبارات التالية صحيحة عدا ....

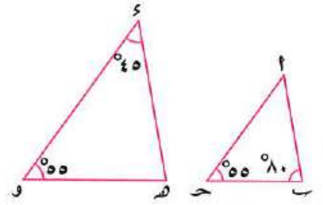
(أ) ب حـ = ٢ ء هـ (ب) الشكل ء ب حـ هـ رباعى دائرى.

(جـ) △ أ ء هـ ~ △ أ حـ ب (د) أ ء × أ ب = أ هـ × أ حـ

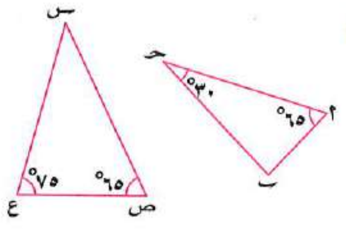
ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اذكر أى الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين ، وفى حالة التشابه اذكر سبب التشابه :

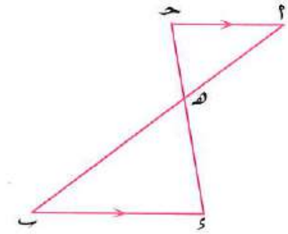
(١)



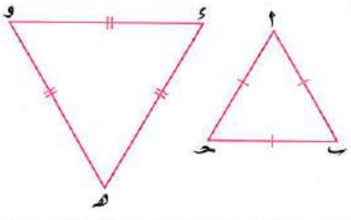
(٢)



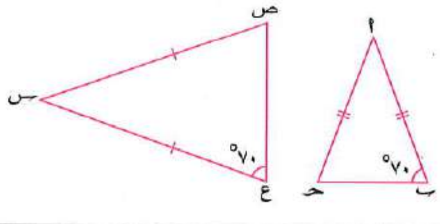
(٣)



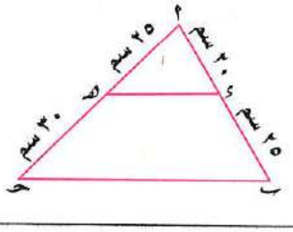
(٤)



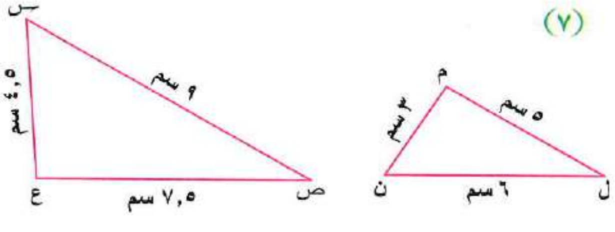
(٥)



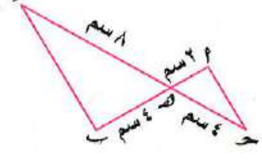
(٦)



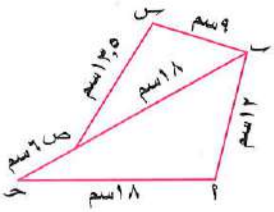
(٧)



(٨)



٢ **في الشكل المقابل :**



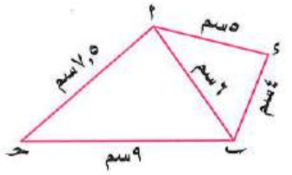
ب ، ص ، حـ على استقامة واحدة.

أثبت أن : (١) Δ س ب ص ~ Δ أ ب حـ

(٢) $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ينصف ∠ أ ب س

---

٣ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم

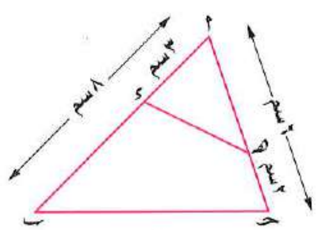
، أ حـ = ٧,٥ سم ، ء نقطة خارجة عن المثلث أ ب حـ

حيث : ء ب = ٤ سم ، ء أ = ٥ سم

أثبت أن : (١) Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ   (٢) $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ينصف ∠ ء ب حـ

---

٤ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ٦ سم

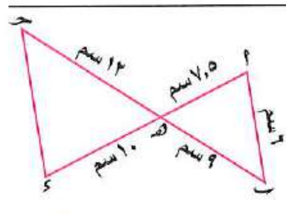
، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث أ ء = ٣ سم ، هـ ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$

حيث هـ حـ = ٢ سم

أثبت أن : Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب

---

٥ **في الشكل المقابل :**



«٨ سم»

$\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{ب حـ}}$ = {هـ} ، أ هـ = ٧,٥ سم ، هـ حـ = ١٢ سم

، ب هـ = ٩ سم ، هـ ء = ١٠ سم ، أ ب = ٦ سم

أثبت أن : Δ أ ب هـ ~ Δ ء حـ هـ   **ثم احسب :** طول $\overline{\text{حـ ء}}$

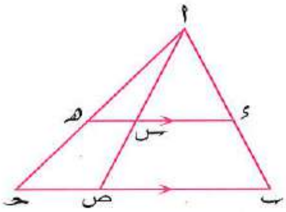
---

٦ في المثلث أ ب حـ : أ حـ > أ ب ، م ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ حيث : ق (∠ أ ب م) = ق (∠ حـ)

أثبت أن : (أ ب)^2 = أ م × أ حـ

---

٧ **في الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

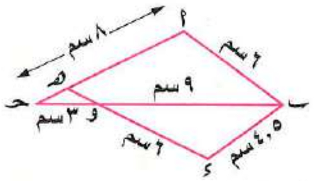
ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في هـ ، رسم $\overrightarrow{\text{أ س}}$ يقطع $\overline{\text{ء هـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$

في س ، ص على الترتيب.

(١) اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.

(٢) **أثبت أن :** $\frac{\text{ء س}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{ص حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}}$

٨ في الشكل المقابل :



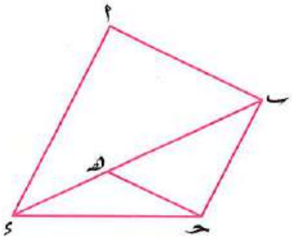
$\overline{\text{بحـ}} \cap \overline{\text{ءهـ}}$ = {و} ، أب = ٦ سم ، بحـ = ١٢ سم ، أحـ = ٨ سم

، وحـ = ٣ سم ، بء = ٤,٥ سم ، ءو = ٦ سم

أثبت أن : (١) Δ أبحـ ~ Δ ءبو (٢) Δ هـوحـ متساوى الساقين.

---

٩ في الشكل المقابل :



أبحـء شكل رباعى ، هـ $\in$ $\overline{\text{بء}}$ حيث :

$\frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{\text{حـهـ}}{\text{بحـ}}$ ، $\frac{\text{بء}}{\text{أء}} = \frac{\text{هـب}}{\text{بحـ}}$

أثبت أن : (١) $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$ (٢) $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـهـ}}$

---

١٠ أبحـ مثلث فيه : أب = ٤ سم ، أحـ = ٣ سم ، ء $\in$ $\overleftarrow{\text{بأ}}$ بحيث أء = ٤,٥ سم

، هـ $\in$ $\overleftarrow{\text{حـأ}}$ بحيث أهـ = ٦ سم **أثبت أن :** الشكل بحـءهـ رباعى دائرى.

---

١١ أبحـ مثلث ، أب = ٨ سم ، أحـ = ١٠ سم ، بحـ = ١٢ سم ، هـ $\in$ $\overline{\text{أب}}$

حيث : أهـ = ٢ سم ، ء $\in$ $\overline{\text{بحـ}}$ حيث : بء = ٤ سم

(١) **برهن أن :** Δ بءهـ ~ Δ بأحـ **واستنتج :** طول $\overline{\text{ءهـ}}$ «٥ سم»

(٢) **برهن أن :** الشكل أحـءهـ رباعى دائرى.

---

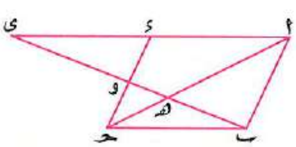
١٢ س ص ع مثلث قائم الزاوية فى س ، رسم $\overleftarrow{\text{سل}}$ $\perp$ $\overline{\text{صع}}$ ويقطعه فى ل

أثبت أن : $\frac{(\text{س ص})^2}{(\text{س ع})^2} = \frac{\text{ص ل}}{\text{ل ع}}$ وإذا كان : س ص = ١٢ سم ، س ع = ١٦ سم

فاحسب : طول كل من $\overline{\text{ص ل}}$ ، $\overline{\text{س ل}}$ «٧,٢ سم ، ٩,٦ سم»

---

١٣ في الشكل المقابل :



أبحـء متوازى أضلاع ، و $\in$ $\overline{\text{ءحـ}}$

، رسم $\overrightarrow{\text{بو}}$ فقطع $\overline{\text{أحـ}}$ فى هـ ، وقطع $\overleftarrow{\text{أء}}$ فى ى

أثبت أن : (١) Δ أهـى ~ Δ حـهـب (٢) $(\text{هـب})^2$ = هـى × هـو

---

١٤ 📖 $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ءحـ}}$ وتران فى دائرة ، $\overleftarrow{\text{أب}} \cap \overleftarrow{\text{حـء}}$ = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة

، أب = ٤ سم ، ءحـ = ٧ سم ، بهـ = ٦ سم

أثبت أن : Δ أءهـ ~ Δ حـبهـ ، **ثم أوجد :** طول $\overline{\text{حـهـ}}$ «١٢ سم»

١٥ أب قطر فى دائرة ، حـ نقطة تنتمى للدائرة ، رسم أحـ فقطع المماس للدائرة عند ب فى نقطة ء

أثبت أن : $(\text{ب حـ})^2$ = حـ أ × حـ ء

---

١٦ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، رسم أء ⊥ ب حـ ليقطعه فى ء

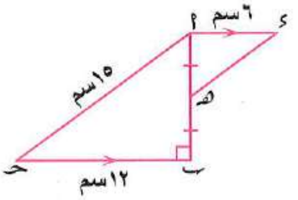
، إذا كان : $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{1}{2}$ ، أء = $6\sqrt{2}$ سم

أوجد : طول كل من ب ء ، أ ب ، أ حـ

«٦ سم ، $6\sqrt{3}$ سم ، $6\sqrt{6}$ سم»

---

١٧ فى الشكل المقابل :



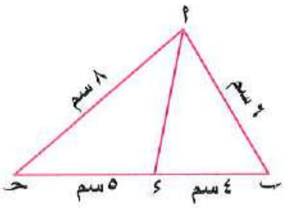
أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ حـ = ١٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم

، هـ منتصف أ ب ، أء // ب حـ بحيث أء = ٦ سم

أثبت أن : △ أ ب حـ ~ △ هـ أ ء **واستنتج أن :** أ حـ // ء هـ

---

١٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : ء ∈ ب حـ بحيث : ب ء = ٤ سم

، ء حـ = ٥ سم فإذا كانت : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٨ سم

(١) **أثبت أن :** △ أ ب حـ ~ △ ء ب أ

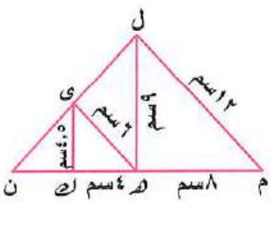
(٢) **أوجد :** طول أء

«$5\frac{1}{3}$ سم»

(٣) **أثبت أن :** أ ب مماسة للدائرة المارة برءوس △ أ ء حـ

---

١٩ فى الشكل المقابل :



ل م ن مثلث ، هـ ∈ م ن ، ك ∈ م ن ، ى ∈ ل ن

، ل م = ١٢ سم ، م هـ = ٨ سم ، ل هـ = ٩ سم

، هـ ى = ٦ سم ، هـ ك = ٤ سم ، ك ى = ٤,٥ سم

أثبت أن : ى ك // ل هـ ، هـ ى // م ل **ثم احسب :** طول ن ك

«٤ سم»

---

٢٠ أ ب حـ ، ء هـ و مثلثان متشابهان. رسم أ س ⊥ ب حـ ليقطعه فى س ، ورسم ء ص ⊥ هـ و ليقطعه فى ص **أثبت أن :** ب س × ص و = حـ س × ص هـ

---

٢١ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، حـ أ = ١٥ سم ، ء ∈ ب حـ

بحيث ب ء = $\frac{1}{4}$ ب حـ ، رسم ء هـ ⊥ ب حـ قطع أ حـ فى هـ

أوجد : مساحة الشكل أ ب ء هـ

«$23\frac{5}{8}$ سم^2»

٢٢ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في أ ، ء ∈ $\overline{\text{ب ح}}$ بحيث : $\frac{\text{ء ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$

أثبت أن : (١) ∆ أ ب ح ~ ∆ ء ب أ   (٢) $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ح}}$

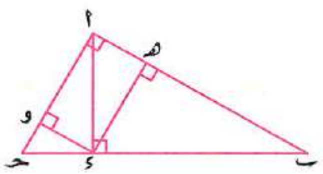
---

٢٣ أ ب ح ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه $\overline{\text{أ ح}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ في هـ ، فإذا كان : $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}}$

أثبت أن : (١) ∆ أ ب هـ ~ ∆ ء ب ح   (٢) $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أ ب ح

---

٢٤ في الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث قائم الزاوية في أ

، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ح}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ح}}$

أثبت أن : (١) ∆ أ ء هـ ~ ∆ ح ء و

(٢) مساحة المستطيل أ هـ ء و = $\sqrt{\text{أ هـ × هـ ب × أ و × و ح}}$

---

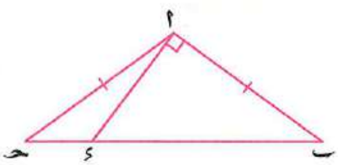
٢٥ أ ب ح مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{ب ح}}$ ، رسمت $\overline{\text{أ ء}}$ وفرضت عليها نقطة هـ ثم رسم

$\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ في س ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{هـ ص}}$ // $\overline{\text{أ ح}}$ ويقطع $\overline{\text{ء ح}}$ في ص

أثبت أن : (١) ∆ أ ب ح ~ ∆ هـ س ص   (٢) س ص × أ ء = ب ح × ء هـ

---

٢٦ في الشكل المقابل :



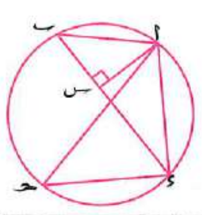
أ ب ح مثلث منفرج الزاوية في أ ، أ ب = أ ح

، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب ح}}$ في ء

أثبت أن : ٢ $(\text{أ ب})^2$ = ب ء × ب ح

---

٢٧ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ س}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\frac{\text{ب س}}{\text{ح ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

أثبت أن : (١) ∆ ب س أ ~ ∆ ح ء أ   (٢) $\overline{\text{أ ح}}$ قطر في الدائرة.

---

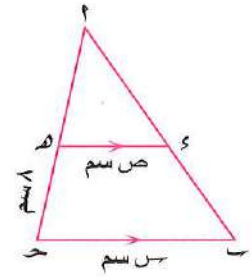
٢٨ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = أ ح ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ خارج المثلث ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ح ب}}$ خارج المثلث

بحيث $(\text{أ ب})^2$ = ء ب × ح هـ   **أثبت أن :** ∆ أ ب ء ~ ∆ هـ ح أ

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

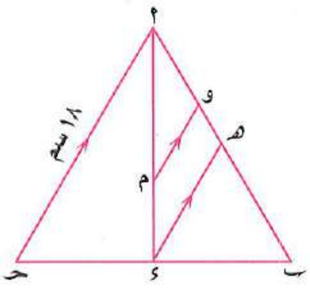


إذا كان : $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{٢}{٧}$

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (د) ١٠

(٢) فى الشكل المقابل :



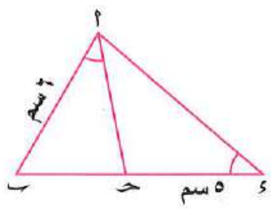
إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات △ أ ب حـ

فإن : طول $\overline{\text{و م}}$ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٣) فى الشكل المقابل :

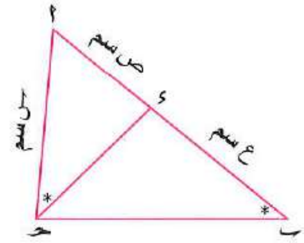


حـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ ، ق (∠ ء) = ق (∠ ب أ حـ) ، أ ب = ٦ سم ، حـ ء = ٥ سم

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٤) فى الشكل المقابل :



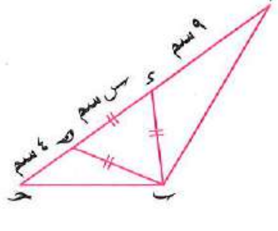
إذا كان : س^{٢} − ص^{٢} = ١٦

فإن : ص × ع = ... سم^{٢}

(أ) ٤ (ب) ٨

(جـ) ١٢ (د) ١٦

(٥) فى الشكل المقابل :



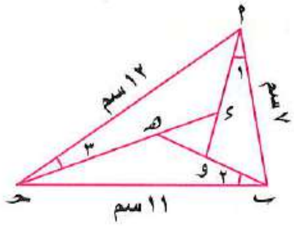
إذا كان : ق (∠ أ ب حـ) = ١٢٠°

، △ ب ء هـ متساوى الأضلاع

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٦) فى الشكل المقابل :



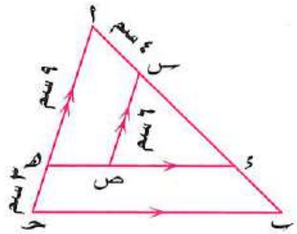
إذا كان : ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣)

فإن : ءهـ : هـ و : و ء = ...

(أ) ٧ : ١١ : ١٢ (ب) ١٢ : ١١ : ٧

(جـ) ١٢ : ٧ : ١١ (د) ١١ : ١٢ : ٧

(٧) فى الشكل المقابل :



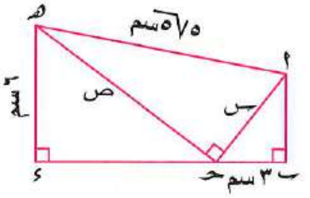
$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

فإن : ء ب = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(٨) فى الشكل المقابل :

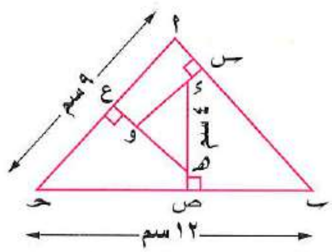


س + ص = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٥

(جـ) ١٨ (د) ٢١

(٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{و س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

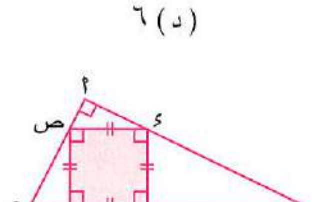
، $\overline{\text{هـ ع}}$ ⊥ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، أ حـ = ٩ سم

، ب حـ = ١٢ سم ، ء هـ = ٤ سم

فإن : هـ و = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٠) فى الشكل المقابل :



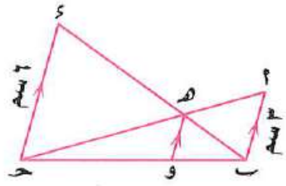
إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ

، ء هـ و ص مربع ، ب هـ = ٨ سم ، و حـ = ٢ سم

فإن : مساحة المربع ء هـ و ص = ... سم²

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٢٠ (د) ٣٦

(١١) في الشكل المقابل :

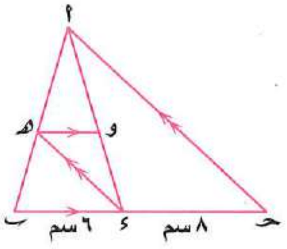


إذا كان : $\overline{أب}$ // $\overline{هـ و}$ // $\overline{حـ ء}$

فإن : هـ و = ... سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٢ (جـ) ١,٥ (د) ١

(١٢) في الشكل المقابل :



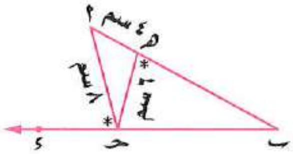
إذا كانت : $\overline{و هـ}$ // $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء هـ}$ // $\overline{حـ أ}$

، ب ء = ٦ سم ، ء حـ = ٨ سم

فإن : و هـ = ... سم

(أ) $\frac{١٢}{٧}$ (ب) $\frac{١٨}{٧}$ (جـ) $\frac{٢٤}{٧}$ (د) $\frac{٢٨}{٧}$

(١٣) في الشكل المقابل :

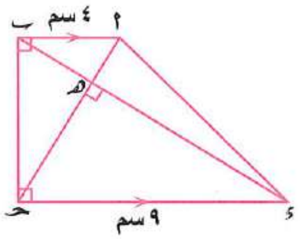


إذا كان : ق (∠ أ حـ ء) = ق (∠ ب هـ حـ)

فإن : ب هـ + ب حـ = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

(١٤) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شبه منحرف

، ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء حـ ب) = ٩٠° ، $\overline{أ حـ}$ ⊥ $\overline{ب ء}$

فإن مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء = ... سم^{٢}

(أ) ١٣ (ب) ٢٦ (جـ) ٣٩ (د) ٦٠

الدرس

3

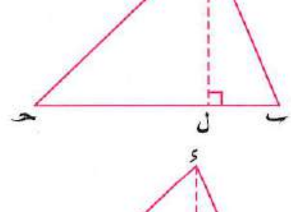
العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

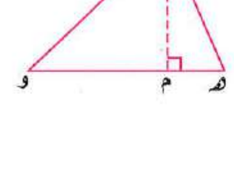
نعلم أن النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين تساوى النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ، وفى هذا الدرس سنتناول العلاقة بين مساحتى مضلعين متشابهين.

أولًا النسبة بين مساحتى سطحى مثلثين متشابهين

نظرية ٣

النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.





المعطيات $\triangle$ أ ب جـ $\sim$ $\triangle$ ء هـ و

المطلوب إثبات أن : $\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}\right)^2$

العمل نرسم $\overleftrightarrow{\text{أل}} \perp \overline{\text{بجـ}}$ يقطعها فى ل ، $\overleftrightarrow{\text{ءم}} \perp \overline{\text{هـو}}$ يقطعها فى م

البرهان $\because$ $\triangle$ أ ب جـ $\sim$ $\triangle$ ء هـ و

$\therefore$ ق$(\angle$ ب$)$ = ق$(\angle$ هـ$)$ ، $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$ (١)

، $\because$ $\triangle\triangle$ أ ب ل ، ء هـ م قائما الزاوية ، ق$(\angle$ ب$)$ = ق$(\angle$ هـ$)$

$\therefore$ $\triangle$ أ ب ل $\sim$ $\triangle$ ء هـ م $\therefore$ $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{أل}}{\text{ءم}}$ (٢)

، $\because$ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{بجـ} \times \text{أل}}{\frac{1}{2}\,\text{هـو} \times \text{ءم}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} \times \frac{\text{أل}}{\text{ءم}}$ (٣)

وبالتعويض من (١) ، (٢) فى (٣) ينتج أن :

$\frac{\text{م}(\triangle \text{أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ءهـو})} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} \times \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} = \left(\frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}\right)^2$ (وهو المطلوب)

ملاحظة ١

من برهان النظرية السابقة نستطيع أن نستنتج أن :

النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما .

مثال ١

إذا كانت النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين هى $\frac{٩}{١٦}$ ، ومحيط المثلث الأصغر ٦٠ سم أوجد محيط المثلث الأكبر.

الحل

بفرض أن المثلثين المتشابهين هما : Δ أ ب جـ ، Δ س ص ع حيث Δ أ ب جـ هو المثلث الأصغر :

$$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\Delta\ \text{س ص ع})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}}\right)^{٢} = \frac{٩}{١٦} \qquad \therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore \frac{\text{محيط}\ \Delta\ \text{أ ب جـ}}{\text{محيط}\ \Delta\ \text{س ص ع}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{٣}{٤} \qquad \therefore \frac{٦٠}{\text{محيط}\ \Delta\ \text{س ص ع}} = \frac{٣}{٤}$$

$\therefore$ محيط Δ س ص ع $= \frac{٦٠ \times ٤}{٣} = ٨٠$ سم **(وهو المطلوب)**

مثال ٢

أ ب جـ مثلث مساحته ٦٢,٥ سم^{٢} ، رسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى س ، $\overline{\text{أ جـ}}$ فى ص

فإذا كان أ س : س ب = ٢ : ٣ **فأوجد :** مساحة الشكل س ب جـ ص

الحل

فى Δ أ ب جـ : $\because$ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ Δ أ س ص $\sim$ Δ أ ب جـ

$$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ س ص})}{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب جـ})} = \left(\frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}}\right)^{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ س ص})}{٦٢,٥} = \left(\frac{٢}{٥}\right)^{٢}$$

$\therefore$ م (Δ أ س ص) $= \frac{٤}{٢٥} \times ٦٢,٥ = ١٠$ سم^{٢}

$\therefore$ مساحة الشكل س ب جـ ص = م (Δ أ ب جـ) − م (Δ أ س ص)

$= ٦٢,٥ - ١٠ = ٥٢,٥$ سم^{٢} **(وهو المطلوب)**

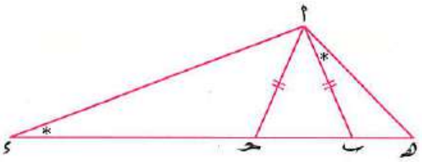
مثال ٣

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = أ جـ ، ء $\in$ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ خارج المثلث ، هـ $\in$ $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ خارج المثلث بحيث

ق ($\angle$ ب أ هـ) = ق ($\angle$ ء) فإذا كانت مساحة Δ أ جـ ء أربعة أمثال مساحة Δ أ ب هـ

فأثبت أن : ء جـ = ٢ أ جـ

الحـــل



∵ $\Delta\Delta$ أب هـ ، ء ح أ فيهما :

ق (∠ب أ هـ) = ق (∠ء)

، ق (∠أ ب هـ) = ق (∠ء ح أ) (مكملتان لزاويتين متساويتين فى القياس)

∴ Δ أب هـ ~ Δ ء ح أ ∴ $\dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{أب هـ})}{\text{م}(\Delta\,\text{ء ح أ})} = \left(\dfrac{\text{أب}}{\text{ء ح}}\right)^{٢}$

∴ $\dfrac{١}{٤} = \left(\dfrac{\text{أب}}{\text{ء ح}}\right)^{٢}$ ∴ $\dfrac{\text{أب}}{\text{ء ح}} = \dfrac{١}{٢}$ ∴ ء ح = ٢ أب

، ∵ أب = أح ∴ ء ح = ٢ أح (وهو المطلوب)

مـثـال ٤

أب ح مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث $\dfrac{\text{أب}}{\text{أح}} = \dfrac{٥}{٣}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ مماسًا للدائرة عند أ قطع $\overleftarrow{\text{ب ح}}$ فى ء

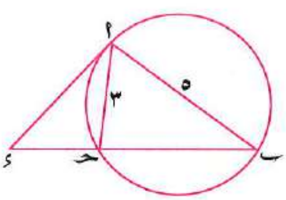
أوجد : م (Δ أ ح ء) : م (Δ أ ب ح)

الحـــل

∵ $\Delta\Delta$ أ ء ح ، ب ء أ فيهما : ∠ء مشتركة

، ق (∠ح أ ء) = ق (∠ب) (مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{أح}}$)

∴ Δ أ ء ح ~ Δ ب ء أ



∴ $\dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ء ح})}{\text{م}(\Delta\,\text{ب ء أ})} = \left(\dfrac{\text{ح أ}}{\text{ب أ}}\right)^{٢} = \left(\dfrac{٣}{٥}\right)^{٢} = \dfrac{٩}{٢٥}$

∴ $\dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ء ح})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب ح}) + \text{م}(\Delta\,\text{أ ء ح})} = \dfrac{٩}{٢٥}$

∴ ٢٥ م (Δ أ ء ح) = ٩ م (Δ أ ب ح) + ٩ م (Δ أ ء ح)

∴ ١٦ م (Δ أ ء ح) = ٩ م (Δ أ ب ح)

∴ $\dfrac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ء ح})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب ح})} = \dfrac{٩}{١٦}$ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٥ فإذا كانت مساحة المثلث الأكبر ١٥٠ سم^{٢}
احسب مساحة المثلث الأصغر.

ملاحظة ٢

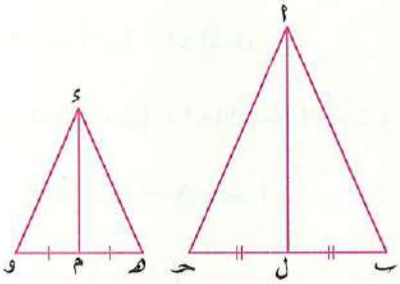
النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى متوسطين متناظرين فيهما.

فى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب حـ $\sim \Delta$ ء هـ و

، ل منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، م منتصف $\overline{\text{هـ و}}$

فإن : $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{ء م}}\right)^{٢}$



الإثبات

$\because \Delta$ أ ب حـ $\sim \Delta$ ء هـ و $\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ و}}$

، $\because$ ب حـ = ٢ ب ل ، هـ و = ٢ هـ م $\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{٢ ب ل}}{\text{٢ هـ م}}$

$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب ل}}{\text{هـ م}}$ ، $\because \angle$ ب $\equiv \angle$ هـ (لأن Δ أ ب حـ $\sim \Delta$ ء هـ و)

$\therefore \Delta$ أ ب ل $\sim \Delta$ ء هـ م $\therefore \frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب ل})}{\text{م}(\Delta \text{ ء هـ م})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{ء م}}\right)^{٢}$ (١)

، $\because \frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ل}}{\text{ء م}}\right)^{٢}$

ملاحظة ٣

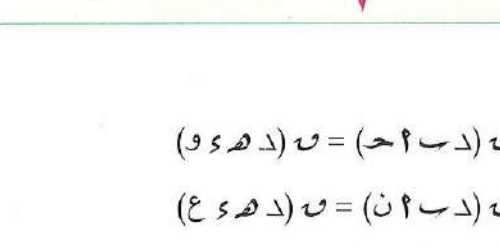
فى الشكل المقابل :

إذا كان : Δ أ ب حـ $\sim \Delta$ ء هـ و

، $\overleftarrow{\text{أ ن}}$ ينصف $\angle$ أ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ن

، $\overleftarrow{\text{ء ع}}$ ينصف $\angle$ ء ويقطع $\overline{\text{هـ و}}$ فى ع

فإن : $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب حـ})}{\text{م}(\Delta \text{ ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{ء ع}}\right)^{٢}$



الإثبات

$\because \Delta$ أ ب حـ $\sim \Delta$ ء هـ و $\therefore$ ق ($\angle$ ب أ حـ) = ق ($\angle$ هـ ء و)

$\therefore \frac{١}{٢}$ ق ($\angle$ ب أ حـ) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\angle$ هـ ء و) $\therefore$ ق ($\angle$ ب أ ن) = ق ($\angle$ هـ ء ع)

، $\because$ ق ($\angle$ ب) = ق ($\angle$ هـ) $\therefore \Delta$ أ ب ن $\sim \Delta$ ء هـ ع

$\therefore \frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب ن})}{\text{م}(\Delta \text{ ء هـ ع})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{ء ع}}\right)^{٢}$ (١)

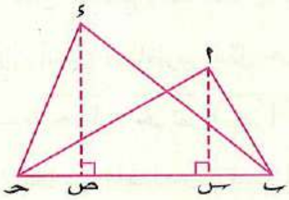
، ∵ $\frac{\text{م}(\triangle\ \text{أ ب ح})}{\text{م}(\triangle\ \text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{م}(\triangle\ \text{أ ب ح})}{\text{م}(\triangle\ \text{ء هـ و})} = \left(\frac{\text{أ ن}}{\text{ء ع}}\right)^{٢}$

ملاحظة ٤

النسبة بين مساحتى مثلثين مشتركين فى القاعدة تساوى النسبة بين ارتفاعيهما.

فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{ب ح}}$ قاعدة مشتركة بين △ أ ب ح ، △ ء ب ح

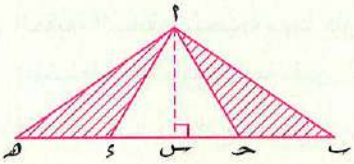
∴ $\frac{\text{م}(\triangle\ \text{أ ب ح})}{\text{م}(\triangle\ \text{ء ب ح})} = \frac{\frac{١}{٢}\ \text{ب ح} \times \text{أ س}}{\frac{١}{٢}\ \text{ب ح} \times \text{ء ص}} = \frac{\text{أ س}}{\text{ء ص}}$

مع ملاحظة أنه ليس من الضرورى أن يكون المثلثان متشابهين.

ملاحظة ٥

النسبة بين مساحتى مثلثين مشتركين فى الارتفاع تساوى النسبة بين طولى قاعدتيهما.

فى الشكل المقابل :

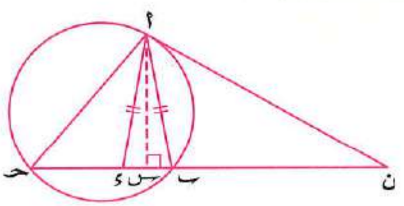


أ س ارتفاع مشترك بين △ أ ب ح ، △ أ ء هـ

∴ $\frac{\text{م}(\triangle\ \text{أ ب ح})}{\text{م}(\triangle\ \text{أ ء هـ})} = \frac{\frac{١}{٢}\ \text{ب ح} \times \text{أ س}}{\frac{١}{٢}\ \text{ء هـ} \times \text{أ س}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ء هـ}}$

مع ملاحظة أنه ليس من الضرورى أن يكون المثلثان متشابهين.

مثال ٥



أ ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث : أ ح > أ ب ، ء ∈ $\overline{\text{ب ح}}$

بحيث : أ ء = أ ب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ يمس الدائرة عند أ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ح ب}}$ فى ن

أثبت أن : ب ن : ء ح = (أ ن)^{٢} : (ح أ)^{٢}

الحل

∵ $\frac{\text{م}(\triangle\ \text{أ ب ن})}{\text{م}(\triangle\ \text{ح ء أ})} = \frac{\frac{١}{٢}\ \text{ب ن} \times \text{أ س}}{\frac{١}{٢}\ \text{ء ح} \times \text{أ س}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{ء ح}}$ (١)

، ∵ أ ب = أ ء ∴ ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ ء ب) ∴ ق (∠ أ ب ن) = ق (∠ أ ء ح)

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ مماس ∴ ق (∠ ب أ ن) = ق (∠ ح) (مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

∴ △ أ ب ن ~ △ ح ء أ ∴ $\frac{\text{م}(\triangle\ \text{أ ب ن})}{\text{م}(\triangle\ \text{ح ء أ})} = \frac{(\text{أ ن})^{٢}}{(\text{ح أ})^{٢}}$ (٢)

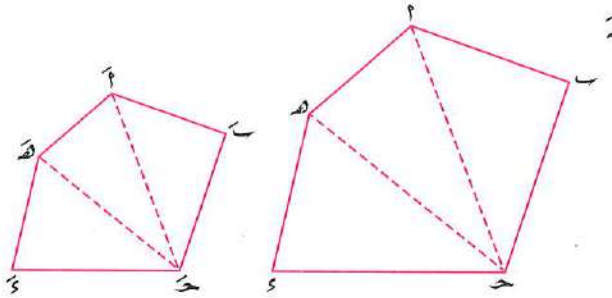
∴ من (١) ، (٢) ينتج أن : ب ن : ء ح = (أ ن)^{٢} : (ح أ)^{٢} (وهو المطلوب)

ثانيًا / النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

حقيقة

المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التى يشابه كل منها نظيره.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان المضلع أ ب جـ د هـ يشابه المضلع أَ بَ جَـ دَ هَـ

ومن رأسين متناظرين مثل جـ ، جَـ

رسمنا $\overline{\text{جـ أ}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$ ، $\overline{\text{جَـ أَ}}$ ، $\overline{\text{جَـ هَـ}}$

فإن كلاً من المضلعين ينقسم إلى ثلاثة مثلثات

ويكون : Δ أ ب جـ $\sim$ Δ أَ بَ جَـ

، Δ أ جـ هـ $\sim$ Δ أَ جَـ هَـ ، Δ هـ جـ د $\sim$ Δ هَـ جَـ دَ

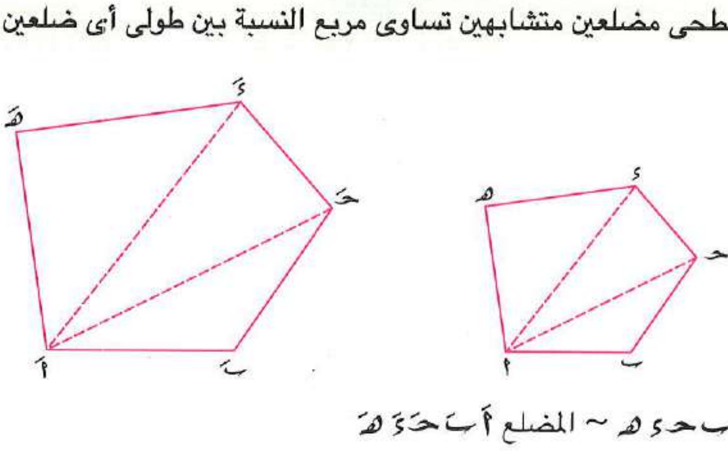
ملاحظات

- الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع فى المضلعين المتشابهين (المضلعان المتشابهان لهما نفس العدد من الأضلاع)
- إذا كان عدد أضلاع مضلع = ن ضلعًا

فإن عدد المثلثات التى ينقسم إليها برسم الأقطار المشتركة فى أحد الرءوس = (ن − ٢) مثلثًا.

نظرية / ٤

النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.



◂ **المعطيات** | المضلع أ ب جـ د هـ $\sim$ المضلع أَ بَ جَـ دَ هَـ

◂ **المطلوب** | إثبات أن : $\dfrac{\text{م (المضلع أ ب جـ د هـ)}}{\text{م (المضلع أَ بَ جَـ دَ هَـ)}} = \left(\dfrac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^2$

◂ **العمل** | من أ ، أَ نرسم $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{أَ جَـ}}$ ، $\overline{\text{أَ دَ}}$

◄ البرهان ∵ المضلع أ ب جـ ء هـ ~ المضلع أَ بَ جَ ءَ هَ

∴ فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات ، كل يشابه نظيره (حقيقة) ويكون :

$$\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{أَ بَ جَ})} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{بَ جَ}}\right)^2 \text{ ، } \frac{\text{م}(\triangle \text{أ جـ ء})}{\text{م}(\triangle \text{أَ جَ ءَ})} = \left(\frac{\text{جـ ء}}{\text{جَ ءَ}}\right)^2 \text{ ، } \frac{\text{م}(\triangle \text{أ ء هـ})}{\text{م}(\triangle \text{أَ ءَ هَ})} = \left(\frac{\text{ء هـ}}{\text{ءَ هَ}}\right)^2$$

، ∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{بَ جَ}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{جَ ءَ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ءَ هَ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}$ (من تشابه المضلعين)

$$\therefore \frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{أَ بَ جَ})} = \frac{\text{م}(\triangle \text{أ جـ ء})}{\text{م}(\triangle \text{أَ جَ ءَ})} = \frac{\text{م}(\triangle \text{أ ء هـ})}{\text{م}(\triangle \text{أَ ءَ هَ})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^2$$

ومن خواص التناسب

$$\frac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ}) + \text{م}(\triangle \text{أ جـ ء}) + \text{م}(\triangle \text{أ ء هـ})}{\text{م}(\triangle \text{أَ بَ جَ}) + \text{م}(\triangle \text{أَ جَ ءَ}) + \text{م}(\triangle \text{أَ ءَ هَ})} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^2$$

ويكون : $\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ ء هـ)}}{\text{م (المضلع أَ بَ جَ ءَ هَ)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}\right)^2$ (وهو المطلوب)

مثال ٦

مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٩٥ سم^2 أوجد مساحة كل منهما .

الحل

∵ النسبة بين محيطى المضلعين المتشابهين = ٣ : ٢

∴ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٢

∴ النسبة بين مساحتيهما = ٩ : ٤

وبفرض مساحة المضلع الأول = ٩ س ، ومساحة الثانى = ٤ س

∴ ٩ س + ٤ س = ١٩٥ ∴ ١٣ س = ١٩٥ ∴ س = ١٥

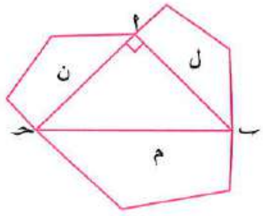
∴ مساحة المضلع الأول = ١٥ × ٩ = ١٣٥ سم^2

، مساحة المضلع الثانى = ١٥ × ٤ = ٦٠ سم^2 (وهو المطلوب)

مثال ٧

أثبت أنه إذا أنشئ على أضلاع مثلث قائم الزاوية ثلاثة مضلعات متشابهة بحيث تكون أضلاع المثلث أضلاعًا متناظرة فيها فإن مساحة المضلع المنشأ على الوتر تساوى مجموع مساحتى المضلعين المنشأين على ضلعى القائمة.

الحـل



∵ المضلع ل ~ المضلع م

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع ل)}}{\text{مـ (المضلع م)}} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{ب حـ}}\right)^{2} = \frac{(\text{أب})^{2}}{(\text{ب حـ})^{2}}$ (١)

، ∵ المضلع ن ~ المضلع م

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع ن)}}{\text{مـ (المضلع م)}} = \left(\frac{\text{أحـ}}{\text{ب حـ}}\right)^{2} = \frac{(\text{أحـ})^{2}}{(\text{ب حـ})^{2}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع ل)}}{\text{مـ (المضلع م)}} + \frac{\text{مـ (المضلع ن)}}{\text{مـ (المضلع م)}} = \frac{(\text{أب})^{2}}{(\text{ب حـ})^{2}} + \frac{(\text{أحـ})^{2}}{(\text{ب حـ})^{2}}$

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع ل)} + \text{مـ (المضلع ن)}}{\text{مـ (المضلع م)}} = \frac{(\text{أب})^{2} + (\text{أحـ})^{2}}{(\text{ب حـ})^{2}} = \frac{(\text{ب حـ})^{2}}{(\text{ب حـ})^{2}}$ (فيثاغورس)

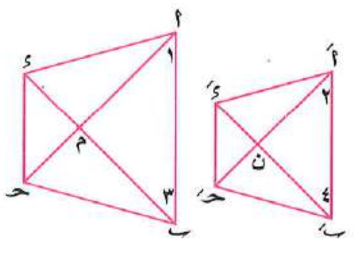
∴ مـ (المضلع ل) + مـ (المضلع ن) = مـ (المضلع م) (وهو المطلوب)

مثال ٨

أ ب حـ ء ، أَ بَ حَ ءَ مضلعان متشابهان ، تقاطع قطرا الأول فى م وقطرا الثانى فى ن

أثبت أن : $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{مـ (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{ب م})^{2}}{(\text{بَ ن})^{2}}$

الحـل



∵ المضلعان متشابهان.

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ أَ بَ حَ

وينتج أن : ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) ، Δ أ ب ء ~ Δ أَ بَ ءَ

وينتج أن : ق (∠ ٣) = ق (∠ ٤)

∴ Δ أ ب م ~ Δ أَ بَ ن ∴ $\frac{\text{ب م}}{\text{بَ ن}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}}$

∴ $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{مـ (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{أ ب})^{2}}{(\text{أَ بَ})^{2}} = \frac{(\text{ب م})^{2}}{(\text{بَ ن})^{2}}$ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

أ ب حـ ء ، أَ بَ حَ ءَ مضلعان متشابهان فإذا كانت : س منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{بَ حَ}}$

فأثبت أن : $\frac{\text{مـ (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{مـ (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} = \frac{(\text{س ء})^{2}}{(\text{ص ءَ})^{2}}$

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٩ فتكون النسبة بين مساحتيهما ....

(أ) ٤ : ٩ (ب) ٩ : ٤ (جـ) ٢ : ٣ (د) ١٦ : ٨١

(٢) إذا كان : Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع وكان : أ ب = ٣ س ص

فإن : $\frac{م(\Delta \text{ س ص ع})}{م(\Delta \text{ أ ب جـ})}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{9}$

(٣) إذا كانت النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين ٩ : ٤٩ فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ....

(أ) ٣ : ٧ (ب) ٩ : ٤٩ (جـ) ٣ : ١٠ (د) ١٠ : ٣

(٤) مثلثان متشابهان النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٥

فإذا كانت مساحة الأول ١٦ سم^2 فإن مساحة الثانى = ... سم^2

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(٥) إذا كان طولا ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين هما ١٢ سم ، ١٦ سم وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم^2 فإن مساحة المضلع الأكبر = ... سم^2

(أ) ٢٤ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ٢٠٠

(٦) إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٥ : ٧ ومساحة المضلع الأكبر ٢٤٥ سم^2

فإن مساحة المضلع الأصغر تساوى .... سم^2

(أ) ١٢٥ (ب) ١٧٥ (جـ) ٣٤٣ (د) ٤٨٠,٢

(٧) مربعان النسبة بين طولى ضلعيهما ٣ : ٤ وكانت مساحة أكبرهما ٤٨ سم^2

فإن مساحة أصغرهما = ... سم^2

(أ) ١٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ٢٧

(٨) مربعان النسبة بين طولى قطريهما ٢ : ٥ فإذا كانت مساحة أصغرهما ٤ سم^2

فإن مساحة أكبرهما .... سم^2

(أ) ٢٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٩) إذا كانت النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى ٩ : ٢٥ ومحيط المثلث الأصغر ٦٠ سم
فإن محيط المثلث الأكبر يساوى ....

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

(١٠) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و ، م (Δ أ ب حـ) = ٩ م (Δ ء هـ و) وكان ء هـ = ٤ سم
فإن : أ ب = ... سم

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) ١٢ (جـ) ٩ (د) ٣٦

(١١) دائرتان النسبة بين طولى قطريهما ٣ : ٥ فإذا كانت مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة الصغرى ٢٧ سم^٢
فإن مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة الكبرى تساوى .... سم^٢

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٥ (د) ١٠٠

(١٢) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ ومجموع مساحتيهما ١٥٠ سم^٢
فإن مساحة المضلع الأصغر = ... سم^٢

(أ) ٥٤ (ب) ٩٦ (جـ) ٧٥ (د) ٥٢

(١٣) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٥ : ٣ والفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم^٢
فإن مساحة المضلع الأصغر تساوى .... سم^٢

(أ) ١٨ (ب) ٥٠ (جـ) ٣٢ (د) ١٦

(١٤) إذا كان : المضلع م$_١$ ~ المضلع م$_٢$ ، وكان : $\frac{\text{مساحة سطح المضلع م}_١}{\text{مساحة سطح المضلع م}_٢} = \frac{٩}{١٦}$

فإن هذا يعنى أن : ....

(أ) مجموع مساحتى سطحى المضلعين = ٢٥ وحدة مربعة.

(ب) النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ٩ : ١٦

(جـ) معامل تشابه المضلع م$_١$ للمضلع م$_٢$ = $\frac{٩}{١٦}$

(د) محيط المضلع م$_١$ = $\frac{٣}{٤}$ محيط المضلع م$_٢$

(١٥) إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع أَ بَ حَ ءَ ، $\frac{\text{أ ب}}{\text{أَ بَ}} = \frac{١}{٣}$

فإن : $\frac{\text{م (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{م (المضلع أَ بَ حَ ءَ)}} + \frac{\text{محيط المضلع أ ب حـ ء}}{\text{محيط المضلع أَ بَ حَ ءَ}} = $ ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{٩}$ (د) $\frac{٤}{٩}$

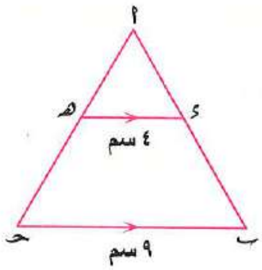
(١٦) فى الشكل المقابل :

أ ب = ٣ سم ، ب هـ = ٥ سم ، هـ ء = ٧ سم

فإن : $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ب هـ})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ حـ ء هـ})} \times \frac{\text{ق } (\angle \text{ أ ب هـ})}{\text{ق } (\angle \text{ ء حـ هـ})} = $ ....

(أ) $\frac{٩}{٤٩}$ (ب) $\frac{٢٥}{٤٩}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٦}{٤٩}$

(١٧) في الشكل المقابل :



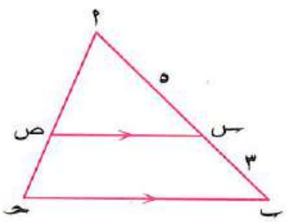
ءهـ // بحـ ، ءهـ = ٤ سم ، بحـ = ٩ سم

فإن : $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ أءهـ})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ أبحـ})}$ = ...

(أ) $\frac{١٦}{٨١}$ (ب) $\frac{٨١}{٦٥}$

(جـ) $\frac{٦٥}{٨١}$ (د) $\frac{١٦}{٦٥}$

(١٨) في الشكل المقابل :



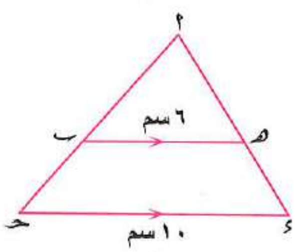
إذا كان أس : س ب = ٥ : ٣

، م (Δ أبحـ) = ٢٥,٦ سم^{٢}

فإن : م (Δ أس ص) = ... سم^{٢}

(أ) ١٠ (ب) ١٦ (جـ) ٤١ (د) ٦٥,٥

(١٩) في الشكل المقابل :



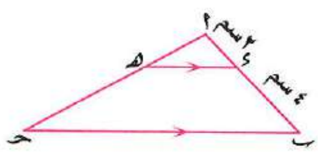
إذا كانت : بهـ // ءحـ

فإن : $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أبهـ}}{\text{مساحة شبه المنحرف بحـءهـ}}$ = ...

(أ) $\frac{٢٥}{٨١}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$

(جـ) $\frac{٩}{١٦}$ (د) $\frac{٩}{٢٥}$

(٢٠) في الشكل المقابل :

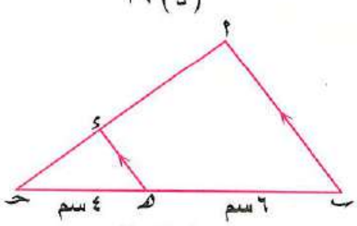


ءهـ // بحـ ، مساحة Δ أءهـ = ٨ سم^{٢}

فإن مساحة الشكل ءبحـهـ = ... سم^{٢}

(أ) ٢٧ (ب) ٦٤ (جـ) ٢٤ (د) ١٦

(٢١) في الشكل المقابل :

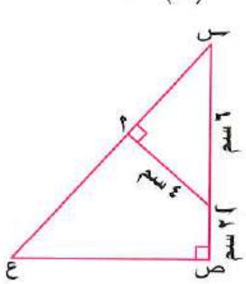


إذا كانت مساحة الشكل أبهـء = ٤٢ سم^{٢}

فإن مساحة Δ حـهـء = ... سم^{٢}

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

(٢٢) في الشكل المقابل :

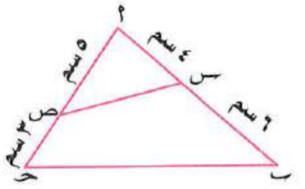


$\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ س أ ب})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ س ص ع})}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{١٦}$

(جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٢٣) في الشكل المقابل :

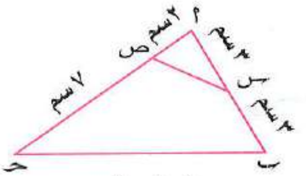


إذا كان مساحة Δ أ س ص = ١٠ سم^2

فإن مساحة سطح الشكل س ب حـ ص = ... سم^2

(أ) ٤٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٠

(٢٤) في الشكل المقابل :

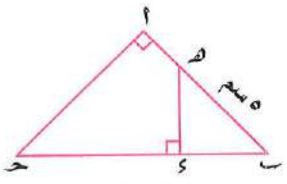


إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ = ٤٥ سم^2

فإن : مساحة Δ أ س ص = ... سم^2

(أ) ٢٢,٥ (ب) ٩٠ (جـ) ٥ (د) ١٥

(٢٥) في الشكل المقابل :

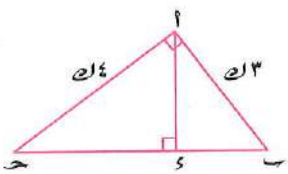


إذا كانت مساحة الشكل أ حـ ء هـ = ٣ مساحة المثلث هـ ب ء

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٢٦) في الشكل المقابل :

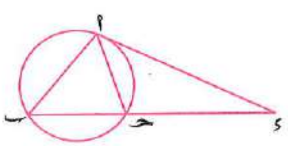


م (Δ أ ء حـ) = ١٦٠ سم^2

فإن : م (Δ أ ء ب) = ... سم^2

(أ) ٤٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٣٢٠

(٢٧) في الشكل المقابل :

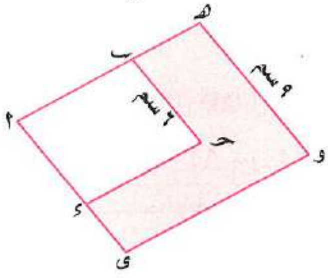


$\overline{\text{أء}}$ قطعة مماسة للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ ، ٣ أ ب = ٤ أ حـ

فإن : $\dfrac{\text{م (Δ أ حـ ء)}}{\text{م (Δ أ حـ ب)}}$ = ...

(أ) $\frac{٩}{٧}$ (ب) $\frac{٩}{١٦}$ (جـ) $\frac{٧}{١٦}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٢٨) في الشكل المقابل :



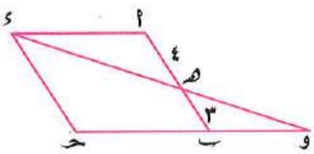
إذا كان : الشكل أ ب حـ ء ~ الشكل أ هـ و ى

وكانت مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٣٢ سم^2

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^2

(أ) ٧٢ (ب) ٤٨ (جـ) ٤٠ (د) ١٦

(٢٩) فى الشكل المقابل :



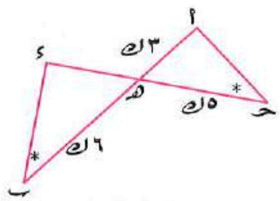
أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، أ هـ : هـ ب = ٤ : ٣

، م (△ أ ء هـ) = ٣٢ سم^{٢}

فإن : م (△ ء و حـ) = ... سم^{٢}

(أ) ١٨ (ب) ٩٨ (جـ) ٢٤ (د) ٤٢

(٣٠) فى الشكل المقابل :

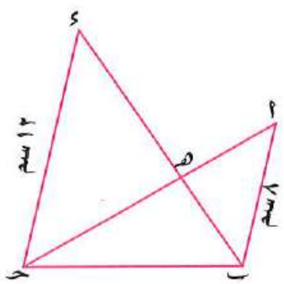


$\overline{أ ب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$ ، م (△ أ حـ هـ) = ٩٠٠ سم^{٢}

فإن : م (△ ء هـ ب) = ... سم^{٢}

(أ) ١٠٨٠ (ب) ١٢٠٨ (جـ) ١٢٩٦ (د) ١٢١٨

(٣١) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء رباعى دائرى فيه :

أ ب = ٨ سم ، حـ ء = ١٢ سم

فإن : م (△ أ هـ ب) : م (△ ء هـ حـ) = ...

(أ) ٣ : ٢ (ب) ٢ : ٣

(جـ) ٤ : ٩ (د) ٩ : ٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

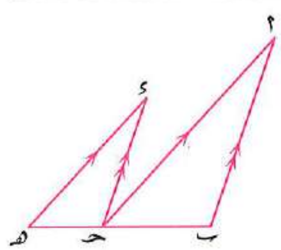
١ مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٣٠ سم^{٢} أوجد مساحة كل منهما.

«٩٠ سم^{٢} ، ٤٠ سم^{٢}»

٢ مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم^{٢} فأوجد مساحة كل منهما.

«٤ سم^{٢} ، ٣٦ سم^{٢}»

٣ فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{أ ب} // \overline{ء حـ}$

، $\overline{أ حـ} // \overline{ء هـ}$ ، أ ب = $\frac{٣}{٢}$ ء حـ

، مساحة △ ء حـ هـ = ١٦ سم^{٢}

أوجد : مساحة △ أ ب حـ

«٣٦ سم^{٢}»

٤ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث أء = ٢ ب ء ، هـ ∈ $\overline{\text{أحـ}}$ حيث $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

إذا كانت مساحة Δ أ ء هـ = ٦٠ سم^2 **أوجد :** مساحة شبه المنحرف ء ب حـ هـ «٧٥ سم^2»

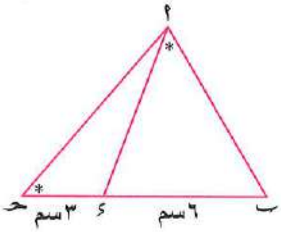
---

٥ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ٦ سم ، ء ∈ $\overline{\text{أب}}$ حيث أ ء = ٣ سم

، هـ ∈ $\overline{\text{أحـ}}$ حيث هـ حـ = ٢ سم **أوجد :** $\frac{\text{م (Δ أ ء هـ)}}{\text{م (الشكل ء ب حـ هـ)}}$ «$\frac{1}{3}$»

---

٦ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ مثلث فيه : ب حـ = ٩ سم ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ بحيث

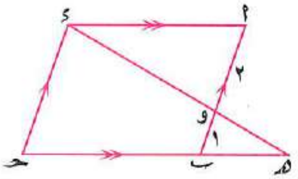
ب ء = ٦ سم فإذا كان ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ حـ)

فأثبت أن : Δ أ ب حـ ∼ Δ ء ب أ **واحسب :** طول $\overline{\text{أب}}$

ثم أوجد النسبة بين مساحتى المثلثين : أ ب حـ ، ء ب أ «$3\sqrt{6}$ سم ، ٣ : ٢»

---

٧ **فى الشكل المقابل :**



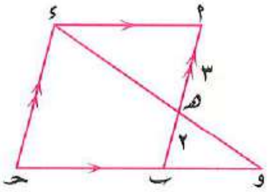
أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، $\frac{\text{ب و}}{\text{أ و}} = \frac{1}{2}$

، م (Δ ب هـ و) = ٩ سم^2

أوجد : مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء «١٠٨ سم^2»

---

٨ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$

حيث $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{3}{2}$ ، $\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ = {و}

(١) **أثبت أن :** Δ ء حـ و ∼ Δ هـ أ ء (٢) **أوجد :** $\frac{\text{م (Δ ء حـ و)}}{\text{م (Δ هـ أ ء)}}$ «$\frac{25}{9}$»

---

٩ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، س ∈ $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، س ∉ $\overline{\text{أب}}$ حيث ب س = ٢ أ ب

، ص ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، ص ∉ $\overline{\text{حـ ب}}$ حيث ب ص = ٢ ب حـ ، رسم متوازى الأضلاع ب س ع ص

أثبت أن : $\frac{\text{م (متوازى الأضلاع أ ب حـ ء)}}{\text{م (متوازى الأضلاع س ب ص ع)}} = \frac{1}{4}$

---

١٠ أ ب حـ ء ، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{ص ع}}$

فأثبت أن : م (المضلع أ ب حـ ء) : م (المضلع س ص ع ل) = (م ء)^2 : (ن ل)^2

١١ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، رسم قاطعان يمران بالنقطة أ يقطعان الدائرة م فى ب ، ء ويقطعان الدائرة ن فى حـ ، هـ أثبت أن : $\frac{م (\Delta أ ب ء)}{م (\Delta أ حـ هـ)} = \frac{(ب ء)^2}{(حـ هـ)^2}$

---

١٢ أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، رسم $\overleftarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى ء ويقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن : م (Δ أ ب هـ) : م (Δ أ ء حـ) : م (Δ ب ء هـ) = $(هـ ب)^2 : (حـ ء)^2 : (هـ ء)^2$

---

١٣ إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع ، $\overline{أ ء}$ ، $\overline{س ل}$ ارتفاعين متناظرين فيهما

فأثبت أن : ب حـ × س ل = أ ء × ص ع

---

١٤ 📖 أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع أ ب س ، ب حـ ص ، أ حـ ع أثبت أن : م (Δ أ ب س) + م (Δ ب حـ ص) = م (Δ أ حـ ع)

---

١٥ 📖 أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{أ ب}{ب حـ} = \frac{٤}{٣}$ ، رسمت الدائرة المارة برؤوسه ومن نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع $\overleftarrow{أ حـ}$ فى هـ أثبت أن : $\frac{م (\Delta أ ب حـ)}{م (\Delta أ ب هـ)} = \frac{٧}{١٦}$

---

١٦ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، رسم $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overline{أ ء}$ ، ويقطع $\overline{أ ب}$ فى س ، $\overline{حـ ء}$ فى ص وبحيث ينقسم شبه المنحرف إلى المضلعين المتشابهين أ س ص ء ، س ب حـ ص

أثبت أن : $\frac{م \text{ (المضلع أ س ص ء)}}{م \text{ (المضلع س ب حـ ص)}} = \frac{م (\Delta أ ب ء)}{م (\Delta ب ء حـ)}$

---

١٧ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ يقطعه فى ء ، رسم المثلثان المتساويا الأضلاع أ ب هـ ، حـ أ و خارج المثلث أ ب حـ

أثبت أن : (١) المضلع أ ء ب هـ ~ المضلع حـ ء أ و

(٢) $\frac{م \text{ (المضلع أ ء ب هـ)}}{م \text{ (المضلع حـ ء أ و)}} = \frac{ب ء}{حـ ء}$

---

١٨ 📖 أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، $\overleftarrow{ب ء}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ يقطعه فى ء ، رُسم على $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب حـ}$ المربعان أ س ص ب ، ب م ن حـ خارج المثلث أ ب حـ

(١) أثبت أن : المضلع ء أ س ص ب ~ المضلع ء ب م ن حـ

(٢) إذا كان : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ١٠ سم

أوجد : النسبة بين مساحتى سطحى المضلعين. « $\frac{٩}{١٦}$ »

١٩ ا ب حـ مثلث فيه $\overline{اب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{احـ}$ أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة مرسومة خارج المثلث ، وهى المضلعات س ، ص ، ع على الترتيب.

فإذا كانت مساحة المضلع س = ٤٠ سم^٢ ، ومساحة المضلع ص = ٨٥ سم^٢ ، ومساحة المضلع ع = ١٢٥ سم^٢ أثبت أن المثلث ا ب حـ قائم الزاوية.

---

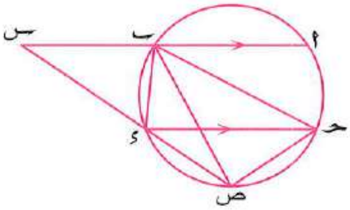
٢٠ ا ب حـ ء مربع ، قسمت $\overline{اب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{حـء}$ ، $\overline{ءا}$ بالنقاط س ، ص ، ع ، ل على الترتيب بنسبة ١ : ٣

أثبت أن : (١) الشكل س ص ع ل مربع.

(٢) $\frac{\text{م (المربع س ص ع ل)}}{\text{م (المربع ا ب حـ ء)}} = \frac{٥}{٨}$

---

٢١ **فى الشكل المقابل :**



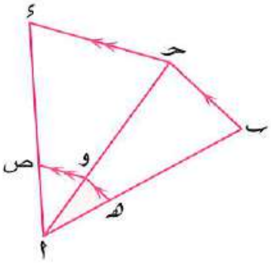
$\overline{اب}$ ، $\overline{حـء}$ وتران متوازيان فى دائرة ، $\overleftrightarrow{اب} \cap \overleftrightarrow{صء} = \{س\}$

أثبت أن : $\frac{\text{م}(\triangle \text{ ء ب س})}{\text{م}(\triangle \text{ حـ ص ب})} = \frac{(\text{س ب})^٢}{(\text{ب ص})^٢}$

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) **فى الشكل المقابل :**



إذا كانت مساحة (الشكل ء ص و حـ) = ٤٠ سم^٢

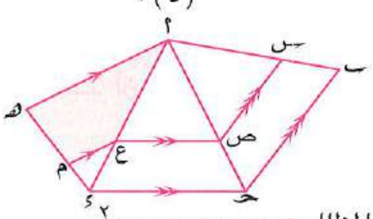
، مساحة (الشكل و هـ ب حـ) = ٣٢ سم^٢

، مساحة ($\triangle$ ا و ص) = ٥ سم^٢

فإن مساحة ($\triangle$ ا هـ و) = ... سم^٢

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢) **فى الشكل المقابل :**



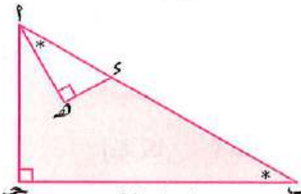
إذا كانت مساحة ($\triangle$ ا س ص) = ٤٠ سم^٢

، مساحة ($\triangle$ ء ع م) = ١٣ سم^٢

، مساحة (الشكل س ب حـ ص) = ٥٠ سم^٢ فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) ٧٧ (ب) ٩٢ (جـ) ١٠٤ (د) ١١٢

(٣) **فى الشكل المقابل :**

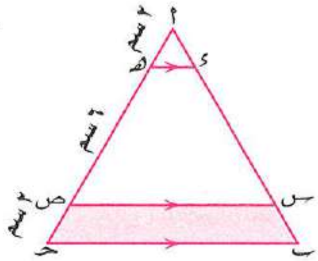


إذا كان : ا ب = ٣ ا ء وكانت مساحة $\triangle$ ا ء هـ = ٦ سم^٢

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^٢

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

(٤) في الشكل المقابل :



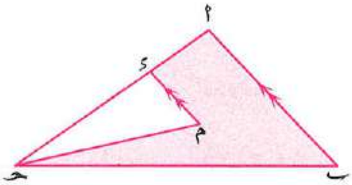
إذا كانت مساحة الشكل ء س ص هـ = ٣٠ سم^{٢}

فإن مساحة الشكل س ب حـ ص = ... سم^{٢}

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٥) في الشكل المقابل :



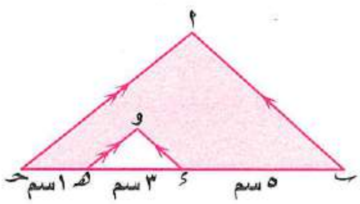
إذا كانت م نقطة تلاقي متوسطات Δ أ ب حـ ، $\overline{\text{م ء}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

وكانت مساحة Δ أ ب حـ = ٣٦ سم^{٢}

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٢٧ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٢ (د) ٣٣

(٦) في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة Δ ء هـ و = ٦ سم^{٢}

فإن مساحة المنطقة المظللة = ... سم^{٢}

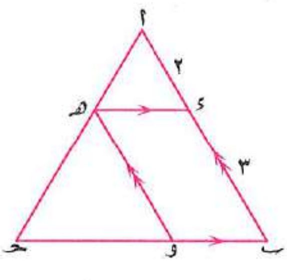
(أ) ٢٧ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٨ (د) ٥٤

(٧) إذا كان Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و وكان أ ب = س سم ، ء هـ = (س + ١) سم ،

مساحة Δ أ ب حـ = (س + ٢) سم^{٢} ، ومساحة Δ ء هـ و = (س + ٧) سم^{٢} فإن قيمة س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

(٨) في الشكل المقابل :



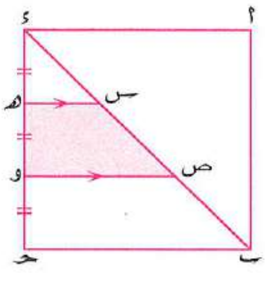
إذا كانت : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{٢}{٣}$

فإن : $\frac{\text{مساحة (▱ ء ب و هـ)}}{\text{مساحة (Δ أ ب حـ)}}$ = ...

(أ) $\frac{٢١}{٢٥}$ (ب) $\frac{١٦}{٢٥}$

(جـ) $\frac{١٢}{٢٥}$ (د) $\frac{١٣}{٢٥}$

(٩) في الشكل المقابل :



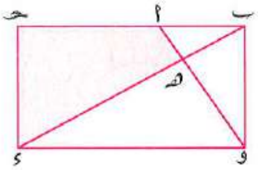
أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، ء هـ = هـ و = و حـ

فإن : مساحة (الشكل س ص و هـ) = ... سم^{٢}

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٢

(١٠) فى الشكل المقابل :



ب حـ ء و مستطيل ، مساحة (△ أ ب هـ) = ٢ سم^{٢}

، مساحة (△ ب هـ و) = ٣ سم^{٢}

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ٥ (ب) ٥ $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٦ (د) ٧ $\frac{١}{٢}$

(١١) إذا كان معامل تشابه المضلع م$_{١}$ للمضلع م$_{٢}$ هو $\frac{٢}{٣}$ ومعامل تشابه المضلع م$_{٣}$ للمضلع م$_{٢}$ هو $\frac{١}{٣}$

فأى من العلاقات الآتية تكون صحيحة ؟

(أ) مساحة (م$_{١}$) + مساحة (م$_{٢}$) = مساحة (م$_{٣}$)

(ب) مساحة (م$_{١}$) + مساحة (م$_{٣}$) = مساحة (م$_{٢}$)

(جـ) $\sqrt{\text{مساحة (م}_{١}\text{)}}$ + $\sqrt{\text{مساحة (م}_{٢}\text{)}}$ = $\sqrt{\text{مساحة (م}_{٣}\text{)}}$

(د) $\sqrt{\text{مساحة (م}_{١}\text{)}}$ + $\sqrt{\text{مساحة (م}_{٣}\text{)}}$ = $\sqrt{\text{مساحة (م}_{٢}\text{)}}$

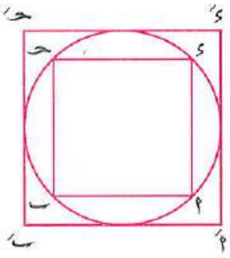
---

٢ فى الشكل المقابل :

مربعان أحدهما مرسوم داخل دائرة والآخر مرسوم خارجها.

أوجد النسبة بين مساحتيهما.

« $\frac{١}{٢}$ »

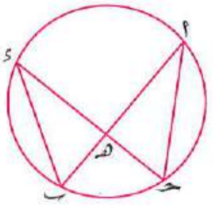


الدرس

4

تطبيقات التشابه فى الدائرة

١ فى الشكل المقابل



$\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـء}}$ وتران متقاطعان فى نقطة هـ

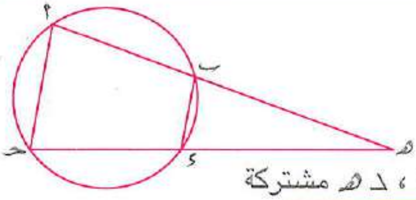
نلاحظ أن △ هـ أ حـ ~ △ هـ ء ب

وذلك لأن ق (∠ أ هـ حـ) = ق (∠ ء هـ ب) (بالتقابل بالرأس)

، ق (∠ أ) = ق (∠ ء) (محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{حـب}}$)

ومن التشابه نستنتج أن $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{هـ حـ}}{\text{هـ ب}}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

٢ فى الشكل المقابل



أ ب ء حـ شكل رباعى دائرى ، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـء}}$ = {هـ}

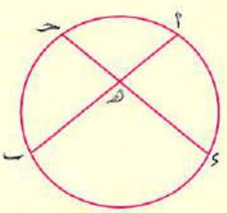
نلاحظ أن △ هـ أ حـ ~ △ هـ ء ب

وذلك لأن ق (∠ هـ أ حـ) = ق (∠ هـ ء ب) (خواص الرباعى الدائرى) ، ∠ هـ مشتركة

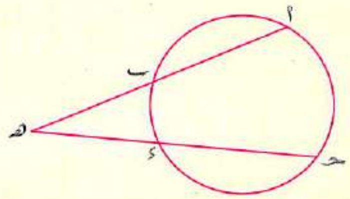
ومن التشابه نستنتج أن $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{هـ حـ}}{\text{هـ ب}}$ ∴ هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

تمرين مشهور

- إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حـء}}$ لدائرة فى نقطة هـ فإن : هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء



شكل (١)



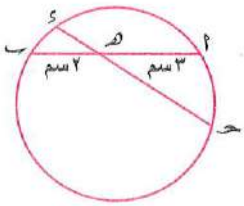
شكل (٢)

مثال ١

أب ، حـ ء وتران في دائرة متقاطعان في هـ فإذا كان : أ هـ = ٣ سم ، هـ ب = ٢ سم ، حـ ء = ٥,٥ سم

فاحسب : طول كل من حـ هـ ، هـ ء

الحل



بفرض أن : حـ هـ = س سم

∴ هـ ء = (٥,٥ − س) سم

∴ هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ء

∴ ٦ = ٥,٥ س − س^{٢}

∴ (٢ س − ٣) (س − ٤) = ٠

∴ حـ هـ = ٤ سم ، هـ ء = ١,٥ سم

، ∵ أب ، حـ ء وتران متقاطعان في هـ

∴ ٣ × ٢ = س (٥,٥ − س)

∴ ٢ س^{٢} − ١١ س + ١٢ = ٠

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ أو س = ٤

(وهو المطلوب)

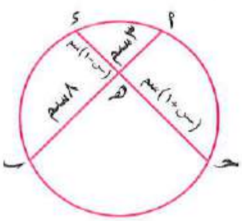
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

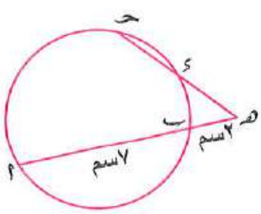
أب ∩ حـ ء = {هـ} ، أ هـ = ٣ سم ، هـ ب = ٨ سم

، حـ هـ = (س + ١) سم ، هـ ء = (س − ١) سم

أوجد : قيمة س



مثال ٢



في الشكل المقابل :

أب ∩ حـ ء = {هـ} ، هـ ب = ٢ سم ، أب = ٧ سم

فإذا كان : $\frac{هـ ء}{هـ حـ} = \frac{١}{٢}$

فأوجد : طول هـ حـ

الحل

∵ $\frac{هـ ء}{هـ حـ} = \frac{١}{٢}$

∴ هـ ء = ل ، هـ حـ = ٢ ل حيث ل ≠ ٠

، ∵ أب ∩ حـ ء = {هـ}   ∴ هـ ء × هـ حـ = هـ ب × هـ أ

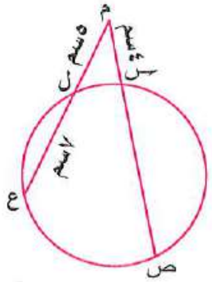
∴ ل × ٢ ل = ٢ × ٩ = ١٨

∴ ٢ ل^{٢} = ١٨   ∴ ل^{٢} = ٩

∴ ل = ٣ أو −٣ (مرفوض)   ∴ هـ حـ = ٢ × ٣ = ٦ سم

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك



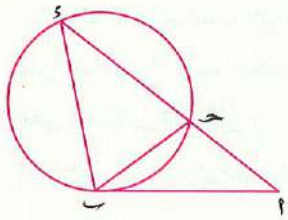
في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ص س}} \cap \overleftrightarrow{\text{ع ل}} = \{\text{م}\}$ ، م س = ٤ سم ، م ل = ٥ سم

، ل ع = ٧ سم

أوجد : طول $\overline{\text{س ص}}$

ملاحظة



في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة عند ب

نلاحظ أن Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء ب

وذلك لأن ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ء)

(مماسية ومحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

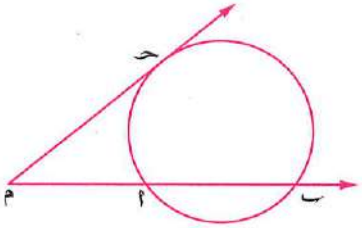
، ∠ أ مشتركة.

▸ **ومن التشابه نستنتج أن** $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}}$ ∴ (أ ب)^{٢} = أ حـ × أ ء

تذكر أن

أ ب وسط متناسب بين أ حـ ، أ ء

نتيجة ١



إذا كانت م نقطة خارج دائرة

، $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$ يمس الدائرة في حـ

، $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ يقطعها في أ ، ب

فإن : (م حـ)^{٢} = م أ × م ب

مثال ٣

م نقطة خارج دائرة ، $\overline{\text{م حـ}}$ قطعة مماسة لها عند حـ ، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ قاطع لها في أ ، ب حيث م أ > م ب

فإذا كان : م حـ = ١٠ سم ، أ ب = ١٥ سم **فاحسب :** طول $\overline{\text{م ب}}$

الحل

نفرض أن : م ب = س سم

∴ م أ = (س + ١٥) سم

، ∵ $\overline{\text{م حـ}}$ مماسة للدائرة ، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ قاطع لها

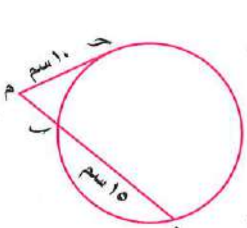
∴ (م حـ)^{٢} = م ب × م أ

∴ (١٠)^{٢} = س (س + ١٥)

∴ س^{٢} + ١٥ س − ١٠٠ = ٠

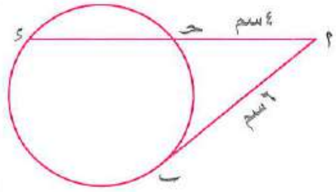
∴ (س − ٥) (س + ٢٠) = ٠

∴ س = ٥ أي م ب = ٥ سم



(وهو المطلوب)

حاول بنفسك



فى الشكل المقابل :

أ ؞ قاطع للدائرة عند حـ ، ؞ ، أب مماسة للدائرة عند ب

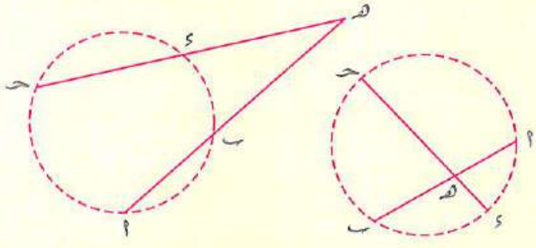
أوجد : طول حـ؞

عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين أب ، حـ؞ فى نقطة هـ (مختلفة عن أ ، ب ، حـ ، ؞)

وكان هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ؞

فإن النقط : أ ، ب ، حـ ، ؞ تقع على دائرة واحدة.



ففى الشكلين المقابلين :

إذا كان : هـ أ × هـ ب = هـ حـ × هـ ؞

فإن النقط :

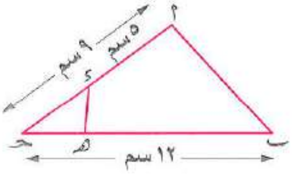
أ ، ب ، حـ ، ؞ تقع على دائرة واحدة.

مثال ٤

أ ب حـ مثلث فيه : أ حـ = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، فرضت ؞ ∈ أ حـ بحيث أ ؞ = ٥ سم ، وفرضت هـ ∈ ب حـ

بحيث $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}}$ = ٣ **أثبت أن :** الشكل أ ب هـ ؞ رباعى دائرى.

الحل



∵ حـ ؞ = أ حـ − أ ؞ = ٩ − ٥ = ٤ سم ∴ حـ ؞ × حـ أ = ٤ × ٩ = ٣٦

، ∵ ب هـ = ٣ حـ هـ ∴ ب حـ = ٤ حـ هـ

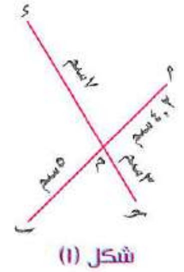
∴ حـ هـ = $\frac{1}{4}$ ب حـ = $\frac{1}{4}$ × ١٢ = ٣ سم ∴ حـ هـ × حـ ب = ٣ × ١٢ = ٣٦

∴ حـ ؞ × حـ أ = حـ هـ × حـ ب

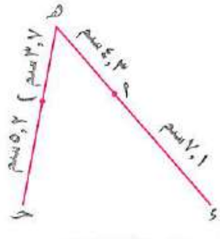
∴ الشكل أ ب هـ ؞ رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

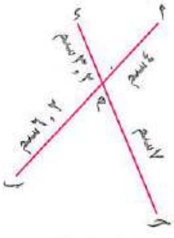
فى أى من الأشكال التالية تقع النقط أ ، ب ، حـ ، ؞ على دائرة واحدة ؟



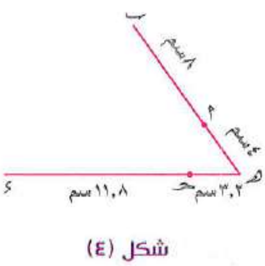
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



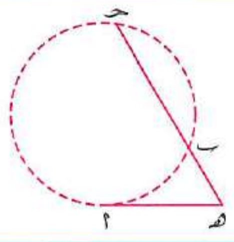
شكل (٤)

نتيجة ٢

إذا كان : $(\text{هـ أ})^{٢}$ = هـ ب × هـ حـ

فإن : هـ أ تمس الدائرة المارة

بالنقط أ ، ب ، حـ

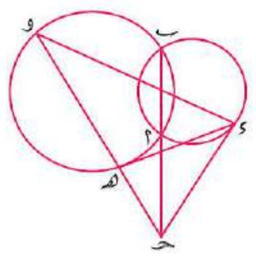


مثال ٥

دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، نقطة حـ ∈ ب أ ، حـ ∉ أ ب ، حـ ء مماسة لإحدى الدائرتين فى ء ، حـ و قاطعة للأخرى فى هـ ، و حيث حـ و > حـ هـ

أثبت أن : حـ ء مماسة للدائرة المارة بالنقط ء ، هـ ، و

الحل



∵ حـ ب ، حـ و قاطعتان لإحدى الدائرتين.

∴ حـ أ × حـ ب = حـ هـ × حـ و (١)

، ∵ حـ ء مماسة للدائرة الأخرى ، حـ ب قاطعة لها

∴ $(\text{حـ ء})^{٢}$ = حـ أ × حـ ب (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $(\text{حـ ء})^{٢}$ = حـ هـ × حـ و

∴ حـ ء مماسة للدائرة المارة بالنقط ء ، هـ ، و **(وهو المطلوب)**

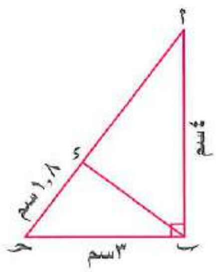
حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب

، أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، حـ ء = ١,٨ سم

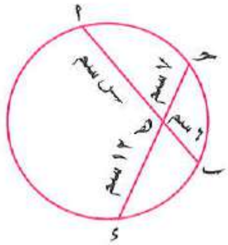
أثبت أن : ب حـ مماسة للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ء



أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

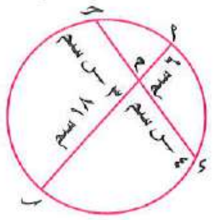


س = ... سم

(أ) ٣,٥ (ب) ١٤

(جـ) ٦ (د) ١٢

(٢) فى الشكل المقابل :



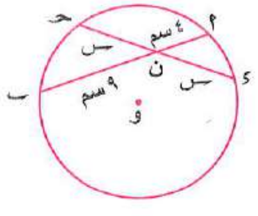
$\overline{أب} \cap \overline{حـ ء} = \{م\}$ ، أ م = ٦ سم ، م ب = ١٨ سم

، حـ م = ٣ س سم ، ء م = ٤ س سم

فإن : حـ ء = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١٨ (د) ٢١

(٣) من الشكل المقابل :

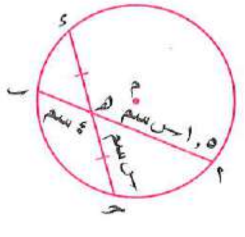


س = ...

(أ) ٦ (ب) −٦

(جـ) ± ٦ (د) ٣٦

(٤) فى الشكل المقابل :

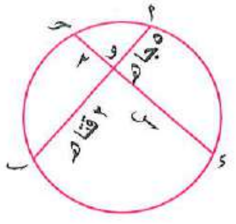


س = ... سم

(أ) ٦,٥ (ب) ١٣

(جـ) ٦ (د) ٣٦

(٥) فى الشكل المقابل :



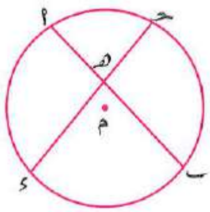
$\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران فى الدائرة ، $\overline{أب} \cap \overline{حـ ء} = \{و\}$

، أ و = (٥ جا هـ) سم ، و ب = (٢ قتا هـ) سم ، و حـ = ٢ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $١٠\sqrt{٣}$

(٦) فى الشكل المقابل :



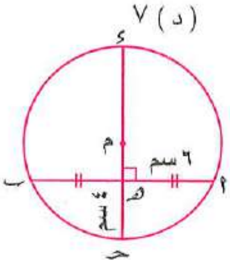
أ ب ∩ حـ ء = {هـ} ، أ هـ = ٤ سم ، هـ ب = ٦ سم

، ء هـ = (س + ١) سم ، حـ هـ = (س − ١) سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٧

(٧) فى الشكل المقابل :

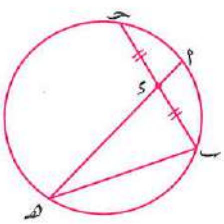


طول نصف قطر الدائرة = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٤,٥

(جـ) ٦ (د) ٦,٥

(٨) فى الشكل المقابل :

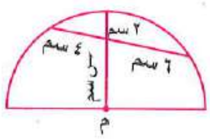


(ب ء)^2 = ...

(أ) أ ء × ء ب (ب) أ ء × ء هـ

(جـ) أ ء × ب هـ (د) أ حـ × ب ء

(٩) فى الشكل المقابل :

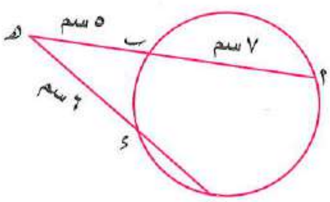


نصف دائرة مركزها م

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٢

(١٠) فى الشكل المقابل :



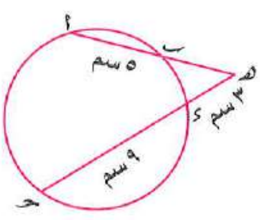
أ ب = ٧ سم ، ب هـ = ٥ سم ، ء هـ = ٦ سم

فإن : طول حـ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٣

(١١) فى الشكل المقابل :

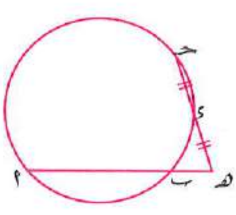


ب هـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٣

(١٢) فى الشكل المقابل :



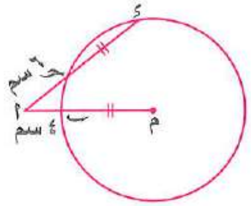
إذا كان : هـ ء = ء حـ ، هـ ب = ٢ سم ، أ ب = ٧ سم

فإن : طول هـ حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٣

(١٣) في الشكل المقابل :

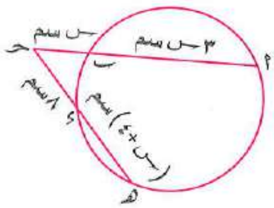


إذا كان : ءحـ = م ب

فإن : محيط الدائرة م = ... سم

(أ) ١٥ π (ب) ١٨ π (جـ) ٢٠ π (د) ٢٤ π

(١٤) في الشكل المقابل :

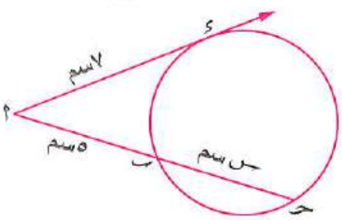


س = ...

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٣ (د) ٩

(١٥) في الشكل المقابل :

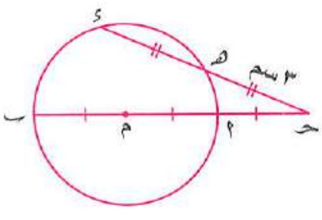


س = ...

(أ) ٤,٨ (ب) ٥,٦

(جـ) ٤,٢ (د) ٥,٢

(١٦) في الشكل المقابل :

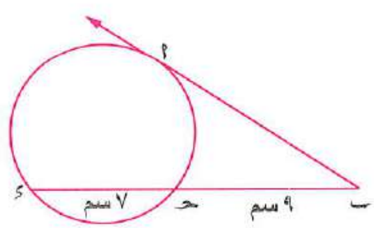


مساحة الدائرة م = ... $سم^2$

(أ) ٦ π (ب) ١٨ π

(جـ) ٢ $\sqrt{6}$ π (د) $\sqrt{6}$ π

(١٧) في الشكل المقابل :



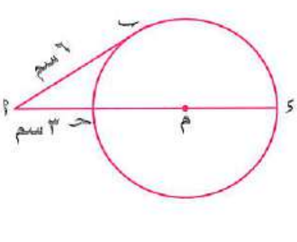
$\overleftarrow{ب أ}$ مماس ، ب حـ = ٩ سم ، حـ ء = ٧ سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٦٣ (ب) ١٤٤

(جـ) ١٢ (د) $\frac{٩}{١٦}$

(١٨) في الشكل المقابل :



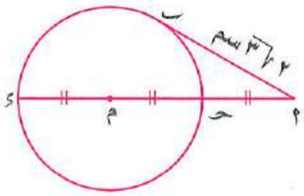
إذا كان : $\overline{أ ب}$ قطعة مماسة للدائرة م

فإن محيط الدائرة م = ...

(أ) ٦ π (ب) ٩ π

(جـ) ١٢ π (د) ١٥ π

(١٩) في الشكل المقابل :

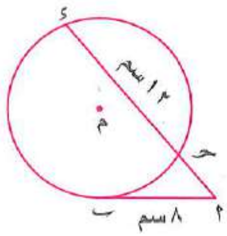


طول نصف قطر الدائرة م = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(٢٠) في الشكل المقابل :

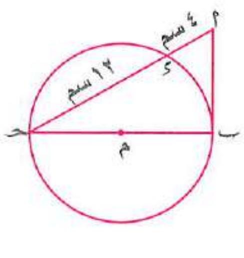


أ حـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٨

(جـ) ٤ (د) ٦

(٢١) في الشكل المقابل :



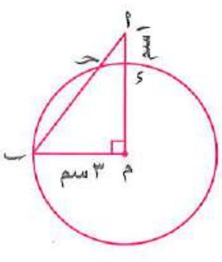
أب مماسة للدائرة م ، أء = ٤ سم ، ءحـ = ١٢ سم

فإن : طول نصف قطر الدائرة م = ... سم

(أ) ٤√٣ (ب) ١٦√٣

(جـ) ٨√٣ (د) ٢٤√٣

(٢٢) في الشكل المقابل :



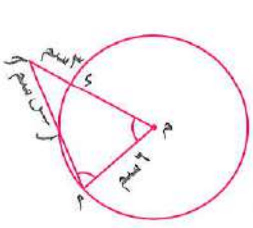
أ م ب مثلث قائم في م

، نصف قطر الدائرة = ٣ سم ، أء = ١ سم

فإن : ب حـ = ...

(أ) ٣,٦ (ب) ١,٤ (جـ) ٥ (د) ٣

(٢٣) في الشكل المقابل :

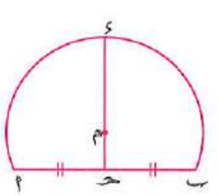


س = ...

(أ) ٦ (ب) ٤

(جـ) ٣ (د) ٥

(٢٤) في الشكل المقابل :



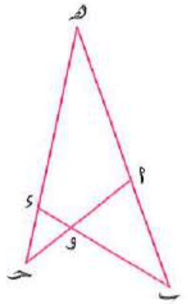
أ ، ب ، ء ثلاث نقط على دائرة مركزها م

إذا كانت حـ منتصف أب ، ء ، م ، حـ على استقامة واحدة

، أب = ٢٤ سم ، ءحـ = ١٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٢٥) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى إذا كان ....

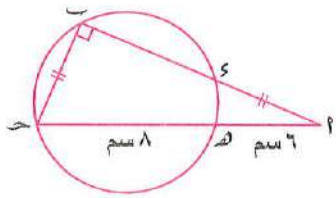
(أ) $\frac{\text{هـ أ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{هـ حـ}}$

(ب) $\frac{\text{هـ أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ ء}}{\text{ء حـ}}$

(جـ) أ و × و ء = ب و × و حـ

(د) هـ أ × هـ ب = هـ ء × هـ حـ

(٢٦) في الشكل المقابل :

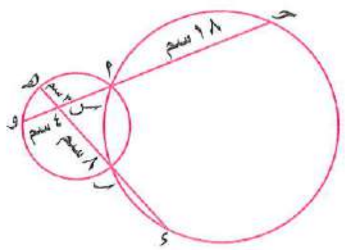


م (△ أ ب حـ) = ... سم^2

(أ) ٤٨ (ب) ٤٢

(جـ) ٤٠ (د) ٢٤

(٢٧) في الشكل المقابل :

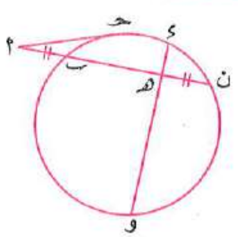


ب ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ١٢

(٢٨) في الشكل المقابل :



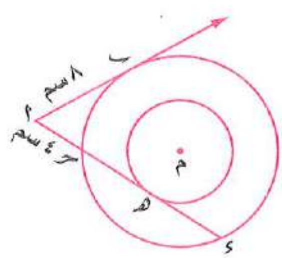
إذا كان : ء هـ = ٢ سم ، و هـ = ٩ سم ، ب هـ = ٦ سم

، أ ب = ن هـ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ مماسة للدائرة

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٩) في الشكل المقابل :



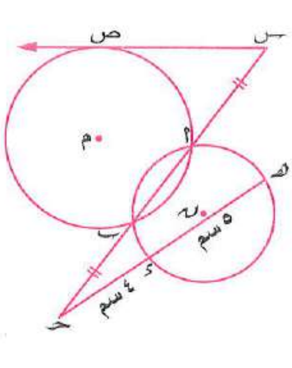
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة الكبرى ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة الصغرى

فإن : ء هـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٣٠) في الشكل المقابل :



دائرتان م ، ن متقاطعتان في أ ، ب ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس للدائرة م

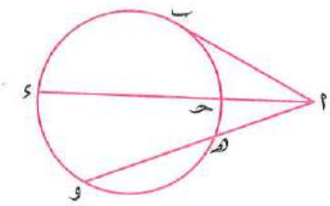
إذا كان : أ س = ب حـ

فإن : س ص = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ٩

(٣١) في الشكل المقابل :



كل التعبيرات الآتية صحيحة ما عدا ....

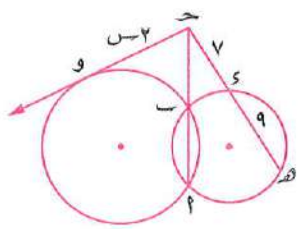
(أ) (أ ب)^{٢} = أ حـ × أ د

(ب) (أ ب)^{٢} = أ هـ × أ و

(جـ) أ هـ × أ و = أ حـ × أ د

(د) أ حـ × حـ د = أ هـ × هـ و

(٣٢) من الشكل المقابل :

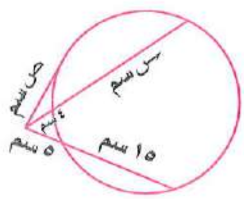


س = ...

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) ٢ $\sqrt{٧}$

(جـ) ٣ $\sqrt{٧}$ (د) ٤ $\sqrt{٧}$

(٣٣) في الشكل المقابل :

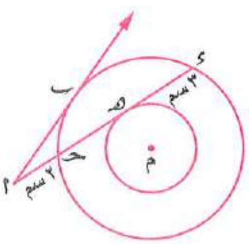


س + ص = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٨

(جـ) ٢٢ (د) ٣١

(٣٤) في الشكل المقابل :

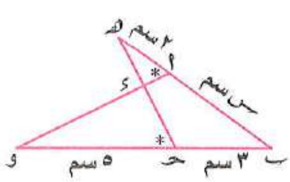


أ ب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٣٥) في الشكل المقابل :

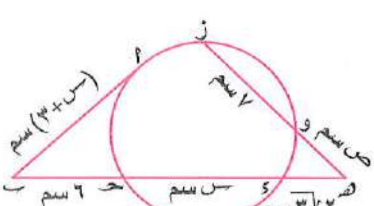


س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣,٢

(جـ) ٥ (د) ٣

(٣٦) في الشكل المقابل :



$\frac{س}{ص}$ = ...

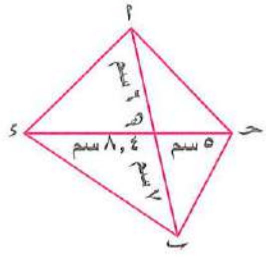
(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$

(جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ٤

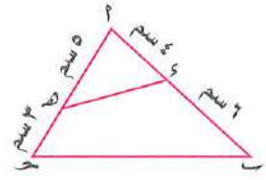
ثانيًا الأسئلة المقالية

١ في أي من الأشكال التالية تقع النقط أ ، ب ، حـ ، ء على دائرة واحدة ؟ فسِّر إجابتك.

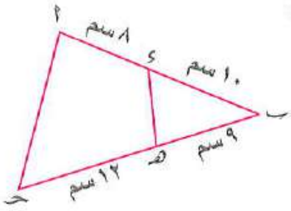
(١)



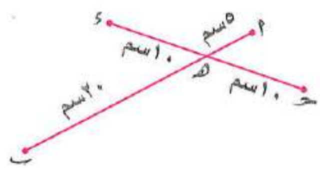
(٢)



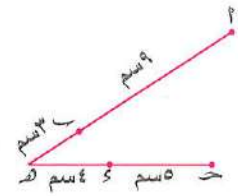
(٣)



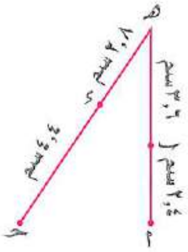
(٤)



(٥)

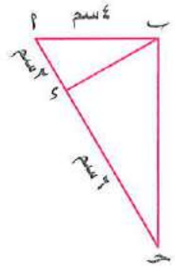


(٦)

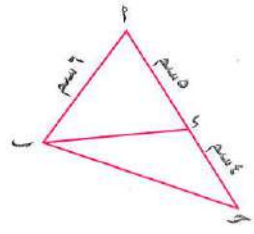


٢ في أي من الأشكال التالية $\overline{\text{أب}}$ قطعة مماسة للدائرة المارة بالنقط ب ، حـ ، ء :

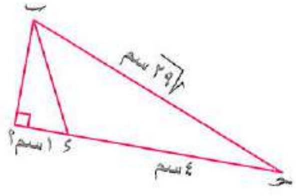
(١)



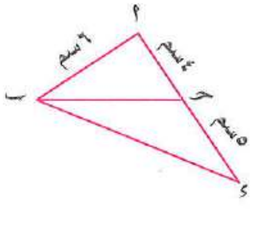
(٢)



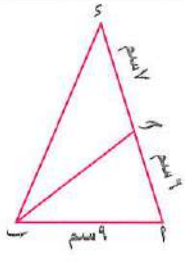
(٣)



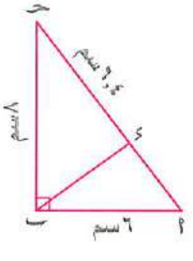
(٤)



(٥)



(٦)



٣ دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها ٤ سم ، فرضت نقطة م حيث م و = ٦ سم

ورسم من م قاطع للدائرة قطعها في أ ، ب حيث أ $\in$ $\overline{\text{م ب}}$ فإذا كان : م أ = ٣ سم

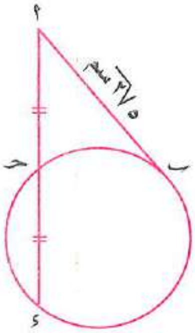
فأوجد : طول $\overline{\text{أب}}$

« $3\frac{2}{3}$ سم »

٤ أب ، حـ ء وتران فى دائرة متقاطعان فى هـ فإذا كانت أطوال : أهـ ، ب هـ ، حـ ء
هى على الترتيب ٥ سم ، ٦ سم ، ١١,٥ سم فاحسب : طول كل من هـ حـ ، هـ ء «٧,٥ سم ، ٤ سم»

---

٥ في الشكل المقابل :



إذا كانت أب قطعة مماسة للدائرة

، حـ منتصف أء

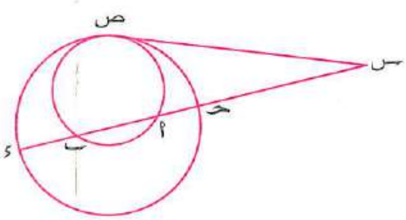
، طول أب = ٥ √٢ سم

أوجد : طول أء

«١٠ سم»

---

٦ في الشكل المقابل :



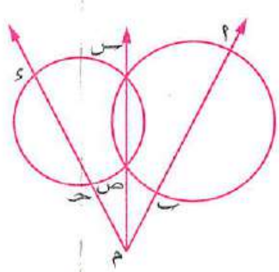
دائرتان متماستان من الداخل فى النقطة ص

، ص س مماس مشترك للدائرتين.

أثبت أن : $\frac{\text{س حـ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{س أ}}{\text{س ء}}$

---

٧ في الشكل المقابل :



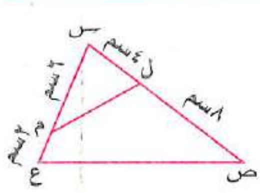
أثبت أن :

النقط أ ، ب ، حـ ، ء

تمر بها دائرة واحدة.

---

٨ في الشكل المقابل :



ل ∈ س ص حيث س ل = ٤ سم ، ص ل = ٨ سم

، م ∈ س ع حيث س م = ٦ سم ، ع م = ٢ سم

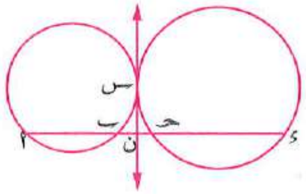
أثبت أن : (١) Δ س ل م ~ Δ س ع ص (٢) الشكل ل ص ع م رباعى دائرى.

---

٩ أب ∩ حـ ء = {هـ} ، أهـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ ، ء هـ = $\frac{٣}{٥}$ هـ حـ ، إذا كان ب هـ = ٦ سم ، حـ هـ = ٥ سم

أثبت أن : النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

١٠ في الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الخارج في س

، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ يقطع إحدى الدائرتين في أ ، ب ويقطع الأخرى

في حـ ، ء ويقطع المماس المشترك للدائرتين عند س في نقطة ن

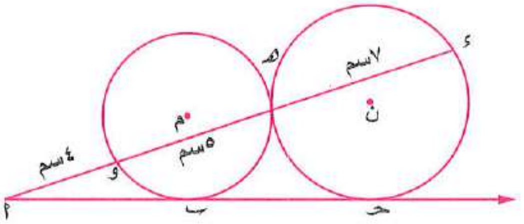
أثبت أن : $\frac{\text{ن ب}}{\text{ن حـ}} = \frac{\text{ن ء}}{\text{ن أ}}$

---

١١ دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، حـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، حـ ∉ $\overline{\text{أب}}$ ، رسم من حـ القطعتان $\overline{\text{حـ س}}$ ، $\overline{\text{حـ ص}}$ مماستين للدائرتين عند س ، ص **أثبت أن :** حـ س = حـ ص

---

١٢ في الشكل المقابل :



الدائرتان م ، ن متماستان عند هـ

، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ يمس الدائرة م عند ب

، ويمس الدائرة ن عند حـ

، $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ يقطع الدائرتين عند و ، ء على الترتيب حيث أ و = ٤ سم ، و هـ = ٥ سم ، هـ ء = ٧ سم

أثبت أن : ب منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

---

١٣ دائرة مركزها (و) وطول نصف قطرها ٨ سم ، م نقطة بحيث م و = ١٢ سم ، رسم من م قاطع للدائرة يقطعها في أ ، ب حيث أ ∈ $\overline{\text{مب}}$ فإذا كان أ ب = ١١ سم

فأوجد : (١) طول $\overline{\text{مأ}}$

(٢) طول القطعة المماسة للدائرة من م «٥ سم ، ٤ $\sqrt{٥}$ سم»

---

١٤ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث ء ب = ٥ سم ، ء حـ = ٤ سم

إذا كان : أ حـ = ٦ سم

أثبت أن : (١) $\overline{\text{أحـ}}$ مماسة للدائرة التى تمر بالنقط أ ، ب ، ء

(٢) Δ أ حـ ء ~ Δ ب حـ أ

(٣) م (Δ أ ب ء) : م (Δ أ ب حـ) = ٥ : ٩

---

١٥ دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفى قطريهما ١٢ سم ، ٧ سم ، رسم الوتر $\overline{\text{أء}}$ فى الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى فى ب ، حـ على الترتيب.

أثبت أن : أ ب × ب ء = ٩٥

١٦ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

، رسم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في هـ ، $\overline{\text{أ ء}}$ في و

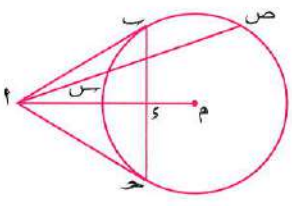
(١) أثبت أن : $(\text{أ ب})^2$ = أ و × أ ء (٢) أوجد : طول $\overline{\text{أ و}}$ «٤,٥ سم»

١٧ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر طوله ٨ سم في دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ يقطعه في حـ ويقطع الدائرة في ء

فإذا كان : حـ ء = ٢ سم فاحسب طول نصف قطر الدائرة. «٥ سم»

١٨ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة ، حـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{حـ س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ فقطع الدائرة في س ، رسم $\overline{\text{ء هـ}}$ وترًا في الدائرة مارًا بالنقطة حـ أثبت أن : $(\text{س حـ})^2$ = ء حـ × حـ هـ

١٩ في الشكل المقابل :



أ نقطة خارج دائرة م ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ مماستان للدائرة

، $\overline{\text{أ ص}}$ قاطعة لها في س ، ص ، $\overline{\text{ب حـ}} \cap \overline{\text{م أ}}$ = {ء}

أثبت أن : أ س × أ ص = أ ء × أ م

٢٠ أ ب حـ مثلث ، $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ في ء ، هـ ∈ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ بحيث أ ء = ء هـ

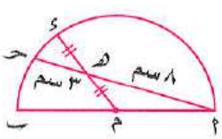
فإذا كان : $(\text{أ ء})^2$ = ء ب × ء حـ

فأثبت أن : (١) Δ هـ حـ ء ~ Δ هـ أ حـ (٢) $(\text{هـ حـ})^2$ = ٢ $(\text{هـ ء})^2$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

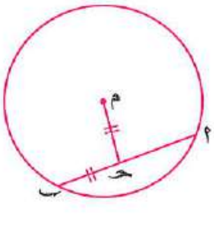


نصف دائرة م ، م هـ = هـ ء ، هـ حـ = ٣ سم ، أ هـ = ٨ سم

فإن : م هـ = ... سم

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) ٢ $\sqrt{2}$ (د) $\frac{8}{3}$

(٢) في الشكل المقابل :



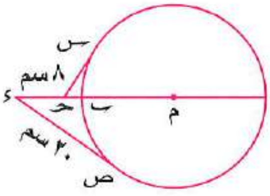
دائرة م طول قطرها ١٢ سم ، م حـ = حـ ب

فإذا كان : أ حـ = (ب حـ + ١) سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٣) في الشكل المقابل :



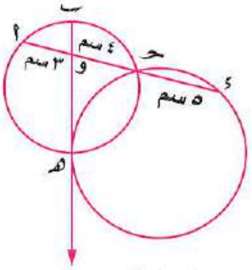
إذا كان أب قطراً في دائرة م ، حـس ، ءص قطعتين مماستين للدائرة م

، أب = ٣٠ سم ، حـس = ٨ سم ، ءص = ٢٠ سم

فإن : ءحـ = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٤) في الشكل المقابل :



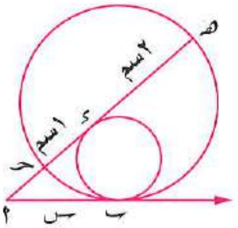
دائرتان متقاطعتان في حـ ، هـ ، ب هـ مماس للدائرة الكبرى في هـ

إذا كان : أو = ٣ سم ، وحـ = ٤ سم ، حـء = ٥ سم

فإن : ب هـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٦

(٥) في الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الداخل في ب

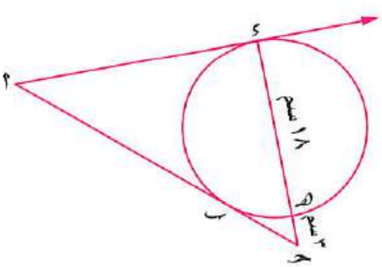
، أب ، أء مماسان للدائرة الصغرى عند ب ، ء

إذا كان : حـء = ١ سم ، ءهـ = ٢ سم ، أب = س سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٢,٥ (د) ٣,٥

(٦) في الشكل المقابل :



أء ، أب مماسان لدائرة عند ء ، ب

على الترتيب ، حـهـ يقطع الدائرة في هـ ، ء

إذا كان : حـهـ = ٣ سم ، هـء = ١٨ سم

فإن : (أحـ − أء) = ... سم

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) ٢ $\sqrt{٧}$ (جـ) ٣ $\sqrt{٧}$ (د) ٦ $\sqrt{٧}$

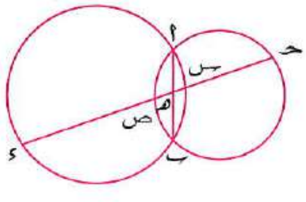
(٧) في الشكل المقابل :

أب قطر في نصف الدائرة م

فإن : نق = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٨) في الشكل المقابل :



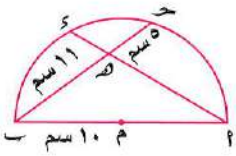
إذا كان : ء ص = ٦ سم

وكان : $\frac{\text{س هـ}}{\text{هـ ص}} = \frac{٢}{٣}$

فإن : حـ س = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٩) في الشكل المقابل :

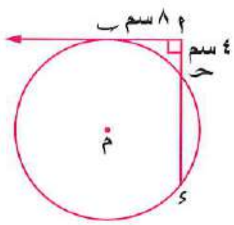


نصف دائرة م طول نصف قطر دائرته = ١٠ سم

فإن : هـ ء = ... سم

(أ) $\frac{٥٠}{١٣}$ (ب) $\frac{٥٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥٧}{١٣}$ (د) $\frac{٥٩}{١٣}$

(١٠) في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب

، أ ب = ٨ سم ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ قاطع للدائرة م عند حـ ، ء

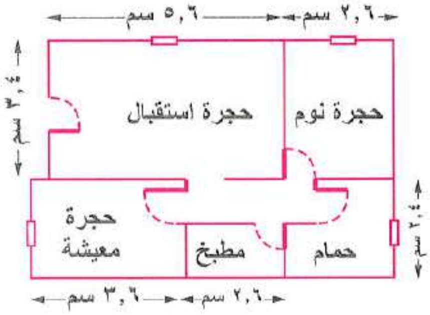
فإن : طول نصف قطر الدائرة م يساوى .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٨

تطبيقات حياتية على الوحدة الثالثة

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ يوضح الشكل المقابل مخططًا لإحدى الوحدات السكنية بمقياس رسم ١ : ١٥٠ أوجد :



(١) أبعاد حجرة الاستقبال.

(٢) أبعاد حجرة النوم.

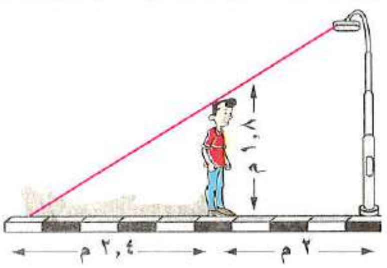
(٣) مساحة حجرة المعيشة.

(٤) مساحة الوحدة السكنية.

---

٢ رجل طوله ١,٨ متر يقف أمام عمود إنارة وعلى بُعد ٢ متر من قاعدته فإذا وُجد أن طول ظل الرجل الناتج عن إنارة العمود هو ٢,٤ متر

فأوجد ارتفاع العمود.

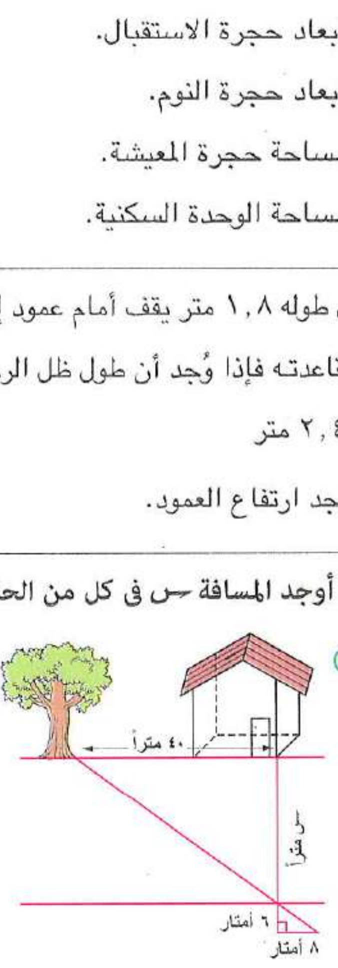


«٣,٣ متر»

---

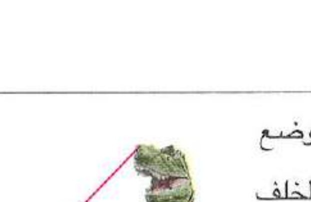
٣ أوجد المسافة س فى كل من الحالتين الآتيتين :

(١)



«٣٠ مترًا»

(٢)

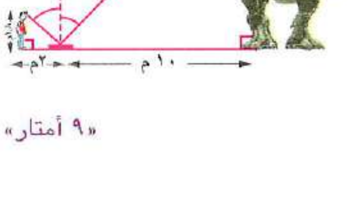


«٣٢ مترًا»

---

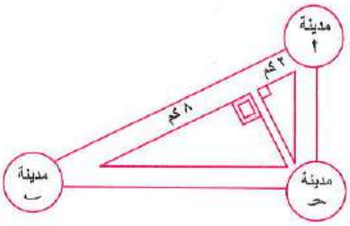
٤ أراد رجل معرفة طول ديناصور فى أحد المتاحف ، فوضع مرآة فى وضع أفقى على الأرض على بُعد ١٠ أمتار من قدم الديناصور ورجع إلى الخلف حتى استطاع مشاهدة رأس الديناصور فى المرآة فكانت المسافة التى رجعها للخلف ٢ متر فإذا كان طول الرجل ١,٨ متر وإذا علمت أن قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.

فما ارتفاع الديناصور ؟



«٩ أمتار»

٥ 📖 يبيِّن المخطط المقابل موقع محطة خدمة وتموين سيارات يراد إقامتها على الطريق السريع عند تقاطع طريق جانبى يؤدى إلى المدينة حـ عموديًا على الطريق السريع بين المدينتين أ ، ب علمًا بأن الطريق الواصل بين المدينتين أ ، حـ عمودى على الطريق الواصل بين المدينتين ب ، حـ

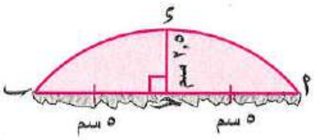


(١) كم ينبغى أن تبعد المحطة عن المدينة حـ ؟

(٢) ما البعد بين المدينتين ب ، حـ ؟ «٤ كم ، ٤ $\sqrt{5}$ كم»

---

٦ وجد أحد مهندسى الآثار قطعة خشبية أثرية عبارة عن جزء من قرص خشبى دائرى. أراد هذا المهندس معرفة طول نصف قطر هذا القرص فعين النقطتين أ ، ب على القرص



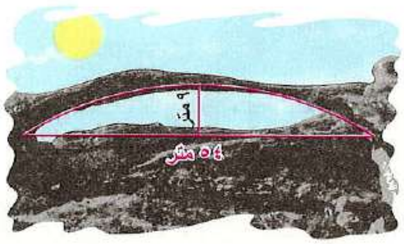
فوجد أن طول $\overline{أب}$ = ١٠ سم

ثم رسم من النقطة حـ منتصف $\overline{أب}$ القطعة المستقيمة $\overline{ءحـ}$ بحيث $\overline{ءحـ} \perp \overline{أب}$ فوجد أن :

ءحـ = ٢,٥ سم واستطاع بذلك هندسيًا إيجاد طول نصف القطر. ترى كيف استطاع ذلك ؟! «٦,٢٥ سم»

---

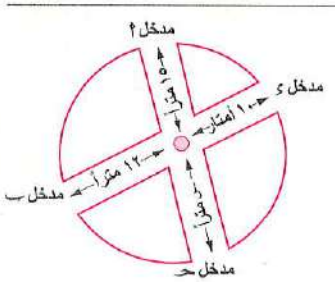
٧ 📖 فى إحدى المناطق الساحلية توجد طبقة أرضية على شكل قوس طبيعى. وجد الچيولوچيون أنه قوس دائرة كما فى الشكل المقابل.



أوجد طول نصف قطر دائرة القوس. «٤٥ م»

---

٨ يبيِّن الشكل المقابل مخططًا لحديقة على شكل دائرة بها طريقان يتقاطعان عند نافورة المياه. أوجد بُعد نافورة المياه عن المدخل حـ

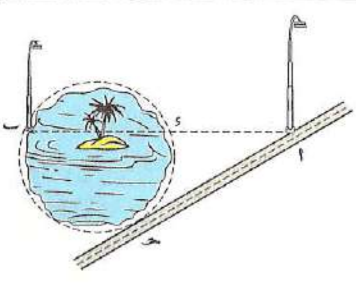


«٨ أمتار»

---

٩ فى الشكل المقابل :

طريق يمس بحيرة دائرية الشكل ، ويريد أحد مهندسى شركة كهرباء وضع عمودين إنارة أحدهما على الطريق والآخر على الجهة الأخرى من البحيرة ويصل بينهما بسلك كهرباء.



فكيف يمكنك إيجاد طول هذا السلك ؟!

الوحدة الرابعة

نظريات التناسب في المثلث

دروس الوحدة

فى نهاية الوحـدة : تطبيقات حياتيـة على الوحدة الرابعة.

نـواتـج الـتـعـلُّـم

فى نهاية هذه الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن :

- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على «إذا رُسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة» وعكسها ، ونتائج عليها.
- يتعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة وحالات خاصة منها.
- يحل تطبيقات وتمارين على نظرية تاليس العامة ونظرية تاليس الخاصة.
- يتعرف ويبرهن النظرية التى تنص على «إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين» وعكسها.
- يوجد طول كل من المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث.
- يتعرف حقيقة أن منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
- يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات فى الدائرة.

تمهيد ..

قبل البدء فى دراسة الوحدة الرابعة (نظريات التناسب فى المثلث) من المفيد والضرورى أن نستعرض مفهوم التناسب وبعض خواصه التى سوف نستخدمها أثناء دراستنا لهذه الوحدة :

يقال إن أ ، ب ، حـ ، د ، هـ ، و ، ... كميات متناسبة إذا كان :

$$\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \cdots$$

يقال إن أ ، ب ، حـ ، د ، ... فى تناسب متسلسل إذا كان :

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{د} = \cdots$$

وفى هذه الحالة يسمى ب الوسط المتناسب للعددين أ ، حـ حيث $ب^2 = أ\,حـ$

كما يسمى حـ الوسط المتناسب للعددين ب ، د حيث $حـ^2 = ب\,د$ وهكذا ...

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ حيث كل من أ ، حـ يسمى مقدم النسبة وكل من ب ، د يسمى تالى النسبة فإن :

١ $أ \times د = ب \times حـ$

٢ $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{حـ}$ (مقلوبات النسبة تكون متساوية)

٣ $\frac{أ}{حـ} = \frac{ب}{د}$ $\left(\frac{\text{مقدم النسبة الأولى}}{\text{مقدم النسبة الثانية}} = \frac{\text{تالى النسبة الأولى}}{\text{تالى النسبة الثانية}}\right)$

٤ $\frac{أ + ب}{ب} = \frac{حـ + د}{د}$ $\left(\frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{تالى}}\text{ للنسبة الأولى } = \frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{تالى}}\text{ للنسبة الثانية}\right)$

٥ $\frac{أ + ب}{أ} = \frac{حـ + د}{حـ}$ $\left(\frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{مقدم}}\text{ للنسبة الأولى } = \frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{مقدم}}\text{ للنسبة الثانية}\right)$

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د} = \frac{هـ}{و} = \cdots$ فإن :

١ $\frac{أ + حـ + هـ + \cdots}{ب + د + و + \cdots} =$ إحدى النسب $\left(\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} = \text{إحدى النسب}\right)$

٢ $\frac{أ\,ك + حـ\,م + هـ\,ن + \cdots}{ب\,ك + د\,م + و\,ن + \cdots} =$ إحدى النسب

حيث ك ، م ، ن ، ... أعداد حقيقية لا تساوى الصفر

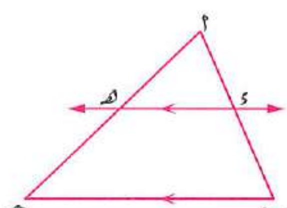
الدرس

1

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

نظرية ١

إذا رسم مستقيم يوازى أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.



المعطيات $\triangle\,\text{أبجـ}$ مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

المطلوب إثبات أن : $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$

البرهان $\because \overleftrightarrow{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

$\therefore \triangle\,\text{أبجـ} \sim \triangle\,\text{أدهـ}$ (مسلمة التشابه)

ويكون : $\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}}$ (١)

، $\because \text{د} \in \overline{\text{أب}}$ ، $\text{هـ} \in \overline{\text{أجـ}}$

$\therefore \text{أب} = \text{أد} + \text{دب}$ ، $\text{أجـ} = \text{أهـ} + \text{هـجـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أد} + \text{دب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أهـ} + \text{هـجـ}}{\text{أهـ}}$

ويكون : $\frac{\text{أد}}{\text{أد}} + \frac{\text{دب}}{\text{أد}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أهـ}} + \frac{\text{هـجـ}}{\text{أهـ}}$

$\therefore 1 + \frac{\text{دب}}{\text{أد}} = 1 + \frac{\text{هـجـ}}{\text{أهـ}}$

$\therefore \frac{\text{دب}}{\text{أد}} = \frac{\text{هـجـ}}{\text{أهـ}}$

ومن خواص التناسب نجد أن : $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ (وهو المطلوب)

مـلاحظـة

من الشكل السابق :

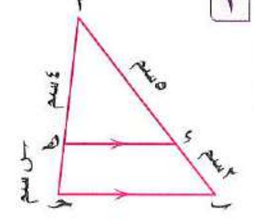
$\because \frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ (نظرية) $\therefore \frac{\text{أد} + \text{دب}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ} + \text{هـجـ}}{\text{هـجـ}}$ (راجع خواص التناسب)

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{دب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{هـجـ}}$

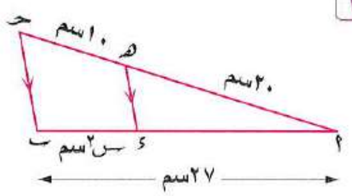
مثـال ١

فى كل من الأشكال الآتية : $\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ أوجد قيمة س :

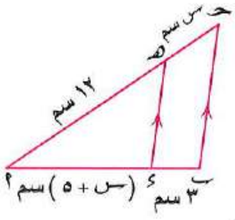
١



٢



٣



الحـل

١ $\because \overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ $\therefore \frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ $\therefore \frac{٥}{٢} = \frac{٤}{\text{س}}$ $\therefore$ س = ١,٦

٢ $\because \overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ $\therefore \frac{\text{أب}}{\text{دب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{هـجـ}}$ $\therefore \frac{٢٧}{\text{س}^٢} = \frac{٣٠}{١٠}$ $\therefore$ س^٢ = ٩

$\therefore$ س = ± ٣

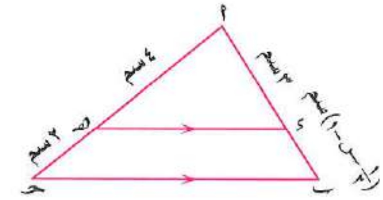
٣ $\because \overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ $\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أد}}{\text{دب}}$ $\therefore \frac{١٢}{\text{س}} = \frac{\text{س} + ٥}{٣}$

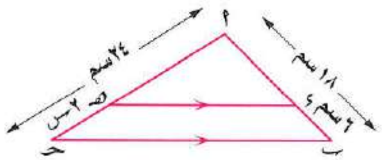
$\therefore$ س^٢ + ٥ س = ٣٦ $\therefore$ س^٢ + ٥ س − ٣٦ = ٠

$\therefore$ (س + ٩) (س − ٤) = ٠ $\therefore$ س = −٩ (مرفوض) أ، س = ٤

حاول بنفسك

فى كل من الشكلين الآتيين : $\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ أوجد قيمة س العددية :



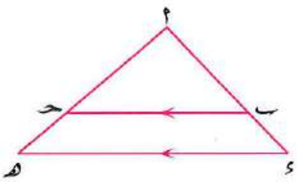


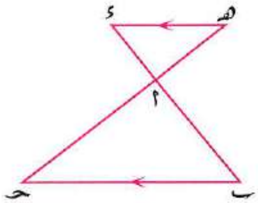
نتيجــة

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازى ضلعًا من أضلاعه ، وليكن $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ فى ء ، هـ على الترتيب فإن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ هـ}}$ (كما فى الشكل)

• بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن :

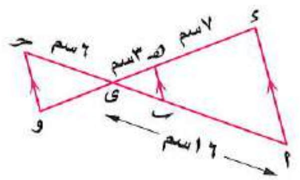
$\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}}$





مثال ٢

فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ء}} \,//\, \overline{\text{ب هـ}} \,//\, \overline{\text{و جـ}}$

، $\overline{\text{أ جـ}} \cap \overline{\text{ء و}} = \{\text{ى}\}$ ، ء هـ = ٧ سم

، هـ ى = ٣ سم ، ى جـ = ٦ سم ، أ ى = ١٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ى و}}$ ، $\overline{\text{ى ب}}$

الحــل

$\because$ $\overline{\text{أ ء}} \,//\, \overline{\text{و جـ}}$ $\therefore$ $\frac{\text{أ ى}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ء ى}}{\text{ى و}}$

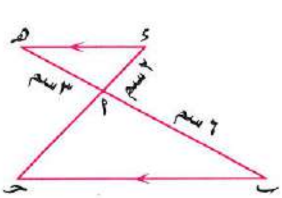
$\therefore$ $\frac{١٦}{٦} = \frac{١٠}{\text{ى و}}$ $\therefore$ ى و $= \frac{١٠ \times ٦}{١٦} = ٣,٧٥$ سم

، $\because$ $\overline{\text{ب هـ}} \,//\, \overline{\text{أ ء}}$ $\therefore$ $\frac{\text{ى ب}}{\text{ى أ}} = \frac{\text{ى هـ}}{\text{ى ء}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ى ب}}{١٦} = \frac{٣}{١٠}$ $\therefore$ ى ب $= \frac{١٦ \times ٣}{١٠} = ٤,٨$ سم (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :



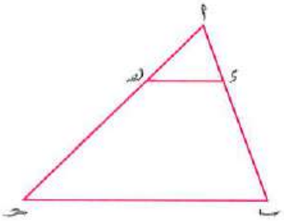
$\overline{\text{ء هـ}} \,//\, \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}} \cap \overline{\text{ب هـ}} = \{\text{أ}\}$ ، أ هـ = ٣ سم

، أ ب = ٦ سم ، أ ء = ٢ سم

أوجد : طول $\overline{\text{أ جـ}}$

عكس نظرية ١

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث ، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازى الضلع الثالث.



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ يقطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ فى ء ، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ فى هـ ، $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$

فإن : $\frac{\text{أء} + \text{ءب}}{\text{أء}} = \frac{\text{أهـ} + \text{هـحـ}}{\text{أهـ}}$

(**لأن** $\frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{مقدم + تالى}}{\text{مقدم}}$)

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{أهـ}}$ ، $\because$ ∠ أ مشتركة

$\therefore \Delta$ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ $\therefore$ ∠ ب ≡ ∠ أ ء هـ وهما فى وضع تناظر

$\therefore \overleftrightarrow{\text{ءهـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{بحـ}}$

ملاحظة

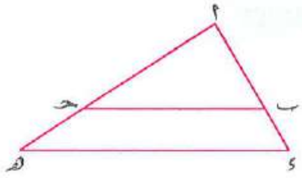
إذا رسم مستقيم (وليكن $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$) خارج مثلث أ ب حـ ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ فى ء ، هـ على الترتيب

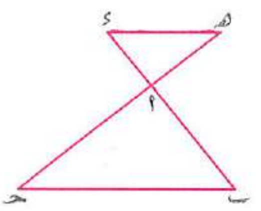
وكان $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$ فإن : $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

ففى الشكل المقابل :

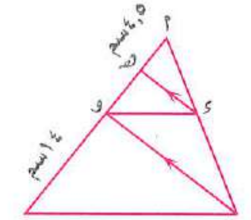
إذا كان : $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$

فإن : $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$





مثال ٣



فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بو}}$ ، أء = $\frac{٣}{٤}$ ء ب

، أهـ = ٤,٥ سم ، و حـ = ١٤ سم **فأثبت أن :** $\overline{\text{ءو}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

الحل

$\because$ أء = $\frac{٣}{٤}$ ء ب $\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{٣}{٤}$

، $\because \overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بو}}$ $\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـو}}$

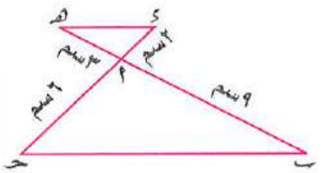
$\therefore \frac{٣}{٤} = \frac{٤,٥}{\text{هـو}}$ $\therefore$ هـ و $= \frac{٤ \times ٤,٥}{٣} =$ ٦ سم

∴ أو = ٤,٥ + ٦ = ١٠,٥ سم ∴ أو / وجـ = ١٠,٥ / ١٤ = ٣ / ٤

∴ أو / وجـ = أء / ءب ∴ ءو // بجـ **(وهو المطلوب)**

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



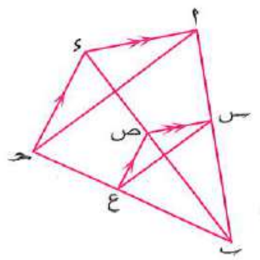
ءجـ ∩ بهـ = {أ} ، أء = ٢ سم ، أهـ = ٣ سم

، أب = ٩ سم ، أجـ = ٦ سم

حدد ما إذا كان : ءهـ // بجـ **ولماذا ؟**

مثال ٤

في الشكل المقابل :



أبجـء شكل رباعي ، ص ∈ بء

، رسم ص س // ءأ فقطع أب في س

، ورسم ص ع // ءجـ فقطع بجـ في ع

أثبت أن : س ع // أجـ

الحل

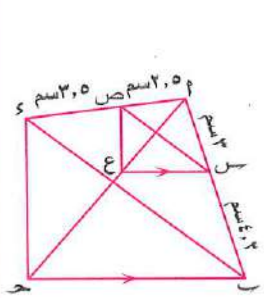
في Δ أبء : ∵ س ص // أء ∴ ب س / ب أ = ب ص / ب ء (١)

، في Δ بجـء : ∵ ص ع // جـء ∴ ب ع / ب جـ = ب ص / ب ء (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ب س / ب أ = ب ع / ب جـ ∴ في Δ أبجـ : س ع // أجـ **(وهو المطلوب)**

حاول بنفسك

في الشكل المقابل :



أبجـء شكل رباعي ، رسم قطراه أجـ ، بء

، س ∈ أب حيث : أس = ٣ سم ، س ب = ٤,٢ سم

، ص ∈ أء حيث : أص = ٢,٥ سم ، ص ء = ٣,٥ سم

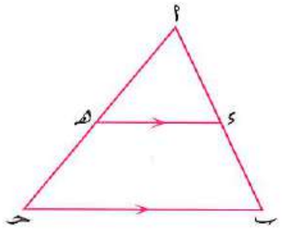
، رسم س ع // بجـ ويقطع أجـ في ع

أثبت أن : [١] س ص // بء [٢] ص ع // جـء

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



أولًا : إذا كان : $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{٥}{٣}$ فإن : $\frac{\text{أب}}{\text{دب}} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٨}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) $\frac{٥}{٨}$

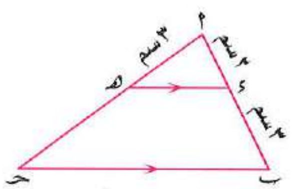
ثانيًا : إذا كان : $\frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٤}{٧}$ فإن : $\frac{\text{جـهـ}}{\text{هـأ}} =$ ....

(أ) $\frac{٧}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

ثالثًا : إذا كان : $\frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}} = \frac{٣}{٥}$ فإن : $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} =$ ....

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) ١,٥ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٢) فى الشكل المقابل :

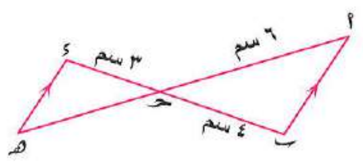


إذا كان : $\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ ، أد = ٢ سم ، أهـ = دب = ٣ سم

فإن : طول $\overline{\text{هـجـ}}$ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٤,٥

(٣) فى الشكل المقابل :



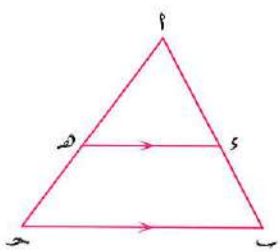
$\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{دهـ}}$ ، $\overline{\text{أهـ}} \cap \overline{\text{بد}} = \{\text{جـ}\}$

، أجـ = ٦ سم ، بجـ = ٤ سم ، جـد = ٣ سم

فإن : طول $\overline{\text{جـهـ}}$ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٤,٥ (د) ٣,٥

(٤) فى الشكل المقابل :



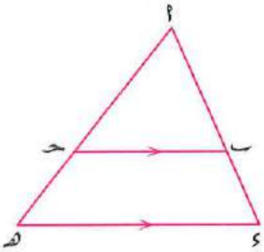
جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

ما عدا التعبير ....

(أ) $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ (ب) $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}}$

(جـ) $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$ (د) $\frac{\text{أب}}{\text{بد}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{هـجـ}}$

(٥) في الشكل المقابل :



إذا كان : بحـ // ءهـ فإن ....

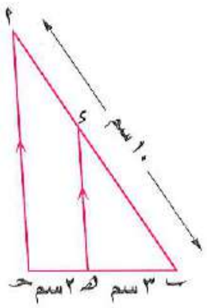
(أ) الشكل ء ب حـ هـ رباعى دائرى.

(ب) Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ

(جـ) أ ب × أ ء = أ حـ × أ هـ

(د) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ء هـ}}$

(٦) في الشكل المقابل :



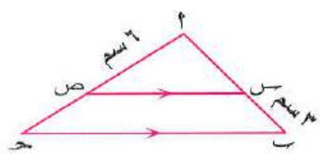
ءهـ // أحـ ، ب هـ = ٣ سم ، هـ حـ = ٢ سم

فإن : أ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٧

(٧) في الشكل المقابل :

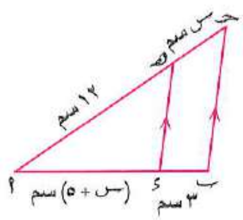


إذا كان : س ص // ب حـ ، $\frac{\text{أ س + أ ص}}{\text{أ ب + أ حـ}} = \frac{٣}{٥}$

فإن : أ س = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٤,٥ (د) ٤

(٨) في الشكل المقابل :



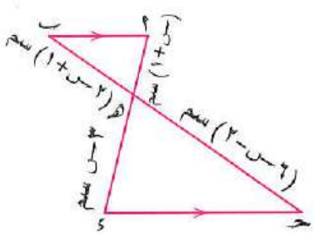
إذا كان : ءهـ // ب حـ

فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٩

(جـ) ١٢ (د) ٣

(٩) في الشكل المقابل :



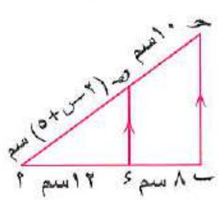
إذا كان : أ ب // حـ ء

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤,٥ (د) ٦

(١٠) 📖 في الشكل المقابل :

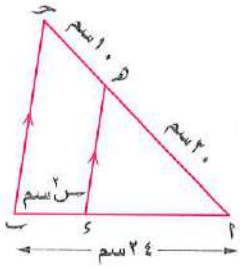


إذا كان : ءهـ // ب حـ

فإن : س = ...

(أ) ١٢ (ب) ٧ (جـ) ٥ (د) ٤

(١١) في الشكل المقابل :



$\triangle$ أ ب ح فيه : $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب ح}}$

فإن : س = ...

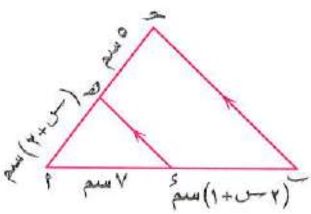
(أ) ٢ $\sqrt{٢}$

(ب) ± ٣

(جـ) ٤

(د) ± ٢ $\sqrt{٢}$

(١٢) في الشكل المقابل :



$\triangle$ أ ب ح فيه : $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب ح}}$

فإن : س = ...

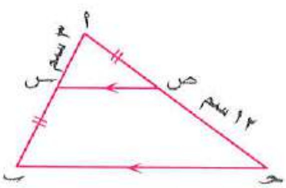
(أ) −٥,٥ أ، ٣

(ب) −٥,٥

(جـ) ٣

(د) ٢,٥

(١٣) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب ح}}$

فإن : أ ح = ... سم

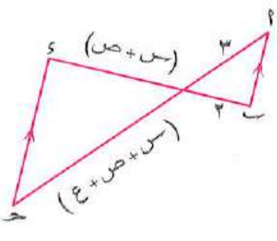
(أ) ١٥

(ب) ١٦

(جـ) ١٨

(د) ٢٠

(١٤) في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أ ب}} \parallel \overline{\text{ح ء}}$

فإن : ع = ...

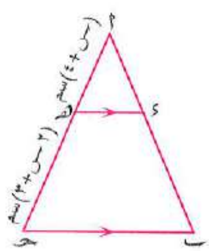
(أ) $\frac{\text{س} - \text{ص}}{٢}$

(ب) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢}$

(جـ) ٥ س + ٥ ص

(د) $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٥}$

(١٥) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب ح}}$ ، أ ء : أ ب = ٢ : ٥

فإن : س = ...

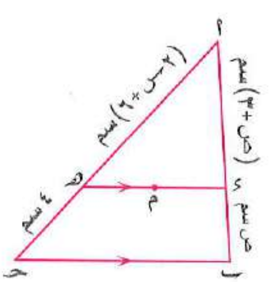
(أ) ٨

(ب) ٦

(جـ) ٤

(د) ٢

(١٦) في الشكل المقابل :



إذا كانت م هي نقطة تلاقى متوسطات $\triangle$ أ ب ح

فإن : ٢ س + ص = ... سم

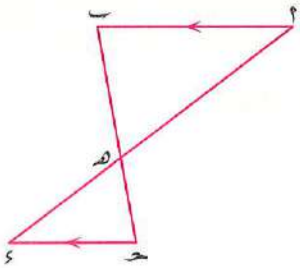
(أ) ٢

(ب) ٣

(جـ) ٤

(د) ٥

(١٧) فى الشكل المقابل :



إذا كانت : أب // حـ ء

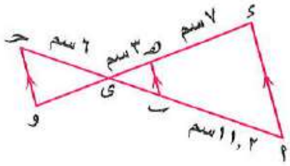
، ٢ أ هـ = ٣ هـ ء ، ب هـ - حـ هـ = ٤ سم

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٤ (د) ٢٥

(١٨) فى الشكل المقابل :

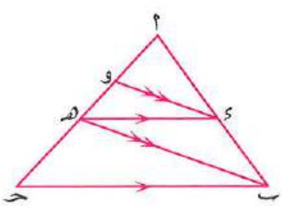


أء // ب هـ // و حـ

فإن : ى و = ... سم

(أ) ٣,٦ (ب) ٤,٨ (جـ) ٦,٣ (د) ٣,٧٥

(١٩) فى الشكل المقابل :



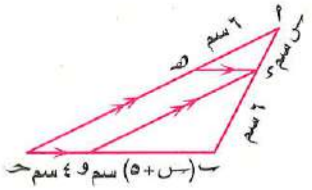
إذا كانت : ء و // ب هـ ، ء هـ // ب حـ

فإن : أ و × أ حـ = ...

(أ) أ هـ (ب) $(\text{أ هـ})^2$

(جـ) $(\text{ء هـ})^2$ (د) و هـ × هـ حـ

(٢٠) فى الشكل المقابل :



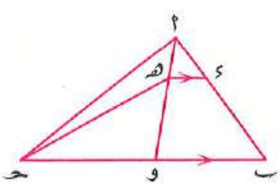
إذا كان : ء هـ // ب حـ ، ء و // أ حـ

فإن : طول هـ حـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٨

(جـ) ٦ (د) ٩

(٢١) فى الشكل المقابل :



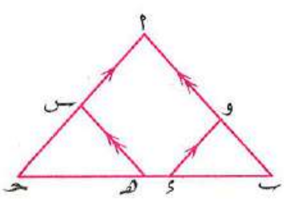
هـ ء // و ب ، م (△ أ هـ حـ) = ٩ سم^2

، م (△ حـ و هـ) = ١٦ سم^2 ، أ ب = ١٥ سم

فإن : أ ء = ... سم

(أ) ٩,٦ (ب) ٥,٤ (جـ) $8\frac{4}{7}$ (د) $6\frac{3}{7}$

(٢٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان : و ء // أ حـ ، س هـ // أ ب

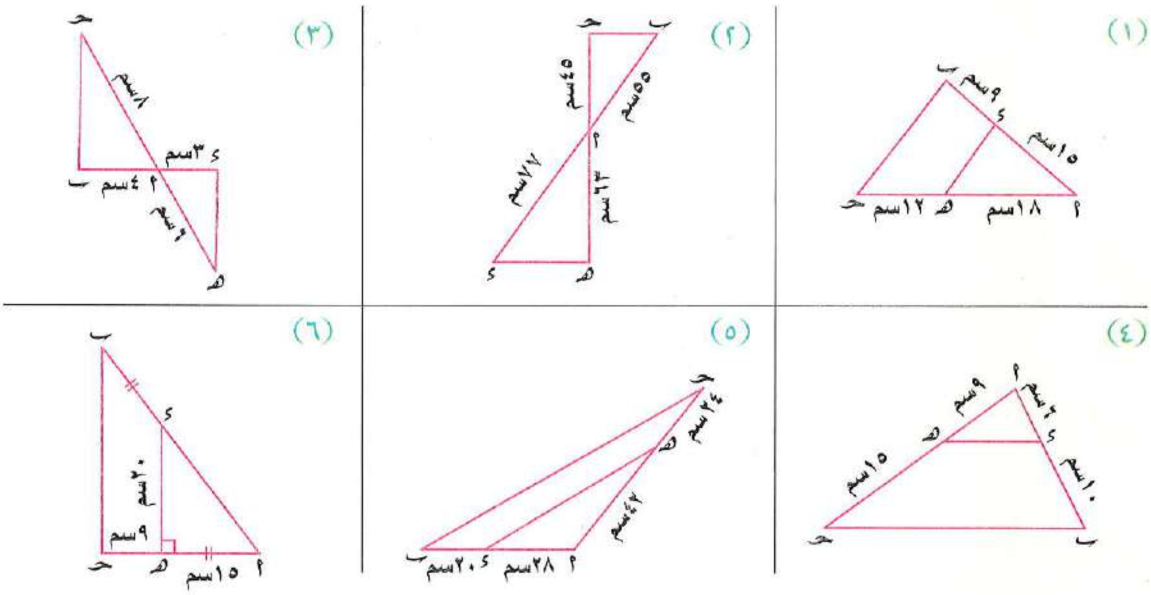
، ب ء : ء هـ : هـ حـ = ٤ : ٢ : ٥ ، أ ب = أ حـ = ٣٣ سم

فإن : أ و + أ س = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٣٣ (جـ) ٣٩ (د) ٤٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ في كل من الأشكال التالية ، حدد ما إذا كان $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$:

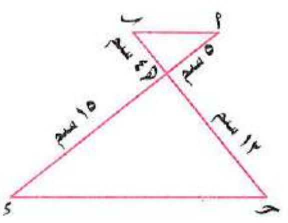


٢ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أء} \cap \overline{بحـ} = \{هـ\}$ ، أهـ = ٥ سم

، بهـ = ٤ سم ، حـهـ = ١٢ سم ، ءهـ = ١٥ سم

أثبت أن : $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$



٣ $\overline{سص} \cap \overline{عل} = \{م\}$ ، حيث $\overline{سع}$ // $\overline{لص}$ ، فإذا كان : س م = ٩ سم

، ص م = ١٥ سم ، ع ل = ٣٦ سم **أوجد :** طول $\overline{عم}$ «١٣٫٥ سم»

٤ لكل مما يأتي :

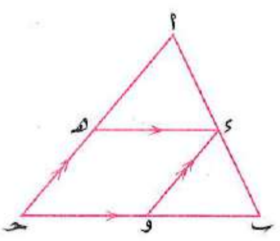
استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س (الأطوال بالسنتيمترات) :

(١) أء = ٤ ، بء = ٨ ، حـهـ = ٦ ، أهـ = س

(٢) أهـ = س ، هـحـ = ٥ ، أء = س − ٢ ، ءب = ٣

(٣) أب = ٢١ ، بو = ٨ ، وحـ = ٦ ، أء = س

(٤) أء = س ، بو = س + ٥ ، ٢ ءب = ٣ وحـ = ١٢



٥ س ص ع مثلث فيه : س ص = ١٤ سم ، س ع = ٢١ سم ، ل ∈ $\overline{سص}$ بحيث

س ل = ٥٫٦ سم ، م ∈ $\overline{سع}$ حيث س م = ٨٫٤ سم **أثبت أن :** $\overline{لم}$ // $\overline{صع}$

٦ في المثلث أ ب حـ ، ء ∈ أب ، هـ ∈ أحـ ، ٥ أهـ = ٤ هـ حـ إذا كان :

أء = ١٠ سم ، ء ب = ٨ سم حدد ما إذا كان : ءهـ // ب حـ فسّر إجابتك.

---

٧ أ ب حـ ء شبه منحرف فيه : أء // ب حـ ، تقاطع قطراه أحـ ، ب ء في م فإذا كان :

أ م = ٢,٥ سم ، ء ب = $٧\frac{١}{٣}$ سم ، م حـ = ٣ سم

فأوجد : طول كل من م ء ، م ب

«$٣\frac{١}{٣}$ سم ، ٤ سم»

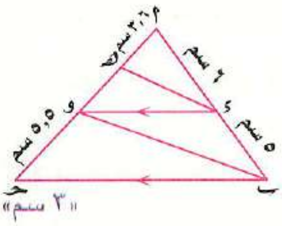
---

٨ في الشكل المقابل :

إذا كان : ءو // ب حـ ، أء = ٦ سم

، ب ء = ٥ سم ، أهـ = ٣,٦ سم ، و حـ = ٥,٥ سم

أوجد : طول هـ و ثم أثبت أن : ءهـ // ب و



«٣ سم»

---

٩ أ ب حـ ء شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ فإذا كان :

أهـ = ٦ سم ، ب هـ = ١٣ سم ، هـ حـ = ١٠ سم ، هـ ء = ٧,٨ سم

أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف.

---

١٠ أ ب حـ ء شكل رباعي ، هـ ∈ أحـ ، رسم هـ و // حـ ب ويقطع أب في و ، ورسم هـ ن // حـ ء ويقطع أء في ن أثبت أن : و ن // ب ء

---

١١ أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي ضلعه الثالث ، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع.

---

١٢ أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ ب أ ، هـ ∉ أب ، رسم هـ حـ فقطع أء في و ، ب ء في م

أثبت أن : $(حـ م)^٢$ = م و × م هـ

---

١٣ أ ب حـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ حـ ب ، هـ ∉ حـ ب ، رسم ءهـ فقطع أب في ن

ثم رسم ب ى // هـ ء فقطع حـ ء في ى أثبت أن : $\frac{أن}{ن ب} = \frac{حـ ى}{ى ء}$

---

١٤ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ أب حيث ٣ أء = ٢ ء ب ، هـ ∈ أحـ حيث ٥ حـ هـ = ٣ أ حـ

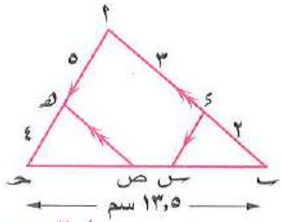
، رسم أس يقطع ب حـ في س فإذا كان : أ و = ٨ سم ، أ س = ٢٠ سم

، حيث و ∈ أس أثبت أن : النقط ء ، و ، هـ على استقامة واحدة.

---

١٥ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ ب حـ بحيث $\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{٣}{٤}$ ، هـ ∈ أء بحيث $\frac{أهـ}{أء} = \frac{٣}{٧}$ ، رسم حـ هـ فقطع أب في س ، رسم ء ص // حـ س فقطع أب في ص أثبت أن : أ س = ب ص

١٦ في الشكل المقابل :



«٢,١ سم»

أ ب جـ مثلث فيه : $\overline{\text{ء س}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ص}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

، ب جـ = ١٣,٥ سم ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{٣}{٢}$ ، هـ جـ = $\frac{٤}{٥}$ أ هـ

أوجد : طول $\overline{\text{س ص}}$

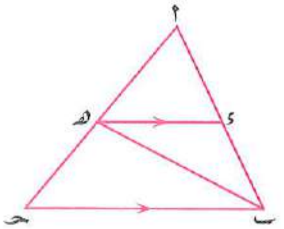
---

١٧ أ ب جـ مثلث ، ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، م ∈ $\overline{\text{أ ء}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في هـ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في و **أثبت أن :** ء منتصف $\overline{\text{هـ و}}$ ، وإذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب جـ

فأثبت أن : هـ و = $\frac{١}{٣}$ ب جـ

---

١٨ في الشكل المقابل :



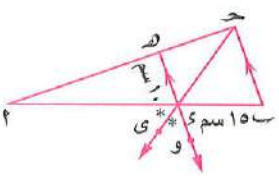
أ ب جـ مثلث فيه : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

أثبت أن : $\frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ء هـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}} = \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ}}{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب جـ}}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

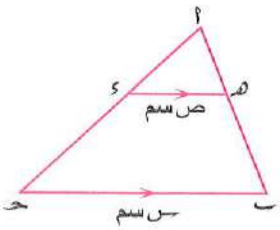


إذا كانت : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ أ ء ى) = ق(∠ و ء ى)

وكان : ء هـ = ١٠ سم ، ب ء = ١٥ سم فإن : أ ء = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٥

(٢) في الشكل المقابل :



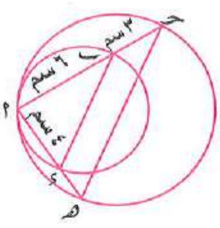
إذا كانت : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ء هـ = ص سم ، ب جـ = س سم

وكان : ٢ $\text{س}^٢$ − ٣ س ص − ٥ $\text{ص}^٢$ = ٠ وكان : أ ب = ١٠ سم

فإن : هـ ب = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

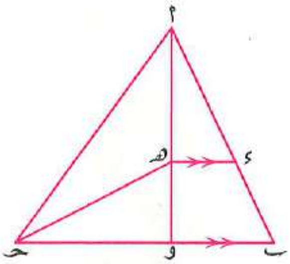
(٣) في الشكل المقابل :



دائرتان متماستان من الداخل في أ فإن : هـ ء = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٣,٥ (د) ٤

(٤) في الشكل المقابل :



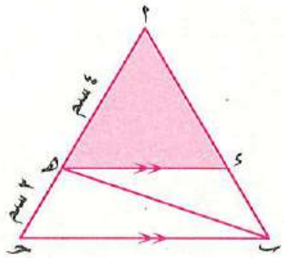
إذا كانت : مساحة (△ أ هـ حـ) = ١٥ سم^{٢}

، مساحة (△ و هـ حـ) = ٩ سم^{٢} ، أ ب = ١٦ سم

فإن : أ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٣

(٥) في الشكل المقابل :



إذا كان : ء هـ // ب حـ

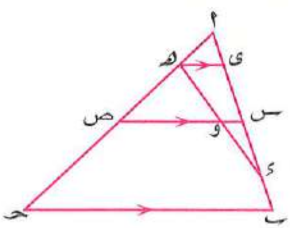
وكانت مساحة (△ هـ ب حـ) = ٩ سم^{٢}

فإن : مساحة (△ أ ء هـ) = ... سم^{٢}

(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٢٧

---

٢ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث ، س منتصف أ ب

، ص منتصف أ حـ ، ء ∈ ب س ، هـ ∈ أ ص بحيث $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{هـ أ}}$

، ى هـ // س ص // ب حـ

أثبت أن : و منتصف ء هـ

---

٣ أ ب حـ ء مستطيل تقاطع قطراه في م ، هـ منتصف أ م ، و منتصف م حـ ، رسم ء هـ يقطع أ ب في س ، ورسم ء و يقطع ب حـ في ص **أثبت أن :** س ص // أ حـ

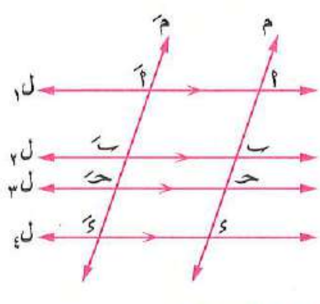
الدرس

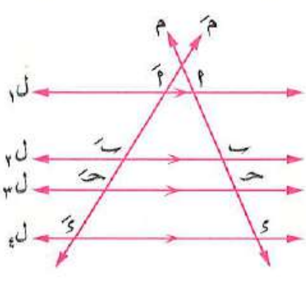
2

نظريـة تاليس

نظريـة ٢ (نظرية تاليس العامة)

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



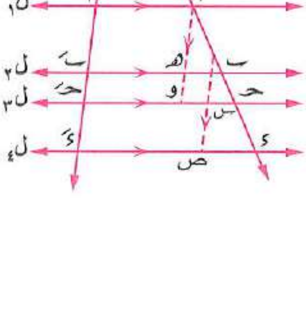


ففى الشكلين السابقين :

إذا كان : ل$_1$ // ل$_2$ // ل$_3$ // ل$_4$ ، م ، مَ قاطعين لهم

فإن : $\frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{بَحَ}} = \frac{\text{حـء}}{\text{حَءَ}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{أَحَ}}$

وفيما يلى إثبات صحة هذه النظرية :



◄ المعطيات ل$_1$ // ل$_2$ // ل$_3$ // ل$_4$ ، م ، مَ قاطعان لهم

◄ المطلوب إثبات أن : أب : بحـ : حـء = أَبَ : بَحَ : حَءَ

◄ العمل ارسم $\overleftrightarrow{\text{أو}}$ // مَ ، ويقطع ل$_2$ فى هـ ، ل$_3$ فى و

، $\overleftrightarrow{\text{بص}}$ // مَ ، ويقطع ل$_3$ فى س ، ل$_4$ فى ص

البرهان ∵ $\overline{\text{أأَ}}$ // $\overline{\text{هـ بَ}}$ ، $\overline{\text{أهـ}}$ // $\overline{\text{أَبَ}}$

∴ أهـ بَ أَ متوازى أضلاع ويكون : أهـ = أَبَ

بالمثل : هـ و = بَ جـَ ، ب س = بَ جـَ ، س ص = جـَ ءَ

فى Δ أجـ و : ∵ $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{جـ و}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ و}}$

ويكون : $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أَبَ}}{\text{بَ جـَ}}$ ، $\frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{بَ جـَ}}$ (إبدال الوسطين) (١)

بالمثل Δ ب ء ص :

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{بَ جـَ}}{\text{جـَ ءَ}}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{بَ جـَ}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{جـَ ءَ}}$ (إبدال الوسطين) (٢)

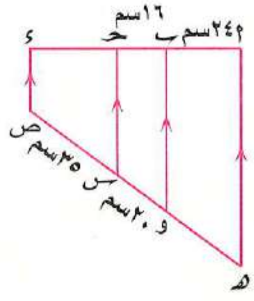
من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{بَ جـَ}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{جـَ ءَ}}$

∴ أب : ب جـ : جـ ء = أَبَ : بَ جـَ : جـَ ءَ (وهو المطلوب)

فى الشكل السابق لاحظ أن :

- $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـ ء}} = \frac{\text{أَجـَ}}{\text{جـَ ءَ}}$
- $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{أَجـَ}}{\text{جـَ بَ}}$
- $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{بَ ءَ}}{\text{ءَ أَ}}$ وهكذا

فمثلًا فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أهـ}}$ // $\overline{\text{ب و}}$ // $\overline{\text{جـ س}}$ // $\overline{\text{ء ص}}$

وكان : أب = ٢٤ سم ، ب جـ = ١٦ سم

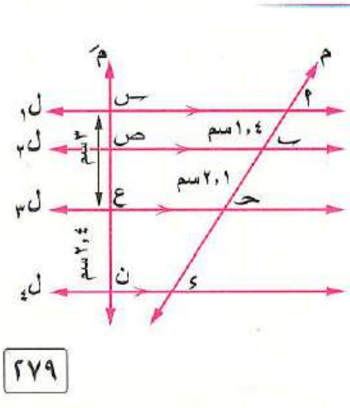
، و س = ٢٠ سم ، س ص = ٣٥ سم فإن : $\frac{\text{أب}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و س}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{س ص}}$

أى أن $\frac{٢٤}{\text{هـ و}} = \frac{١٦}{٢٠} = \frac{\text{جـ ء}}{٣٥}$ ومنها :

هـ و = $\frac{٢٠ \times ٢٤}{١٦}$ = ٣٠ سم ، جـ ء = $\frac{١٦ \times ٣٥}{٢٠}$ = ٢٨ سم

مثال ١

فى الشكل المقابل :



ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤ ، م ، مَ قاطعان لهم

استخدم الأبعاد الموضحة فى الشكل لحساب :

طول كل من $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$

الحــل

∵ $\text{ل}_1 \,//\, \text{ل}_2 \,//\, \text{ل}_3 \,//\, \text{ل}_4$ ، م ، مَ قاطعان لهم.

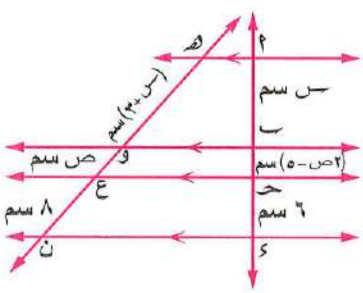
$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{س ع}}$

$\therefore \frac{1,4}{\text{س ص}} = \frac{\text{حـ ء}}{2,4} = \frac{2,1 + 1,4}{3} = \frac{3,5}{3}$

$\therefore \text{س ص} = \frac{1,4 \times 3}{3,5} = 1,2$ سم (المطلوب أولًا)

، $\text{حـ ء} = \frac{2,4 \times 3,5}{3} = 2,8$ سم (المطلوب ثانيًا)

مثــال ٢



فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أهـ}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{ب و}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{حـ ع}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{ء ن}}$

احسب قيمة كل من س ، ص

العددية علمًا بأن الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.

الحــل

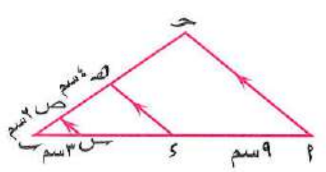
∵ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{ب و}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{حـ ع}} \,//\, \overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ قاطعان لهم.

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{و ع}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ع ن}}$ $\qquad$ $\therefore \frac{\text{س}}{\text{س} + 2} = \frac{2\,\text{ص} - 5}{\text{ص}} = \frac{3}{4}$

$\therefore 4\,\text{س} = 3\,\text{س} + 6$ $\qquad$ $\therefore \text{س} = 6$

، $8\,\text{ص} - 20 = 3\,\text{ص}$ $\qquad$ $\therefore 5\,\text{ص} = 20$ (وهو المطلوب)

حاول بنفسك



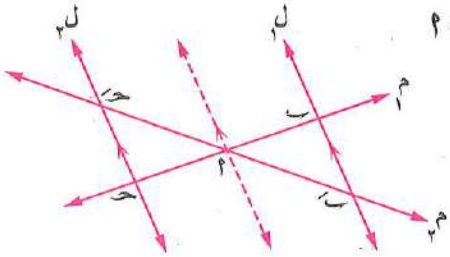
فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، $\overline{\text{أحـ}} \,//\, \overline{\text{ء هـ}} \,//\, \overline{\text{س ص}}$ ، أ ء = ٩ سم

، س ب = ٣ سم ، ب ص = ٢ سم ، هـ ص = ٤ سم

أوجد : حـ هـ ، ء س

حالتان خاصتان



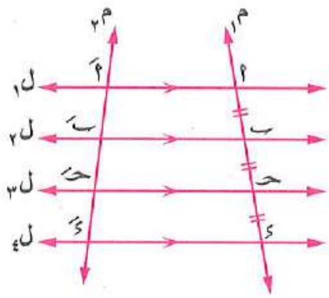
١ إذا كان : ل$_1$ // ل$_2$ ، م$_1$ ، م$_2$ قاطعين لهما متقاطعين فى النقطة أ

فإن : $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أب'}}{\text{أجـ'}}$

وبالعكس إذا كان : $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{أب'}}{\text{أجـ'}}$

فإن : $\overleftrightarrow{\text{ب ب'}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ جـ'}}$

٢ **نظرية تاليس الخاصة :**



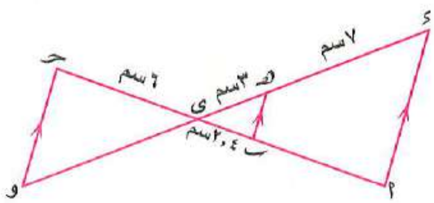
إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فى الطول فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك فى الطول.

ففى الشكل المقابل :

إذا كان : ل$_1$ // ل$_2$ // ل$_3$ // ل$_4$ ، قطعها المستقيمان م$_1$ ، م$_2$

وكان : أب = ب جـ = جـ ء فإن : أ'ب' = ب'جـ' = جـ'ء'

مثال ٣



فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{و جـ}}$

، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ قاطعان لهم متقاطعان فى ى

استخدم الأبعاد الموضحة فى الشكل لحساب : طول كل من $\overline{\text{ى و}}$ ، $\overline{\text{ى أ}}$

الحل

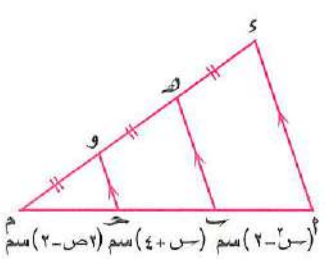
∵ $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{و جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ قاطعان لهم متقاطعان فى ى

∴ $\frac{\text{ى و}}{\text{ى جـ}} = \frac{\text{ى هـ}}{\text{ى ب}} = \frac{\text{ى ء}}{\text{ى أ}}$ ∴ $\frac{\text{ى و}}{٦} = \frac{٣}{٢,٤} = \frac{١٠}{\text{ى أ}}$

∴ ى و = $\frac{٦ \times ٣}{٢,٤}$ = ٧,٥ سم **(المطلوب أولاً)**

، ى أ = $\frac{١٠ \times ٢,٤}{٣}$ = ٨ سم **(المطلوب ثانيًا)**

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{جـ و}}$ ، ء هـ = هـ و = و م

أوجد : قيم س ، ص علمًا بأن الأطوال مقدرة بالسنتيمترات.

الحــل

∵ $\overline{أء} // \overline{ب هـ} // \overline{حـ و}$ ، ء هـ = هـ و = و م

∴ أب = ب حـ = حـ م

∴ $س^2 - 2 = س + 4$

∴ $س^2 - س - 6 = 0$

∴ $(س + 2)(س - 3) = 0$

∴ س = -2 أ، س = 3

، عند س = -2 : ∴ ب حـ = 2 سم

، عند س = 3 : ∴ ب حـ = 7 سم

، ∵ ب حـ = حـ م

∴ عند ب حـ = 2 سم : ∴ 2 ص - 2 = 2 ومنها ص = 2

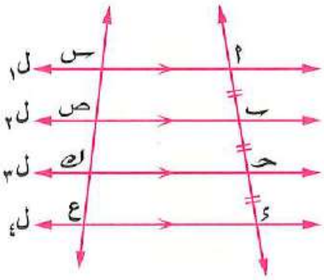
، عند ب حـ = 7 سم : ∴ 2 ص - 2 = 7 ومنها ص = 4,5 (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

فى الشكل المقابل :

إذا كان : س ك = 6 سم

أوجد : طول $\overline{ص ك}$



تمـارين 6 على نظرية تاليس

اختبر نفسك

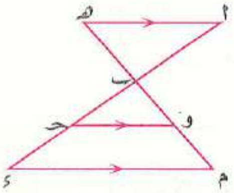
● تذكر ● فهـم ○ تطبيق ● مستويات عليا

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

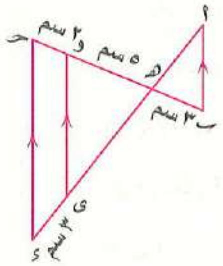


أ ب : ب ح : ح ء = ...

(أ) أ هـ : و ح : م ء — (ب) هـ ب : ب و : و م

(جـ) هـ ب : ب ح : ح ء — (د) هـ ب : هـ و : هـ م

(٢) فى الشكل المقابل :

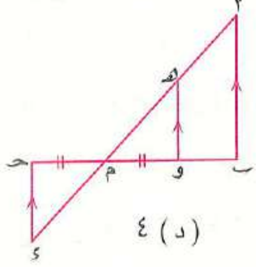


أ ى = ... سم

(أ) ٦ — (ب) ٧,٥

(جـ) ١٠ — (د) ١٢

(٣) فى الشكل المقابل :

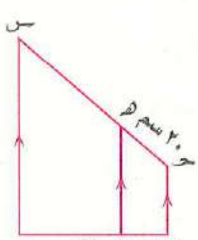


ء أ = ٢١ سم ، م ح = ٥ سم ، و ب = ٤ سم

فإن : أ هـ = ... سم

(أ) ٣ — (ب) ٥ — (جـ) ٦ — (د) ٤

(٤) فى الشكل المقابل :



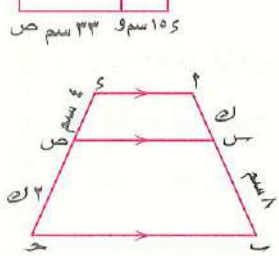
إذا كان : $\overline{\text{ح ء}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ ، ح هـ = ٢٠ سم ، ء و = ١٥ سم

، و ص = ٣٣ سم فإن : طول $\overline{\text{ح س}}$ = ... سم

(أ) ٤٨ — (ب) ٦٤

(جـ) ٤٤ — (د) ٢١

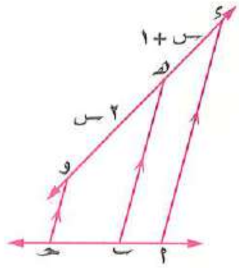
(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$

فإن : أ س = ... سم

(أ) $\frac{٣}{٨}$ — (ب) ٤ — (جـ) ١٦ — (د) ٣٢



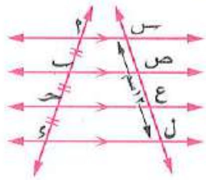
(٦) في الشكل المقابل :

إذا كان : أء // ب هـ // حـ و ، أب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم

، ء هـ = س + ١ سم ، هـ و = ٢ س سم فإن : س = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٨

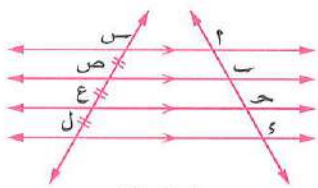


(٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : أب = ب حـ = حـ ء ، س ل = ١٢ سم

فإن : س ع = ...

(أ) ٤ سم (ب) ص ل (جـ) أ حـ (د) ب حـ

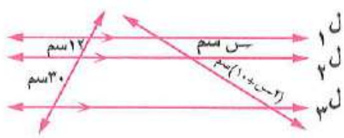


(٨) في الشكل المقابل :

إذا كان : ب ء = ١٤ سم

فإن : أ حـ = ... سم

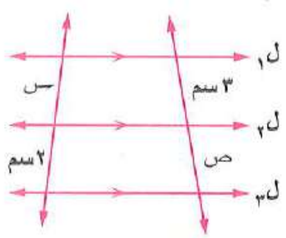
(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٢١ (د) ٢٨



(٩) في الشكل المقابل :

س = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٥ (د) ٨

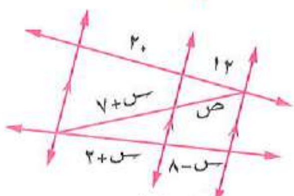


(١٠) في الشكل المقابل :

إذا كان : س > ٢ فإن : ....

(أ) ص = ٣ (ب) ص > ٣

(جـ) ص < ٣ (د) ص ≥ ٣

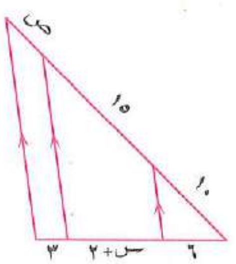


(١١) في الشكل المقابل :

إذا كانت الأطوال مقدرة بالسنتيمتر

فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٢٣ (ب) ١٨ (جـ) ٤١ (د) ٥١



(١٢) في الشكل المقابل :

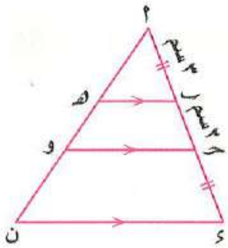
إذا كانت الأطوال مقدرة بالسنتيمتر

فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٧

(جـ) ١١ (د) ١٢

(١٣) فى الشكل المقابل :

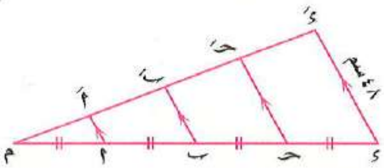


$\frac{\text{ب هـ}}{\text{ء ن}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(١٤) فى الشكل المقابل :

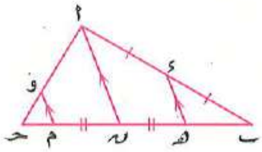


أ أَ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٨

(جـ) ١٢ (د) ١٦

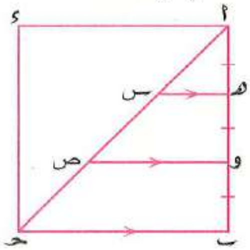
(١٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ب حـ = ٣٥ سم ، $\frac{\text{حـ و}}{\text{و أ}} = \frac{١}{٢}$ فإن : ب هـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٤

(١٦) فى الشكل المقابل :



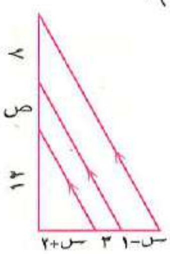
أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ٦ سم

، أ هـ = و هـ = و ب

فإن مساحة الشكل س ص و هـ = ... سم^٢

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ٦

(١٧) فى الشكل المقابل :



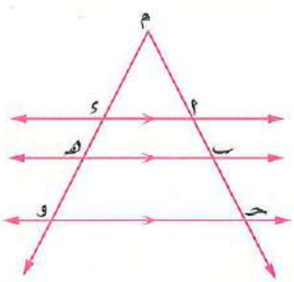
(س ، ص) = ...

(أ) (٥ ، ٧) (ب) (٤ ، ٦)

(جـ) (٧ ، ٤) (د) (١١ ، ٧)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل المقابل :



(١) $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{..........}$

(٢) $\frac{\text{أ حـ}}{\text{ب حـ}} = \frac{..........}{\text{هـ و}}$

(٣) $\frac{\text{م أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{م ء}}{..........}$

(٤) $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{..........}{\text{ء هـ}}$

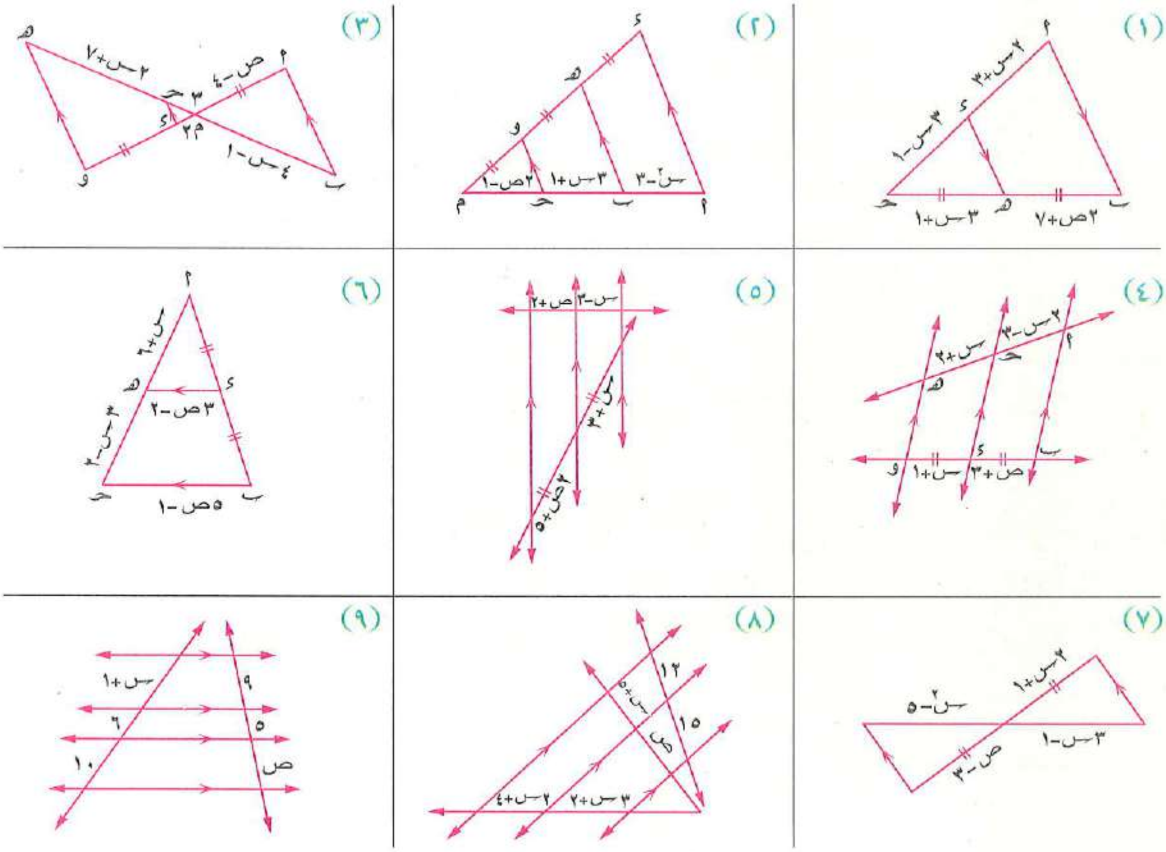
(٥) $\frac{\text{م ب}}{\text{أ ب}} = \frac{..........}{\text{ء هـ}}$

(٦) $\frac{\text{م حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{م و}}{..........}$

(٧) $\frac{\text{ب حـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{هـ و}}{..........}$

(٨) $\frac{\text{ء و}}{\text{م و}} = \frac{\text{أ حـ}}{..........}$

٢ في كل من الأشكال التالية ، احسب قيم س ، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) :



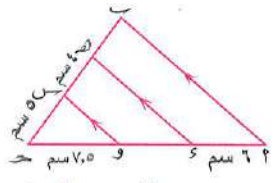
---

٣ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أب} \,//\, \overline{ءهـ} \,//\, \overline{وس}$ وكان : أء = ٦ سم ، هـ س = ٤ سم

، و حـ = ٧,٥ سم ، حـ س = ٥ سم

أوجد : طول كل من $\overline{ءو}$ ، $\overline{بهـ}$



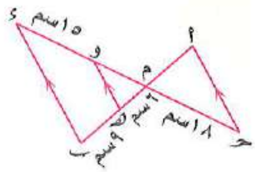
«٦ سم ، ٤ سم»

---

٤ في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـء} = \{م\}$ ، هـ ∈ $\overline{مب}$ ، و ∈ $\overline{مء}$ ، $\overline{أحـ} \,//\, \overline{وهـ} \,//\, \overline{ءب}$

أوجد : (١) طول $\overline{مو}$ (٢) طول $\overline{أم}$



«١٠ سم ، ١٠,٨ سم»

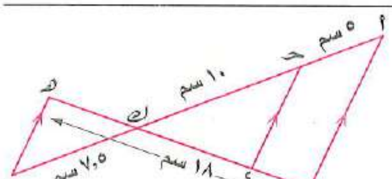
---

٥ في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{أب} \,//\, \overline{حـء} \,//\, \overline{هـو}$ وكان : أحـ = ٥ سم

، حـ ل = ١٠ سم ، ل و = ٧,٥ سم ، ب هـ = ١٨ سم

أوجد : طول كل من $\overline{بء}$ ، $\overline{ءل}$ ، $\overline{لهـ}$



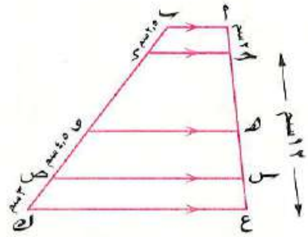
«٤ سم ، ٨ سم ، ٦ سم»

٦ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{حء}} = \{\text{هـ}\}$ ، $\text{س} \in \overline{\text{أب}}$ ، $\text{ص} \in \overline{\text{حء}}$

، وكان $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بء}} \parallel \overline{\text{أح}}$ أثبت أن : أس × هـء = حص × هـب

---

٧ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{حء}} \parallel \overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{عك}}$

، أح = ٢ سم ، بء = ٢,٥ سم

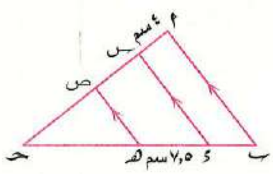
، وص = ٤,٥ سم ، وك = ٧,٥ سم ، حع = ١٢ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{هـس}}$ ، $\overline{\text{سع}}$ ، $\overline{\text{حهـ}}$ ، $\overline{\text{ءو}}$

«٣,٦ سم ، ٢,٤ سم ، ٦ سم ، ٧,٥ سم»

---

٨ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءس}} \parallel \overline{\text{هـص}}$ ، أس : سص : صح = ٢ : ٣ : ٥

فإذا كان : ءهـ = ٧,٥ سم ، أس = ٤ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{حهـ}}$ ، $\overline{\text{أح}}$

«٥ سم ، ١٢,٥ سم ، ٢٠ سم»

---

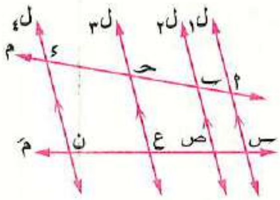
٩ أبح مثلث ، ء ، هـ $\in \overline{\text{أب}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ءس}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـص}}$ يوازيان $\overline{\text{بح}}$ ويقطعان $\overline{\text{أح}}$ فى س ، ص على الترتيب فإذا كان : أء = $\frac{1}{2}$ بهـ ، ءهـ = ٣ أء ، أح = ٢٤ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{\text{أس}}$ ، $\overline{\text{سص}}$ ، $\overline{\text{صح}}$

«٤ سم ، ١٢ سم ، ٨ سم»

---

١٠ فى الشكل المقابل :



$\text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2 \parallel \text{ل}_3 \parallel \text{ل}_4$ ، م ، مَ مستقيمان قاطعان لهم فإذا كان :

$\frac{\text{أب}}{\text{بح}} = \frac{1}{2}$ ، بح = $\frac{4}{5}$ حء وكان سن = ١٦,٥ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{\text{سص}}$ ، $\overline{\text{صع}}$ ، $\overline{\text{عن}}$

«٣ سم ، ٦ سم ، ٧,٥ سم»

---

١١ أبح مثلث ، ء $\in \overline{\text{أب}}$ بحيث $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{3}{5}$ ، هـ $\in \overrightarrow{\text{بأ}}$ وتقع خارج المثلث بحيث أهـ = $\frac{1}{2}$ أب

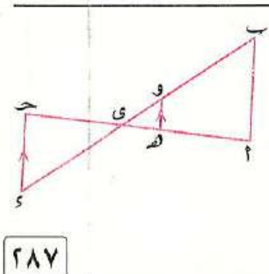
، رسم $\overleftrightarrow{\text{ءس}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـص}}$ يوازيان $\overline{\text{بح}}$ ويقطعان $\overleftrightarrow{\text{أح}}$ فى س ، ص على الترتيب فإذا كان : أص = ١٤ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{\text{أس}}$ ، $\overline{\text{أح}}$

«١٠,٥ سم ، ٢٨ سم»

---

١٢ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{حء}}$ ، $\frac{\text{أى}}{\text{ى ح}} = \frac{\text{ءى}}{\text{ى و}}$

أثبت أن : $(\text{ى ح})^2$ = ى أ × ى هـ

١٣ ر ٢ ط ب شبه منحرف فيه : $\overline{ر٢} // \overline{ب ط}$ ، م منتصف $\overline{ر ب}$ ، رسم مستقيم يمر بالنقطة م ، يوازى $\overline{ب ط}$ ويقطع القطر $\overline{٢ب}$ في ن ، ويقطع القطر $\overline{ر ط}$ في هـ ، والضلع $\overline{٢ط}$ في ى

(١) بيِّن أن النقط ن ، هـ ، ى منتصفات القطع المستقيمة $\overline{٢ب}$ ، $\overline{ر ط}$ ، $\overline{٢ط}$

(٢) أثبت أن : م ى $= \frac{١}{٢}$ (ر ٢ + ب ط)

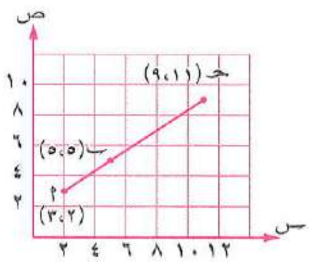
---

١٤ ٢ ب حـ ء شكل رباعى فيه : $\overline{٢ب} // \overline{حـ ء}$ ، تقاطع قطراه في م ، نصفت $\overline{ب حـ}$ في هـ ، ورسم $\overleftrightarrow{هـ و} // \overline{ب ٢}$ ، ويقطع $\overline{ب ء}$ في س ، $\overline{٢ حـ}$ في ص ، $\overline{٢ء}$ في و

أثبت أن : (١) هـ ص $= \frac{١}{٢}$ ٢ ب (٢) $\frac{٢ ص}{حـ م} = \frac{ب س}{ء م}$

---

١٥ تفكير ناقد :



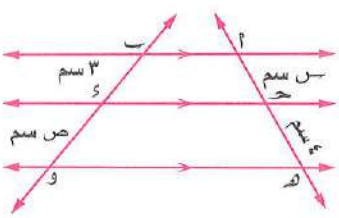
أوجد من الشكل $\frac{٢ب}{ب حـ}$ بعدة طرق مختلفة ، كلما أمكنك ذلك.

هل حصلت على نفس الناتج ؟

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

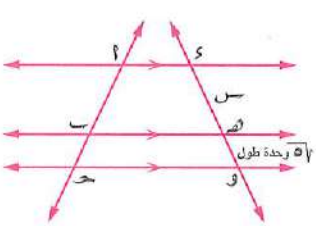


إذا كان : س^٢ + ص^٢ = ٥٧

فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١٢

(٢) في الشكل المقابل :



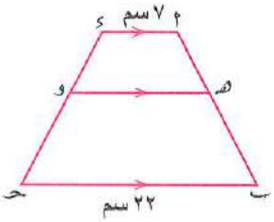
٢ (٠ ، ٦) ، ب (-٢ ، ٢) ، حـ (-٣ ، ٠)

، $\overleftrightarrow{٢ء} // \overleftrightarrow{ب هـ} // \overleftrightarrow{حـ و}$ ، هـ و $= \sqrt{٥}$ وحدة طول

فإن : س = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٥}$ (ب) ٢ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٣ $\sqrt{٥}$ (د) ٤ $\sqrt{٥}$

(٣) في الشكل المقابل :

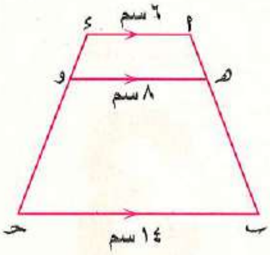


إذا كان : $\frac{٢ هـ}{هـ ب} = \frac{٢}{٣}$ فإن : هـ و = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١١

(جـ) ١٣ (د) ١٥

(٤) فى الشكل المقابل :



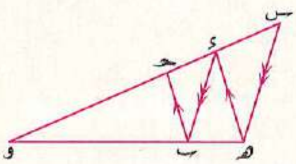
$\frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٧}$

(جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{١}{٣}$

---

٢ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{هـء}} \,//\, \overline{\text{بحـ}}$ ، $\overline{\text{ءب}} \,//\, \overline{\text{هـس}}$

أثبت أن : $\left(\frac{\text{وب}}{\text{وهـ}}\right)^{٢} = \frac{\text{وحـ}}{\text{وس}}$

---

٣ أ ب حـ ء متوازى أضلاع ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ فقطع $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{أب}}$ فى س ، هـ على الترتيب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ فقطع $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{بحـ}}$ فى ص ، و على الترتيب فإذا كان : أ س = حـ ص

فأثبت أن : $\overline{\text{هـو}} \,//\, \overline{\text{س ص}}$

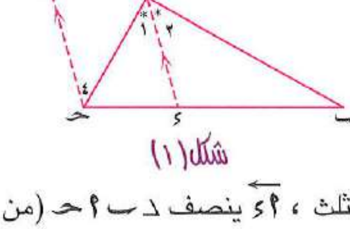
الدرس

3

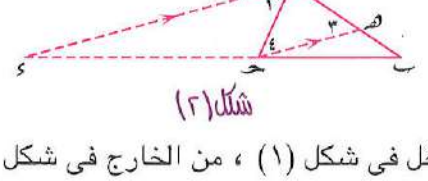
منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

نظرية ٣

إذا نُصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوى النسبة بين طولى الضلعين الآخرين.



شكل (١)



شكل (٢)

◂ المعطيات أ ب جـ مثلث ، أ د ينصف ∠ ب أ جـ (من الداخل فى شكل (١) ، من الخارج فى شكل (٢))

◂ المطلوب إثبات أن : $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

◂ العمل ارسم جـ هـ // أ د ويقطع ب أ فى هـ

◂ البرهان

∵ أ د ينصف ∠ ب أ جـ ∴ ∠ ١ ≡ ∠ ٢

، ∵ جـ هـ // أ د ∴ ∠ ١ ≡ ∠ ٤ (بالتبادل)

، ∠ ٣ ≡ ∠ ٢ (بالتناظر)

، ∵ ∠ ١ ≡ ∠ ٢ ∴ ∠ ٣ ≡ ∠ ٤

∴ أ هـ ≡ أ جـ (١)

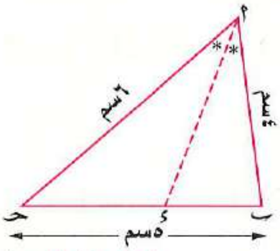
، ∵ جـ هـ // أ د ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ (وهو المطلوب)

مثال ١

أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ هى على الترتيب ٤ ، ٥ ، ٦ من السنتيمترات ، نصفت زاوية أ بمنصف قطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء **أوجد :** طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$

الحل



∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء جـ}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{٥ - \text{ب ء}} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣ ب ء = ١٠ − ٢ ب ء ∴ ٥ ب ء = ١٠

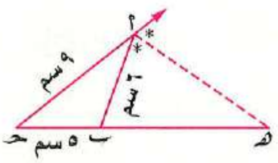
∴ ب ء = ٢ سم ، ء جـ = ٥ − ٢ = ٣ سم

(وهو المطلوب)

مثال ٢

أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ هى على الترتيب ٦ ، ٥ ، ٩ من السنتيمترات ، نصفت الزاوية الخارجة للمثلث عند أ بمنصف قطع $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ فى هـ **أوجد :** طول كل من $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$

الحل



∵ أ ب < أ جـ ، $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ

∴ هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{٥ + \text{ب هـ}} = \frac{٢}{٣}$

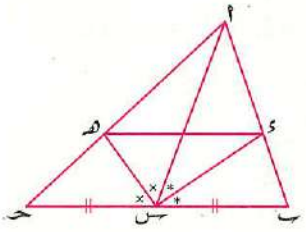
∴ ٣ ب هـ = ١٠ + ٢ ب هـ ∴ ب هـ = ١٠ سم ، هـ جـ = ١٠ + ٥ = ١٥ سم (وهو المطلوب)

مثال ٣

أ ب جـ مثلث ، س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، نصفت ∠ أ س ب بمنصف قطع $\overline{\text{أب}}$ فى ء

، نصفت ∠ أ س جـ بمنصف قطع $\overline{\text{أجـ}}$ فى هـ **أثبت أن :** $\overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{ب جـ}}$

الحل



فى Δ أ س ب : ∵ $\overleftrightarrow{\text{س ء}}$ ينصف ∠ أ س ب

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أس}}{\text{س ب}}$ (١)

، فى Δ أ س جـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{س هـ}}$ ينصف ∠ أ س جـ

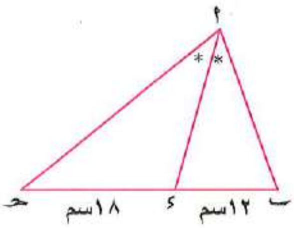
∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{\text{أس}}{\text{س جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) وملاحظة أن : س ب = س جـ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ فى Δ أ ب جـ : $\overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{ب جـ}}$

(وهو المطلوب)

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى ء

بحيث : ب ء = ١٢ سم ، ء حـ = ١٨ سم فإذا كان محيط △ أ ب حـ = ٨٠ سم

فأوجد : طول كل من $\overline{أ حـ}$ ، $\overline{أ ب}$

الحـل

فى △ أ ب حـ : ∵ $\overleftrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ

$\therefore \frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{١٢}{١٨} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ محيط △ أ ب حـ = ٨٠ سم ، ب حـ = ١٢ + ١٨ = ٣٠ سم

∴ أ ب + أ حـ = ٨٠ − ٣٠ = ٥٠ سم

، ∵ $\frac{أ ب}{أ حـ} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{أ ب + أ حـ}{أ حـ} = \frac{٢ + ٣}{٣}$ (من خواص التناسب)

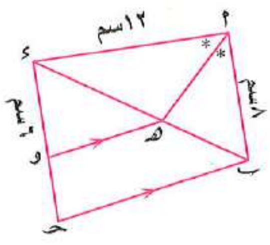
$\therefore \frac{٥٠}{أ حـ} = \frac{٥}{٣}$

$\therefore$ أ حـ $= \frac{٣ \times ٥٠}{٥} =$ ٣٠ سم

∴ أ ب = ٥٠ − ٣٠ = ٢٠ سم

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك



فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٨ سم ، أ ء = ١٢ سم

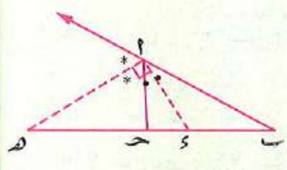
، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب ء}$ فى هـ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overline{ب حـ}$

ويقطع $\overline{ء حـ}$ فى و ، فإذا كان ء و = ٦ سم

أوجد : طول $\overline{ء حـ}$

ملاحظات هامة

١ المنصفان الداخلى والخارجى لأى زاوية من زوايا المثلث يكونان متعامدين



ففى الشكل المقابل : إذا كان : $\overleftrightarrow{أ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ هما المنصفان

للزاوية أ والزاوية الخارجة للمثلث عند أ على الترتيب فإن :

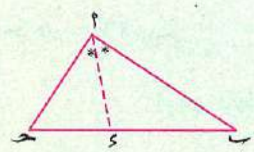
$\frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$ ، $\frac{ب هـ}{هـ حـ} = \frac{أ ب}{أ حـ}$ $\therefore \frac{ب ء}{ء حـ} = \frac{ب هـ}{هـ حـ}$

∴ القاعدة $\overline{ب حـ}$ تنقسم من الداخل فى ء

ومن الخارج فى هـ بنفس النسبة (أ ب : أ حـ)

ويلاحظ أن المنصفين $\overleftrightarrow{أ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أ هـ}$ متعامدان **أى أن** ق (∠ ء أ هـ) = ٩٠°

٢ إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ ح ويقطع $\overline{\text{ب ح}}$ فى ء فإن ء تأخذ أحد الأوضاع الآتية :

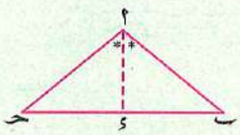


إذا كان : أ ب > أ ح

فإن : ب ء > ء ح

أى أن

ء أقرب إلى ح منها إلى ب

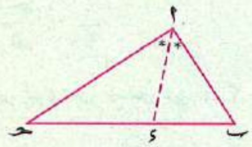


إذا كان : أ ب = أ ح

فإن : ب ء = ء ح

أى أن

ء على بعدين متساويين من ب ، ح



إذا كان : أ ب < أ ح

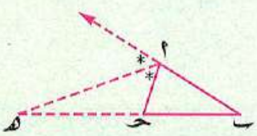
فإن : ب ء < ء ح

أى أن

ء أقرب إلى ب منها إلى ح

٣ إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث أ ب ح عند أ حيث هـ $\notin \overline{\text{ب ح}}$

فإن هـ تأخذ أحد الأوضاع الآتية :

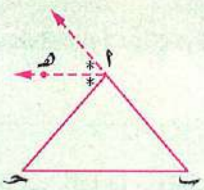


إذا كان : أ ب > أ ح

فإن : ب هـ > هـ ح

أى أن

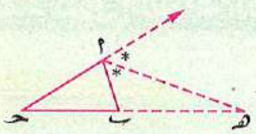
هـ $\in \overrightarrow{\text{ب ح}}$



إذا كان : أ ب = أ ح

فإن : $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$

أى أن المنصف الخارجى لزاوية رأس المثلث متساوى الساقين يوازى القاعدة



إذا كان : أ ب < أ ح

فإن : ب هـ < هـ ح

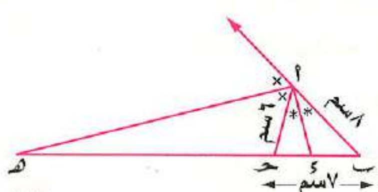
أى أن

هـ $\in \overrightarrow{\text{ح ب}}$

مثال ٥

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ ح = ٦ سم ، ب ح = ٧ سم ، رُسم $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب ح}}$ فى ء ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ فى هـ **أوجد :** طول $\overline{\text{ء هـ}}$

الحل



(١)

فى Δ أ ب ح :

∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ ، $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ أ الخارجة

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ح هـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ح}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ح}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب ء} + \text{ء ح}}{\text{ء ح}} = \frac{٤ + ٣}{٣}$ (من خواص التناسب)

∴ $\frac{\text{ب ح}}{\text{ء ح}} = \frac{٧}{٣}$ ∴ $\frac{٧}{\text{ء ح}} = \frac{٧}{٣}$ ∴ ء ح = ٣ سم

ومن (١) : ∵ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\frac{\text{ب هـ} - \text{هـ حـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{٤ - ٣}{٣}$ (من خواص التناسب)

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{٧}{\text{حـ هـ}} = \frac{١}{٣}$ ∴ حـ هـ = ٢١ سم

∴ ء هـ = ء حـ + حـ هـ = ٣ + ٢١ = ٢٤ سم (وهو المطلوب)

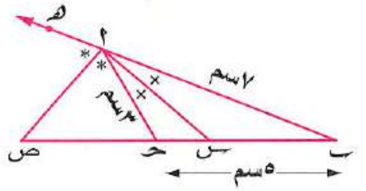
حاول بنفسك

في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ص}}$ ينصف ∠ حـ أ هـ

، أ ب = ٧ سم ، أ حـ = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم

أوجد : طول $\overline{\text{س ص}}$

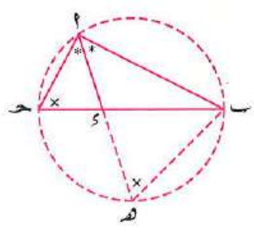


إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث

تمرين مشهور

إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ في Δ أ ب حـ من الداخل ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ في ء

فإن : أ ء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$



◂ المعطيات أ ب حـ مثلث ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ من الداخل

، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}} \cap \overline{\text{ب حـ}} = \{\text{ء}\}$

◂ المطلوب إثبات أن : أ ء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$

◂ العمل ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث أ ب حـ وتقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ في هـ ، ارسم $\overline{\text{ب هـ}}$

◂ البرهان ∵ ق (∠ حـ أ ء) = ق (∠ هـ أ ب) (معطى)

، ق (∠ هـ) = ق (∠ حـ) (محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

∴ Δ أ حـ ء ~ Δ أ هـ ب وينتج أن : $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$

∴ أ ء × أ هـ = أ ب × أ حـ

∴ أ ء × (أ ء + ء هـ) = أ ب × أ حـ

∴ $(\text{أ ء})^2$ = أ ب × أ حـ − أ ء × ء هـ

∴ $(\text{أ ء})^2$ = أ ب × أ حـ − ب ء × ء حـ

أي أن أ ء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ حـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$ (وهو المطلوب)

! تذكر أن

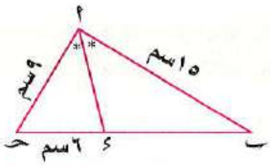
أ ء × ء هـ = ب ء × ء حـ

مثال ٦

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ١٥ سم ، أ ح = ٩ سم ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ ح ويقطع $\overline{\text{ب ح}}$ فى ء

فإذا كان : ء ح = ٦ سم **أوجد** : طول $\overline{\text{أء}}$

الحل



∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ ح ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

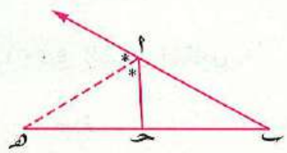
∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{٦}} = \frac{\text{١٥}}{\text{٩}}$ ∴ ب ء = $\frac{\text{١٥} \times \text{٦}}{\text{٩}}$ = ١٠ سم

∴ أ ء = $\sqrt{\text{أ ب} \times \text{أ ح} - \text{ب ء} \times \text{ء ح}} = \sqrt{\text{١٥} \times \text{٩} - \text{١٠} \times \text{٦}} = \sqrt{\text{٧٥}} = \text{٥}\sqrt{\text{٣}}$ سم

(وهو المطلوب)

ملاحظة

فى الشكل المقابل :

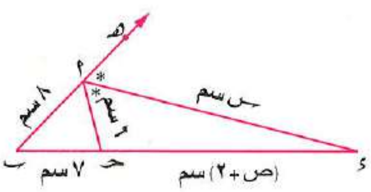


إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ ب أ ح من الخارج ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ فى هـ

فإن : أ هـ = $\sqrt{\text{ب هـ} \times \text{هـ ح} - \text{أ ب} \times \text{أ ح}}$

مثال ٧

فى الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، ب ح = ٧ سم ، أ ح = ٦ سم

، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ الخارجة **أوجد** : قيمة كل من س ، ص

الحل

∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ الخارجة ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ح ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \frac{\text{٨}}{\text{٦}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$

∴ $\frac{\text{٧ + ص + ٢}}{\text{ص + ٢}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ ∴ $\frac{\text{ص + ٩}}{\text{ص + ٢}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ ∴ ٣ ص + ٢٧ = ٤ ص + ٨

∴ ص = ١٩ ∴ ء ح = ٢١ سم ، ب ء = ٢٨ سم

، ∵ أ ء = $\sqrt{\text{ب ء} \times \text{ح ء} - \text{أ ب} \times \text{أ ح}} = \sqrt{\text{٢٨} \times \text{٢١} - \text{٨} \times \text{٦}} = \sqrt{\text{٥٤٠}} = \text{٦}\sqrt{\text{١٥}}$ سم

∴ س = $\text{٦}\sqrt{\text{١٥}}$

(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٢٧ سم ، أ ح = ١٥ سم ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{\text{ب ح}}$ فى ء

فإذا كان : ب ء = ١٨ سم **فأوجد** : طول $\overline{\text{أء}}$

تمارين 7

على منصفي الزاوية والأجزاء المتناسبة

اختبر نفسك

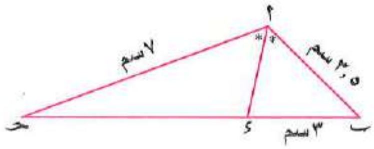
من أسئلة الكتاب المدرسي

● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

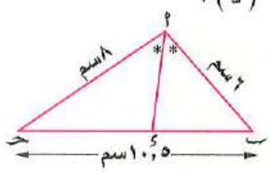
(١) في الشكل المقابل :



حـ ء = ... سم

(أ) ٤,٥ (ب) ٥ (جـ) ٤,٩ (د) ٦

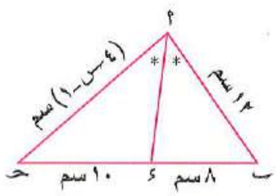
(٢) في الشكل المقابل :



ب ء = ... سم

(أ) ٤ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٤,٥ (د) ٤٥

(٣) في الشكل المقابل :

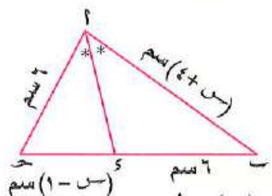


س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣

(جـ) ٤,٥ (د) ٦

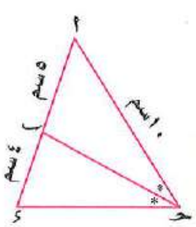
(٤) في الشكل المقابل :



س = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٥) في الشكل المقابل :

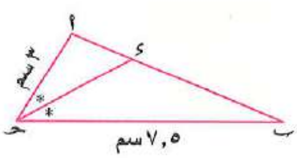


حـ ب = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$

(جـ) ٢ $\sqrt{١٥}$ (د) ٦

(٦) في الشكل المقابل :

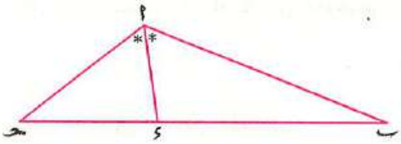


إذا كان : $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ حـ ، أ حـ = ٣ سم

، ب حـ = ٧,٥ سم فإن أ ء : ب ء = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) ٢ : ٥ (د) ٥ : ٢

(٧) فى الشكل المقابل :

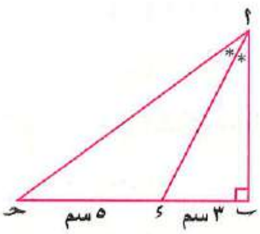


إذا كان أب : أحـ : ب حـ = ٥ : ٣ : ٧

فإن ب ء : ء حـ = ...

(أ) $\frac{٥}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٧}$

(٨) فى الشكل المقابل :

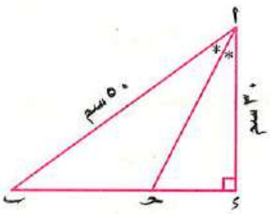


أب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٧

(٩) فى الشكل المقابل :

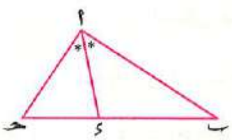


محيط △ أب حـ ≃ .... سم

(أ) ١٢٣,٥ (ب) ٣٧٥

(جـ) ٩٨,٥ (د) ١٠٨,٥

(١٠) 📖 فى الشكل المقابل :

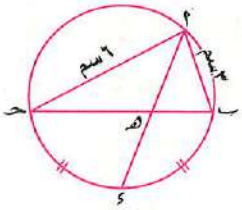


إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ فإن : أب × حـ ء = ...

(أ) أحـ × ب ء (ب) $(\text{أء})^2$

(جـ) أء × ب ء (د) أحـ × أب

(١١) فى الشكل المقابل :

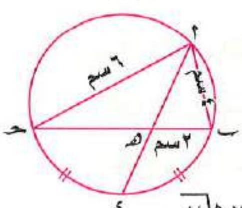


$\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢

(جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(١٢) فى الشكل المقابل :



طول $\overline{\text{ءهـ}}$ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) ٣ $\sqrt{٢}$

(١٣) المنصف الخارجى لزاوية رأس المثلث متساوى الساقين .... القاعدة.

(أ) ينصف (ب) عموديًا على (جـ) يقطع (د) يوازى

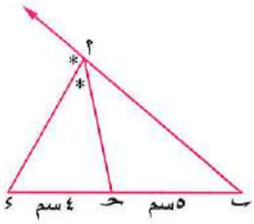
(١٤) منصف الزاوية الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع .... الضلع المقابل لرأس هذه الزاوية.

(أ) ينصف (ب) ينطبق على (جـ) يوازى (د) يكون عموديًا على

(١٥) قياس الزاوية بين المنصف الداخلى والمنصف الخارجى لزاوية رأس مثلث يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٨٠°

(١٦) فى الشكل المقابل :

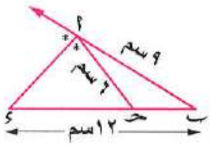


أب : أحـ = ...

(أ) ٥ : ٤ (ب) ٥ : ٩

(جـ) ٩ : ٥ (د) ٩ : ٤

(١٧) فى الشكل المقابل :

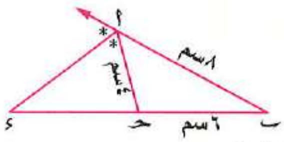


حـء = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ٤,٨ (د) ٥

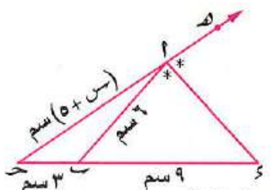
(١٨) فى الشكل المقابل :



حـء = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

(١٩) فى الشكل المقابل :

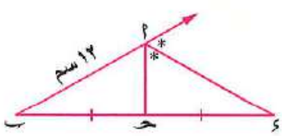


$\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ هـ ، أحـ = (س + ٥) سم ، أب = ٦ سم

، ب حـ = ٣ سم ، ب ء = ٩ سم فإن : س = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٦

(٢٠) فى الشكل المقابل :

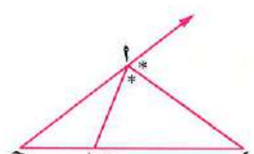


أحـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٨

(٢١) فى الشكل المقابل :

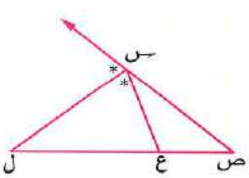


إذا كان أب : أحـ = ٢ : ٣

فإن ب ء : ب حـ = ...

(أ) ٢ : ١ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢٢) فى الشكل المقابل :

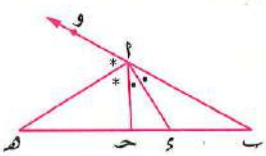


إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{س ل}}$ ينصف ∠ س الخارجة فإن : $\frac{\text{ص ل}}{\text{ص س}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ص ع}}{\text{ع ل}}$ (ب) $\frac{\text{ص ل}}{\text{ل ع}}$

(جـ) $\frac{\text{ل ع}}{\text{ع س}}$ (د) $\frac{\text{س ع}}{\text{س ص}}$

(٢٣) **مستعينًا بالشكل المقابل :**

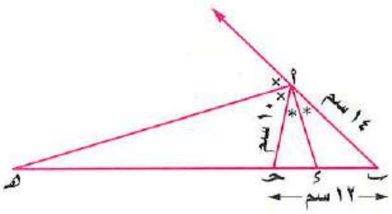


جميع العبارات التالية صحيحة عدا ....

(أ) بـ أ / أ حـ = بـ ء / ء حـ (ب) بـ أ / أ حـ = بـ هـ / هـ حـ

(جـ) حـ أ / أ بـ = ء أ / أ هـ (د) ∠ ء أ هـ قائمة.

(٢٤) **فى الشكل المقابل :**

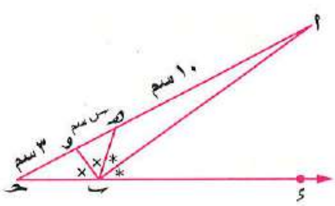


ء هـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٢٤

(جـ) ٣٠ (د) ٣٥

(٢٥) **فى الشكل المقابل :**

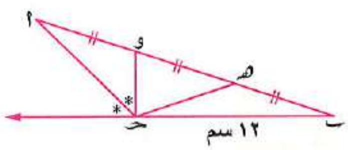


س = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

(٢٦) **فى الشكل المقابل :**

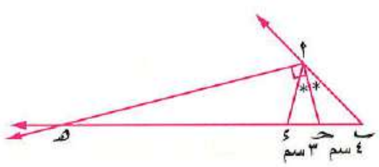


حـ و = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(٢٧) **فى الشكل المقابل :**



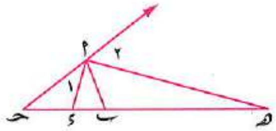
$\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ منصف للزاوية الداخلة للمثلث أ بـ ء عند ∠ أ

، $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ، بـ حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٣ سم

فإن : بـ هـ : هـ ء = ...

(أ) ٧ : ٤ (ب) ٧ : ٣ (جـ) ٣ : ٤ (د) ٤ : ٣

(٢٨) **فى الشكل المقابل :**



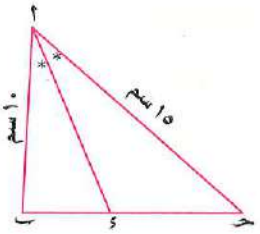
△ أ بـ حـ فيه $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ المنصفان الداخلى والخارجى

للزاوية عند الرأس أ على الترتيب، ق (∠ ١) = ٣٦°

فإن : ق (∠ ٢) = ...°

(أ) ٣٦ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٤ (د) ١٠٨

(٢٩) فى الشكل المقابل :



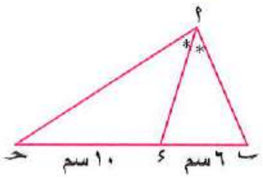
إذا كان : م (Δ أ ب حـ) = ٧٥ سم^{٢}

فإن : م (Δ أ ء ب) = ... سم^{٢}

(أ) ٣٠ (ب) $٢٣\frac{١}{١٣}$

(جـ) $٥١\frac{١٢}{١٣}$ (د) ٤٥

(٣٠) فى الشكل المقابل :

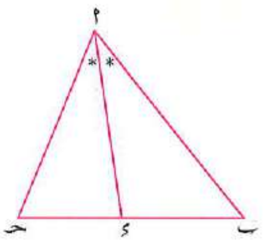


إذا كان : أ حـ − أ ب = ٦ سم

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (جـ) ١٥ (د) ١٦

(٣١) فى الشكل المقابل :



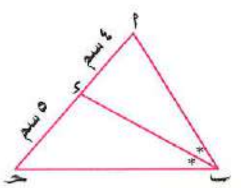
إذا كان : أ ب × أ حـ = ٨ ، ب ء × ء حـ = ٤

وكان : $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

فإن : أ ء = ... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣٢) فى الشكل المقابل :



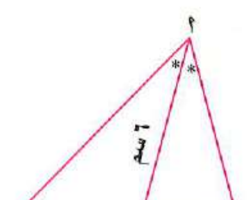
إذا كان : محيط Δ أ ب حـ = ٢٧ سم

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٨ (ب) ١٠

(جـ) ٢$\sqrt{١٥}$ (د) ٣$\sqrt{١٥}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :

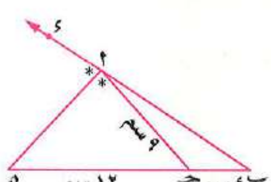


أ حـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٠

(جـ) ٩ (د) ٨

(٣٤) فى الشكل المقابل :

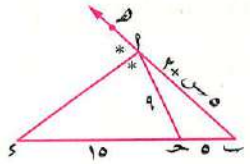


طول $\overline{\text{أ هـ}}$ = ... سم

(أ) ٢$\sqrt{١٥}$ (ب) ٦

(جـ) ١٥ (د) ٢$\sqrt{٢١}$

(٣٥) في الشكل المقابل :

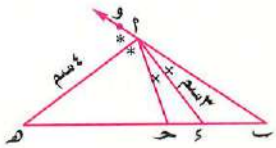


أ ء = ...

(أ) ٢ (ب) ٤

(جـ) ٥√٣ (د) ٨√٣

(٣٦) في الشكل المقابل :



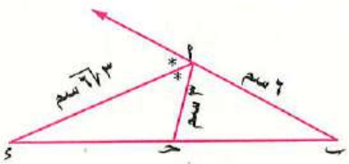
إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ من الداخل ، $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ أ من الخارج

، أ ء = ٣ سم ، أ هـ = ٤ سم

فإن : ء هـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣٧) في الشكل المقابل :

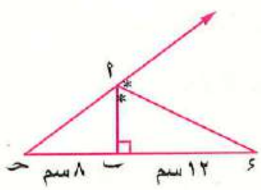


ء حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٦√٣

(جـ) ٣√٦ (د) ٣

(٣٨) في الشكل المقابل :

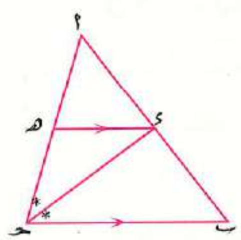


أ ء = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ٤√٥

(جـ) ٦√٥ (د) ٩√٢

(٣٩) في الشكل المقابل :

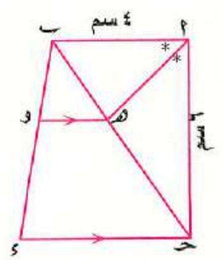


$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}}$ (ب) $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$

(جـ) $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ب}}$ (د) $\frac{\text{أ ب}}{\text{حـ ب}}$

(٤٠) في الشكل المقابل :

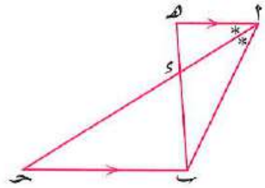


$\frac{\text{هـ و}}{\text{حـ ء}}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٤١) في الشكل المقابل :

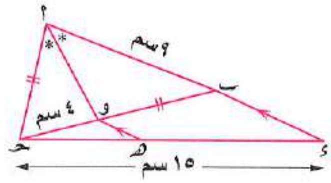


إذا كان : أ حـ = ٣ أ ء

فإن أ ب : أ هـ = ...

(أ) ٣ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٢ : ١

(٤٢) في الشكل المقابل :

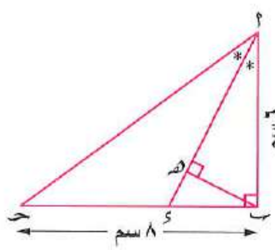


هـ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٢

(٤٣) في الشكل المقابل :

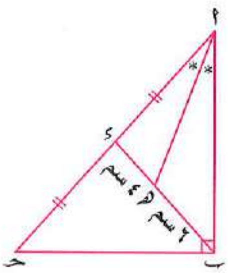


طول $\overline{ءهـ}$ = ... سم

(أ) $\frac{٥}{٣}\sqrt{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}\sqrt{٥}$

(جـ) $\frac{٥}{٣}\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٣}{٥}\sqrt{٣}$

(٤٤) في الشكل المقابل :



ق($\angle$ ب) = ٩٠° ، ء منتصف $\overline{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ينصف $\angle$ ب أ ء

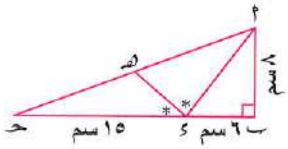
، ب هـ = ٦ سم ، هـ ء = ٤ سم

فإن : طول $\overline{أب}$ = ... سم

(أ) ١٥ (ب) ١٢

(جـ) ١٠ (د) ٨

(٤٥) في الشكل المقابل :

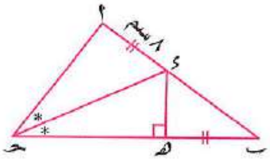


$\overline{أب} \perp \overline{بحـ}$ ، $\overleftarrow{ءهـ}$ ينصف $\angle$ أ ء حـ

فإن مساحة ($\triangle$ أ ء هـ) = ... سم^{٢}

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) ٤٠ (د) ٢٤

(٤٦) في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{حـء}$ ينصف ($\angle$ أ حـ ب) ، أ ء = هـ ب = ٨ سم

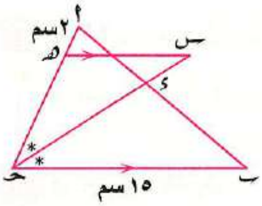
، $\frac{حـب}{أحـ} = \frac{٥}{٤}$

فإن : ء هـ = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ١٢ (د) ١٠

(٤٧) في الشكل المقابل :

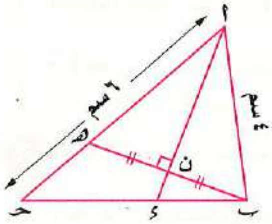


إذا كان : $\overrightarrow{\text{حـ س}}$ ينصف ∠ حـ ، $\overleftrightarrow{\text{س هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء أ}} = \frac{٣}{٢}$ فإن : س هـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٤٨) في الشكل المقابل :



إذا كان : أحـ = ٦ سم ، أب = ٤ سم

فإن : $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}}$ = ...

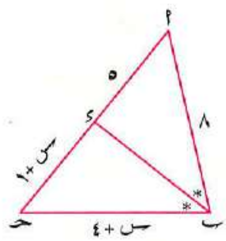
(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$

(جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) $\frac{٥}{٢}$

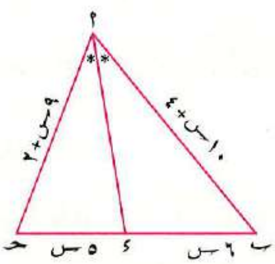
ثانيًا الأسئلة المقالية

١ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) :

(١)

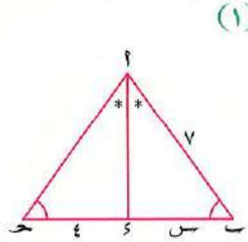


(٢)

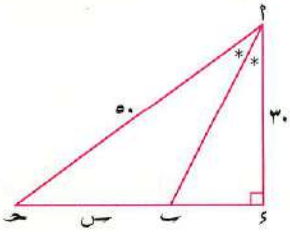


٢ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات) ثم أوجد محيط Δ أ ب حـ :

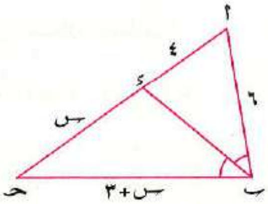
(١)



(٢)

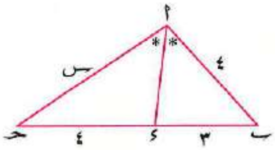


(٣)

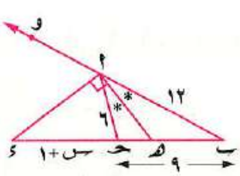


٣ في كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة س وطول $\overline{\text{أ ء}}$:

(١)



(٢)

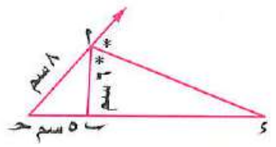


٤ أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ جـ = ٦ سم ، ب جـ = ٧ سم

، رُسم $\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ فى ء **أوجد** : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$ «٤ سم ، ٣ سم»

---

٥ فى الشكل المقابل :



المثلث أ ب جـ فيه : $\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ

، ويقطع $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ فى ء فإذا كان : أ ب = ٦ سم

، أ جـ = ٨ سم ، ب جـ = ٥ سم **أوجد** : طول كل من $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{أء}}$ «١٥ سم ، ٦ √٧ سم»

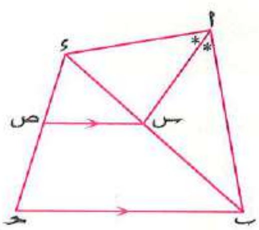
---

٦ أ ب جـ مثلث محيطه ٢٧ سم ، رسم $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ ب ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى ء ، إذا كان أ ء = ٤ سم

، جـ ء = ٥ سم **أوجد** : طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ «٨ سم ، ١٠ سم ، ٢ √١٥ سم»

---

٧ فى الشكل المقابل :



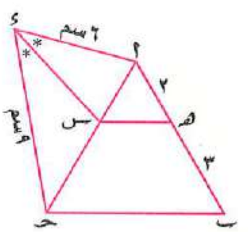
أ ب جـ ء شكل رباعى ، رسم $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ أ

ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ فى س ثم رسم $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

قاطعًا $\overline{\text{جـ ء}}$ فى ص أثبت أن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ص جـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$

---

٨ فى الشكل المقابل :



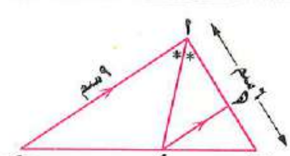
أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : $\overleftarrow{\text{ء س}}$ ينصف ∠ ء

، أ هـ : هـ ب = ٢ : ٣ ، أ ء = ٦ سم ، ء جـ = ٩ سم

أثبت أن : $\overline{\text{هـ س}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

---

٩ فى الشكل المقابل :



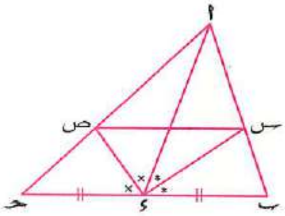
$\overleftarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، $\overline{\text{هـ ء}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$

أثبت أن : $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ وإذا كان : أ جـ = ٩ سم ، أ ب = ٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ «٣,٦ سم ، ٢,٤ سم»

---

١٠ فى الشكل المقابل :

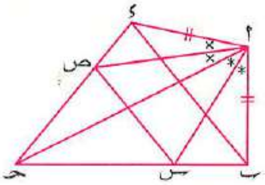


$\overline{\text{أء}}$ متوسط فى Δ أ ب جـ ، $\overleftarrow{\text{ء س}}$ ينصف ∠ أ ء ب

، $\overleftarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ أ ء جـ

أثبت أن : $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

١١ في الشكل المقابل :



أ ب ح ء شكل رباعي فيه : أ ب = أ ء

، أ س ينصف ∠ ب أ ح ويقطع ب ح في س

، أ ص ينصف ∠ ء أ ح ويقطع ح ء في ص **أثبت أن :** س ص // ب ء

---

١٢ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب ، رسم أ ء ينصف ∠ أ ويقطع ب ح في ء ، إذا كان طول

ب ء = ٢٤ سم ، ب أ : أ ح = ٣ : ٥ **فأوجد :** محيط Δ أ ب ح «١٩٢ سم»

---

١٣ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ ح = ٤ سم ، ب ح = ٦ سم ، رسم أ ء ينصف ∠ أ

ويقطع ب ح في ء ، ورسم أ هـ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع ب ح في هـ

أوجد : طول كل من ء هـ ، أ ء ، أ هـ «٨ سم ، ٢ $\sqrt{٦}$ سم ، ٢ $\sqrt{١٠}$ سم»

---

١٤ أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٣ سم ، ب ح = ٧ سم ، ح أ = ٦ سم ، رسم أ ء ينصف ∠ أ

ويقطع ب ح في ء ، ورسم أ هـ ينصف ∠ أ الخارجة ويقطع ح ب في هـ

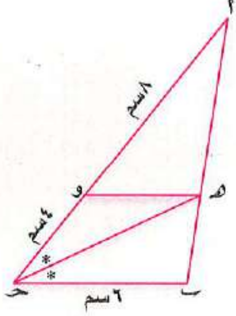
(١) **أثبت أن :** أ ب متوسط في المثلث أ ح هـ

(٢) أوجد النسبة بين مساحة المثلث أ ء هـ ومساحة المثلث أ ح هـ «$\frac{٢}{٣}$»

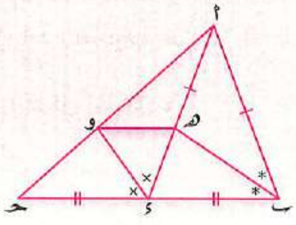
---

١٥ في كل من الشكلين التاليين أثبت أن : هـ و // ب ح

(١)



(٢)



---

١٦ أ ب ح ء متوازي أضلاع ، س ∈ أ ء ، رسم ح س فقطع ب أ في ص ، ونُصفت ∠ ء ح س

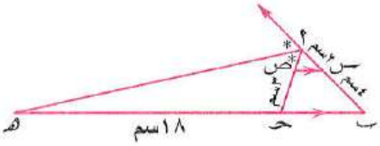
بالمنصف ح ع فقطع أ ء في ع **أثبت أن :** $\frac{\text{أ ص}}{\text{ص س}} = \frac{\text{ء ع}}{\text{ع س}}$

---

١٧ أ ب ح مثلث ، أ ء ينصف ∠ ب أ ح ويقطع ب ح في ء ، نصفت الزاويتان ب أ ء ، ح أ ء

بالمنصفين أ هـ ، أ و يقطعان ب ح في هـ ، و على الترتيب. **أثبت أن :** $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} \times \frac{\text{ء و}}{\text{و ح}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}}$

١٨ في الشكل المقابل :



$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، أ س = ٢ سم

، س ب = ٤ سم ، ص حـ = ٣ سم **أوجد :** طول $\overline{\text{أ ص}}$

، إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ ويقطع $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ في هـ

حيث حـ هـ = ١٨ سم **أوجد :** طول $\overline{\text{ب حـ}}$ «١,٥ سم ، ٦ سم»

---

١٩ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ب ء ، أ ء = ء حـ ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ في هـ

، $\overrightarrow{\text{ء و}}$ ينصف ∠ ب ء حـ ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ في و **أثبت أن :** $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$

---

٢٠ أ ب حـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، رسم $\overrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ ء ويقطع $\overline{\text{ب ء}}$ في س

، $\overrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ أ ء حـ ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في ص **أثبت أن :** $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$

---

٢١ $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في دائرة ، ء ∈ $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ الأكبر بحيث $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}} = \frac{2}{3}$ ، هـ منتصف $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ الأصغر

، رسمت $\overline{\text{ء هـ}}$ فقطعت $\overline{\text{أ ب}}$ في حـ **أوجد :** النسبة بين م (△ أ ء هـ) ، م (△ ب ء هـ) «$\frac{2}{3}$»

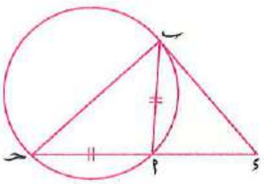
---

٢٢ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، حـ تنتمي إلى الدائرة ، رسم مماس للدائرة عند حـ فقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في هـ

وقطع المماس لها عند أ في ء **أثبت أن :** $\frac{\text{أ م}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{ء هـ}}$

---

٢٣ في الشكل المقابل :



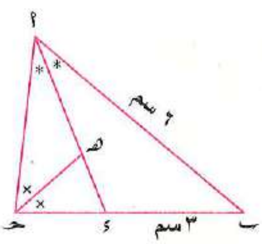
أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{ب ء}}$ مماسة للدائرة عند ب

أثبت أن : ء ب × ب أ = ء أ × ب حـ

ثالثاً مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

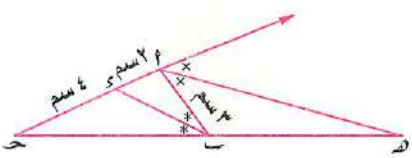


$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} =$ ....

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) $\frac{2}{3}$

(٢) في الشكل المقابل :

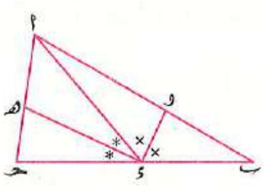


ب هـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٨

(جـ) ٩ (د) ١٠

(٣) **في الشكل المقابل :**

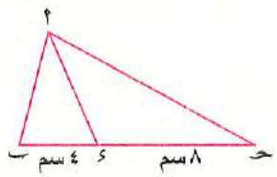


إذا كان : ٣ أ هـ = ٤ هـ جـ ، ٢ أ و = ٣ و ب ، ب جـ = ١٧ سم

فإن : ء جـ = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٤) **في الشكل المقابل :**

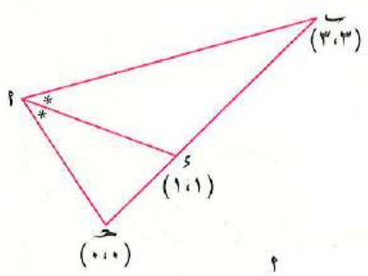


إذا كان : ق (∠ب) = ٢ ق (∠ء أ ب) = ٢ ق (∠ء أ جـ)

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٥) **في الشكل المقابل :**

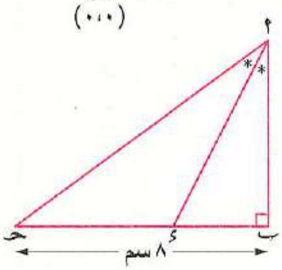


$\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٦) **في الشكل المقابل :**



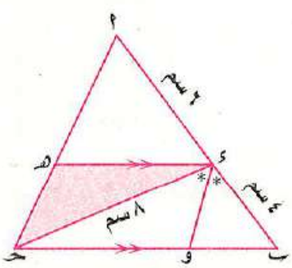
إذا كانت : $\frac{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ب ء})}{\text{مساحة } (\Delta \text{ أ ء جـ})} = \frac{٣}{٥}$

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٠

(٧) **في الشكل المقابل :**



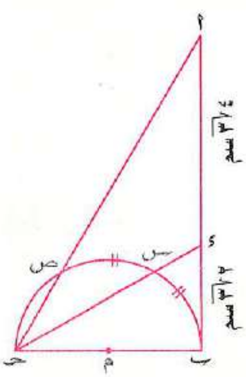
إذا كانت : مساحة (Δ ء ب و) = ١٠ سم^٢

فإن : مساحة (Δ ء هـ جـ) = ... سم^٢

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٤

(٨) **في الشكل المقابل :**



$\overleftarrow{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة م عند ب ، ق (ب س⌢) = ق (س ص⌢)

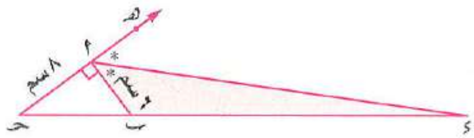
، ب ء = ٢ √٣ سم ، أ ء = ٤ √٣ سم

فإن : أ ص = ... سم

(أ) ٤ √٣ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٢

(٩) في الشكل المقابل :

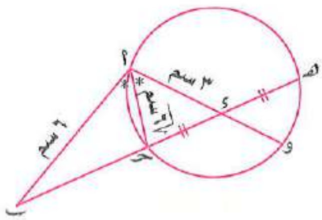


مساحة Δ أ ب ء = ... سم^{٢}

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨

(جـ) ٥٤ (د) ٧٢

(١٠) في الشكل المقابل :

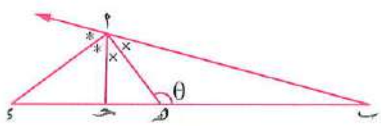


$\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء ، ء منتصف $\overline{\text{هـ حـ}}$ ، أحـ = $\sqrt{٦}$ سم

، أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٦ سم فإن : ء و = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٣,٥ (د) ٤

(١١) في الشكل المقابل :

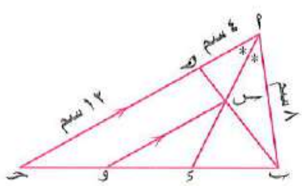


إذا كان : أ ء = ٨ سم ، أ هـ = ٦ سم

فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٢) في الشكل المقابل :

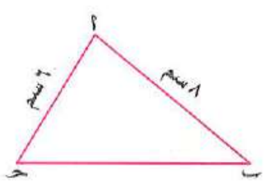


$\frac{\text{ء و}}{\text{ب حـ}}$ = ...

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$

(جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{١}{٣}$

(١٣) في الشكل المقابل :



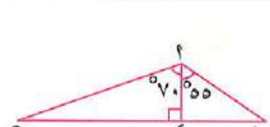
إذا كان : ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ب)

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٣ $\sqrt{١٠}$ (ب) ٢ $\sqrt{٢١}$ (جـ) ١٢ (د) ١٠

---

٢ في الشكل المقابل :



إذا كان : أ حـ × ب ء = ٣٦ سم^{٢}

أوجد : مساحة (Δ أ ب حـ)

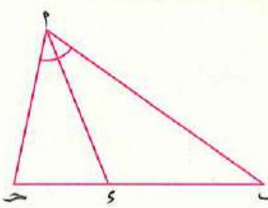
«١٨ سم^{٢}»

الدرس

4

تابع منصفى الزاوية والأجزاء المتناسبة «عكس نظرية ③»

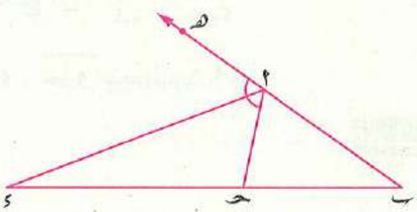
عكس نظرية ٣



إذا كانت : ء ∈ $\overline{\text{ب ح}}$

بحيث : $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ ح



إذا كانت : ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ ، ء ∉ $\overline{\text{ب ح}}$

بحيث : $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ أ الخارجة عن Δ أ ب ح

مثال ١

في الشكل المقابل :

أ ب ح ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٧,٥ سم ، ب ح = ٥ سم

، ح ء = ٤ سم ، أ ء = ٦ سم ، $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ينصف ∠ أ ء ح ويقطع $\overline{\text{أ ح}}$ في هـ

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب ح

الحل

في Δ أ ء ح : ∵ $\overrightarrow{\text{ء هـ}}$ ينصف ∠ أ ء ح ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ح}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء ح}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}} = \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ح}}$

∴ في Δ أ ب ح : $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب ح

(وهو المطلوب)

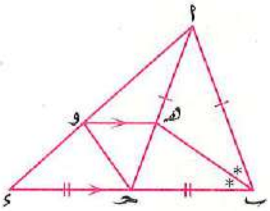
مثال ٢

أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه : أ ب = أ حـ ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ بحيث ب حـ = حـ ء

، نصفت ∠ أ ب حـ بمنصف قطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في هـ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ء}}$ في و

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{حـ و}}$ ينصف ∠ أ حـ ء

الحل



في Δ أ ب حـ :

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب حـ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

لكن : أ ب = أ حـ ، ب حـ = حـ ء (معطى)

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}}$ (١)

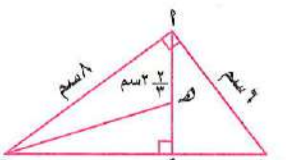
، في Δ أ حـ ء : ∵ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و ء}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{\text{أ و}}{\text{و ء}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}}$

∴ في Δ أ حـ ء : $\overleftrightarrow{\text{حـ و}}$ ينصف ∠ أ حـ ء (وهو المطلوب)

مثال ٣

في الشكل المقابل :



المثلث أ ب حـ قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

، أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٨ سم ، أ هـ = $٢\frac{٢}{٣}$ سم

أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ أ حـ ء

الحل

∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في أ ∴ $(\text{ب حـ})^٢ = (\text{أ ب})^٢ + (\text{أ حـ})^٢ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠$

∴ ب حـ = ١٠ سم ، ∵ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ∴ Δ ء أ حـ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{ء حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ب حـ}}$ ∴ $\frac{\text{ء حـ}}{٨} = \frac{٨}{١٠}$ ∴ ء حـ = ٦,٤ سم

، ∵ Δ ء ب أ ~ Δ أ ب حـ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}}$ ∴ $\frac{٦}{١٠} = \frac{\text{أ ء}}{٨}$

∴ أ ء = ٤,٨ سم ∴ ء هـ = ٤,٨ − $٢\frac{٢}{٣}$ = $٢\frac{٢}{١٥}$ سم

، ∵ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}} = \frac{٨}{٦,٤} = \frac{٥}{٤}$ ، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{٢\frac{٢}{٣}}{٢\frac{٢}{١٥}} = \frac{٥}{٤}$

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ أ حـ ء (وهو المطلوب)

حاول بنفسك

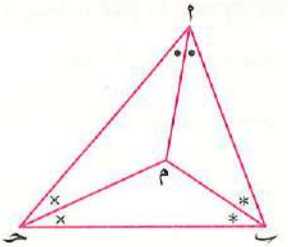
أ ب جـ د شكل رباعى فيه : أ ب = ٢٠ سم ، أ د = ٦ سم ، د جـ = ٩ سم ، هـ $\in$ $\overline{\text{أ ب}}$

بحيث أ هـ = ٨ سم ، رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى س

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{د س}}$ ينصف ∠ أ د جـ

حقيقة

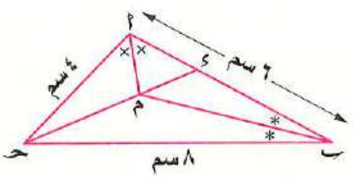
منصفات زوايا المثلث تتقاطع فى نقطة واحدة.



ففى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{\text{أ م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب م}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ منصفات زوايا Δ أ ب جـ تتقاطع فى نقطة م

مثال ٤



فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٤ سم ، ب جـ = ٨ سم

، $\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ ، $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

أوجد : طول $\overline{\text{أ د}}$

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، $\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

∴ م هى نقطة تلاقى منصفات زوايا Δ أ ب جـ

∴ $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ أ جـ ب

∴ فى Δ أ ب جـ : $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

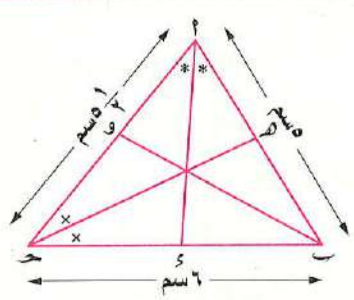
∴ $\frac{\text{أ د}}{\text{٦ − أ د}} = \frac{١}{٢}$

∴ ٢ أ د = ٦ − أ د

∴ ٣ أ د = ٦

∴ أ د = ٢ سم (وهو المطلوب)

حاول بنفسك



فى الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، أ جـ = $٥\frac{١}{٢}$ سم

، ب جـ = ٦ سم ، $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

، $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ أ جـ ب

أوجد : طول $\overline{\text{أ و}}$

تمـارين 8 على عكس نظرية ③

من أسئلة الكتاب المدرسى ● تذكر ● فهم ○ تطبيق ● مستويات عليا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

θ = ...

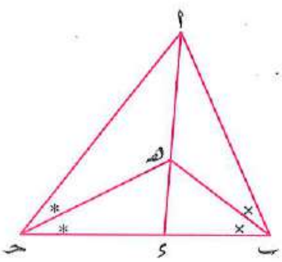
(أ) ١٠°

(ب) ٢٠°

(جـ) ٤٠°

(د) ٨٠°

(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب د ، $\overrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ أ جـ د فإن : ....

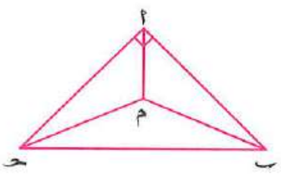
(أ) د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

(ب) هـ منتصف $\overline{\text{أ د}}$

(جـ) هـ تقسم $\overline{\text{أ د}}$ بنسبة ٢ : ١ من جهة أ

(د) $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

(٣) فى الشكل المقابل :

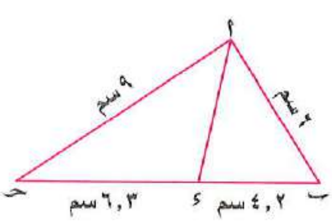


$\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، م هى نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة للمثلث أ ب جـ

فإن : ق (∠ ب م جـ) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٤٥°

(٤) فى الشكل المقابل :



أى مما يأتى صحيح :

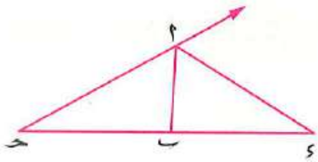
(أ) Δ ب أ د ~ Δ ب جـ أ

(ب) أ ب × أ جـ = ب د × د جـ

(جـ) ق (∠ ب أ د) = ق (∠ جـ أ د)

(د) أ د = $\sqrt{\text{ب د × د جـ − أ ب × أ جـ}}$

(٥) فى الشكل المقابل :

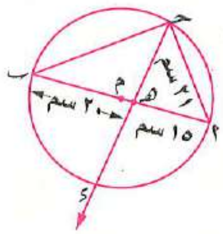


أى مما يأتى يكون كافيًا لإثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف الزاوية الخارجة عن △ أ ب جـ عند الرأس أ ؟

(أ) $\frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{ب جـ}}$ (ب) $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب جـ}}$

(جـ) $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{جـ ء}}{\text{ء ب}}$ (د) أ ب × ء جـ = أ جـ × ء ب

(٦) فى الشكل المقابل :



م دائرة ، $\overline{\text{أب}}$ قطر فيها ، هـ ∈ $\overline{\text{أب}}$

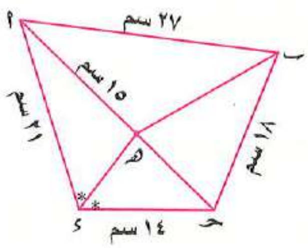
، أ هـ = ١٥ سم ، ب هـ = ٢٠ سم

، أ جـ = ٢١ سم ، $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ يقطع الدائرة فى ء

فإن : ق $(\overset{\frown}{\text{أ ء}})$ = ...°

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) ٢٢,٥ (د) ٦٠

(٧) فى الشكل المقابل :

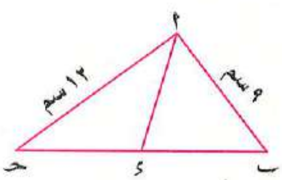


أى مما يأتى خطأ ؟

(أ) جـ هـ = ١٠ سم (ب) $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

(جـ) ب هـ = ٤ $\sqrt{٢١}$ سم (د) ء هـ = ١٢ $\sqrt{٢}$ سم

(٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان : م (△ أ ب ء) = ٣٠ سم^{٢} ، م (△ أ جـ ء) = ٤٠ سم^{٢}

فإن : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ....

(أ) عمودى على $\overline{\text{ب جـ}}$ (ب) ينصف ∠ ب أ جـ

(جـ) يمر بمنتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ (د) كل ما سبق.

ثانيًا الأسئلة المقالية

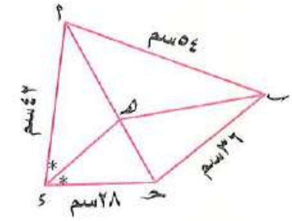
١ أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٩ سم ، ب جـ = ١٠,٥ سم ، ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$
حيث ب ء = ٤,٢ سم **أثبت أن :** $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

---

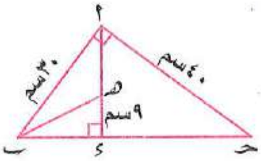
٢ أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}}$ هى على الترتيب ٦ ، ٤ ، ٣,٦ من السنتيمترات
، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ بحيث جـ ء = ٦ سم
أثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث أ ب جـ عند أ

٣ في كل من الشكلين الآتيين أثبت أن : ب هـ ينصف ∠ أ ب حـ

(١)



(٢)



٤ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم ، حـ ء = ٦ سم ، أ ء = ٤ سم
، أ هـ ينصف ∠ أ ويقطع ب ء في هـ

(١) أوجد : قيمة النسبة $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}}$ (٢) أثبت أن : حـ هـ ينصف ∠ ب حـ ء « $\frac{٣}{٢}$ »

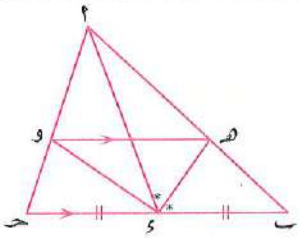
٥ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه : أ ب = ١٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، هـ ∈ أ ء بحيث
٢ أ هـ = ٣ هـ ء ، رسم هـ و // ء حـ فقطع أ حـ في و **أثبت أن :** ب و ينصف ∠ أ ب حـ

٦ في الشكل المقابل :

ء منتصف ب حـ ، ء هـ ينصف ∠ أ ء ب ، هـ و // ب حـ

أثبت أن :

(١) ء و ينصف ∠ أ ء حـ (٢) هـ ء ⊥ ء و



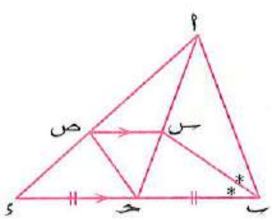
٧ أ ب حـ مثلث ، س منتصف ب حـ ، ب س = ٦ سم ، أ س = ٩ سم
، نصفت ∠ أ س ب بمنصف قطع أ ب في ء ، أخذت نقطة هـ على أ حـ
بحيث : أ هـ = ٦ سم علمًا بأن : أ حـ = ١٠ سم

(١) أوجد : قيمة $\frac{\text{أ ء}}{\text{ء ب}}$ (٢) أثبت أن : ء هـ // ب حـ

(٣) أثبت أن : س هـ ينصف ∠ أ س حـ « $\frac{٣}{٢}$ »

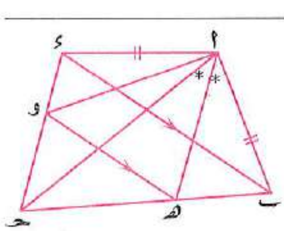
٨ في الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، ب حـ = حـ ء
، ب س ينصف ∠ أ ب حـ ، س ص // ب ء
أثبت أن : حـ ص ينصف ∠ أ حـ ء



٩ في الشكل المقابل :

أ ب = أ ء ، أ هـ ينصف ∠ ب أ حـ ، هـ و // ب ء
أثبت أن : أ و ينصف ∠ حـ أ ء



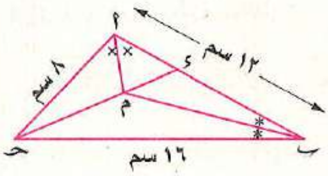
١٠ أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، ء ∉ $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث حـ ء = أ ب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ // $\overline{\text{ء أ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في هـ

، ورسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في و

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ أ ب حـ

---

١١ في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ١٢ سم ، أ حـ = ٨ سم

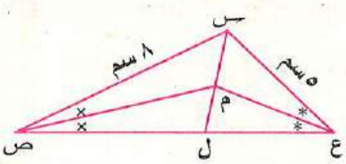
، ب حـ = ١٦ سم ، $\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ أ ب حـ

، $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ ب أ حـ أوجد : طول $\overline{\text{أ ء}}$

«٤ سم»

---

١٢ في الشكل المقابل :



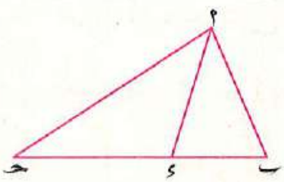
$\overrightarrow{\text{ع م}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص م}}$ منصفا ∠ ع ، ∠ ص على الترتيب

، س ص = ٨ سم ، س ع = ٥ سم

أثبت أن : ٨ ل ع = ٥ ل ص

---

١٣ في الشكل المقابل :



إذا كان أ حـ : ء حـ : أ ب : ب ء = ١٥ : ١٠ : ٩ : ٦

فأثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

---

١٤ أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ٩ سم ، ء ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

بحيث : ب ء = ٣ سم ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$ بحيث $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

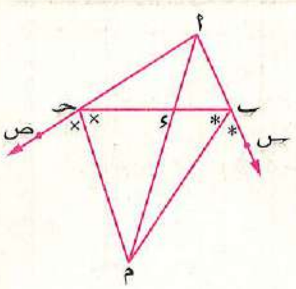
(١) أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

(٢) أوجد : طول $\overline{\text{ب هـ}}$

«٩ سم»

---

١٥ في الشكل المقابل :



$\overrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ حـ ب س

، $\overrightarrow{\text{حـ م}}$ ينصف ∠ ب حـ ص

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

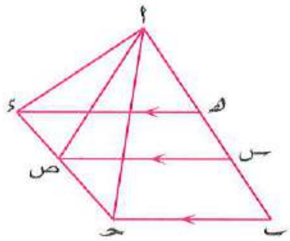
١٦ أ ب حـ مثلث أطوال أضلاعه أب ، ب حـ ، حـ أ هي على الترتيب ٦ ، ١٢ ، ٩ من السنتيمترات ، ء ∈ أب

بحيث : أء = ٢ سم ، رسم ءهـ // ب حـ ويقطع أحـ في هـ

أوجد : طول أهـ **ثم أثبت أن :** ب هـ ينصف ∠ أ ب حـ «٣ سم»

---

١٧ في الشكل المقابل :



هـ ء // س ص // ب حـ

، أء × ب س = أحـ × هـ س

أثبت أن : أص ينصف ∠ حـ أ ء

---

١٨ دائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ، رسم مستقيم يوازي م ن فقطع الدائرة م في ب ، حـ

، والدائرة ن في ء ، هـ على الترتيب. فإذا تقاطع ب م ، هـ ن في النقطة و

أثبت أن : و أ ينصف ∠ م و ن

---

١٩ أ ب قطر في دائرة ، أحـ وتر فيها ، رسم حـ ء مماسًا للدائرة عند حـ فقطع أب في ء إذا كانت

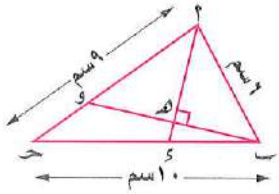
هـ ∈ أب بحيث $\frac{\text{ءب}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{ءحـ}}{\text{حـ هـ}}$

أثبت أن : (١) حـ أ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث حـ ء هـ عند حـ

(٢) $\frac{\text{ءأ}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{ب هـ}}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث فيه : أب = ٦ سم ، أحـ = ٩ سم

، ب حـ = ١٠ سم ، ء ∈ ب حـ بحيث ب ء = ٤ سم

، رسم ب هـ ⊥ أء ويقطع أء ، أحـ في هـ ، و على الترتيب.

(١) **أثبت أن :** أء ينصف ∠ ب أ حـ

(٢) **أوجد :** م(△ أ ب و) : م(△ حـ ب و) «٢»

الدرس

5

تطبيقات التناسب فى الدائرة

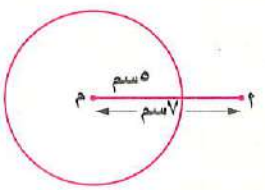
قوة النقطة بالنسبة لدائرة

تعريف

قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها نق هو العدد الحقيقى ق م (أ)

حيث : ق م (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢}

فمثلاً فى الشكل المقابل :

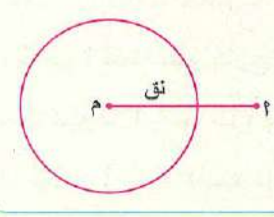


إذا كانت أ نقطة خارج الدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم

بحيث : م أ = ٧ سم فإن : ق م (أ) = ٧^{٢} − ٥^{٢} = ٢٤

ملاحظة ١

يمكن تحديد موضع نقطة أ بالنسبة للدائرة م عن طريق معرفة ق م (أ) فإذا كان :



- ق م (أ) > ٠ فإن : أ تقع خارج الدائرة.
- ق م (أ) = ٠ فإن : أ تقع على الدائرة.
- ق م (أ) < ٠ فإن : أ تقع داخل الدائرة.

مثال ١

إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٢ سم ، أ نقطة تقع فى مستويها فحدد موضع النقطة أ بالنسبة للدائرة م فى كل حالة مما يأتى ثم احسب بعدها عن مركز الدائرة فى كل حالة :

١ ق م (أ) = ١٣ ٢ ق م (أ) = صفر ٣ ق م (أ) = −١١

الحـل

∵ طول قطر الدائرة = ١٢ سم ∴ نق = ٦ سم

١ ∵ $ق_م$ (أ) = ١٣ > ٠ ∴ أ تقع خارج الدائرة.

، ∵ $ق_م$ (أ) = $(م أ)^٢$ − $نق^٢$ ∴ ١٣ = $(م أ)^٢$ − ٣٦ ∴ م أ = ٧ سم

٢ ∵ $ق_م$ (أ) = صفر ∴ أ تقع على الدائرة. ∴ م أ = ٦ سم

٣ ∵ $ق_م$ (أ) = −١١ < ٠ ∴ أ تقع داخل الدائرة. ، ∵ $ق_م$ (أ) = $(م أ)^٢$ − $نق^٢$

∴ −١١ = $(م أ)^٢$ − ٣٦ ∴ م أ = ٥ سم

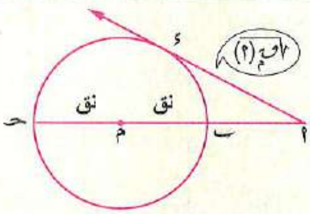
حاول بنفسك

حدد موضع كل من النقط أ ، ب ، حـ بالنسبة للدائرة م التى طول نصف قطرها ٥ سم إذا كان :

١ $ق_م$ (أ) = ١١ ٢ $ق_م$ (ب) = صفر ٣ $ق_م$ (حـ) = −١٦

ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة م

ملاحظـة ٢



إذا وقعت النقطة أ خارج الدائرة م

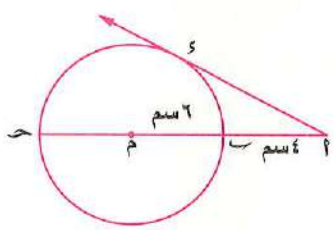
فإن : $ق_م$ (أ) = $(أ م)^٢$ − $نق^٢$

= (أ م − نق) (أ م + نق)

= أ ب × أ حـ = $(أ ء)^٢$

∴ طول القطعة المستقيمة المماسة المرسومة من النقطة أ للدائرة م = $\sqrt{ق_م (أ)}$

◄ فمثلاً فى الشكل المقابل :



إذا كانت أ نقطة تقع خارج الدائرة م التى طول

نصف قطرها ٦ سم ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ يمس الدائرة فى ء

فإذا كان : أ ب = ٤ سم فإنه يمكن إيجاد $ق_م$ (أ)

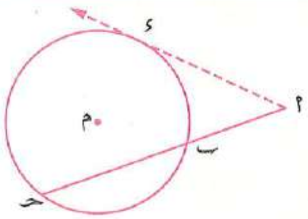
بإحدى الطرق الآتية :

- باستخدام التعريف : $ق_م$ (أ) = $(أ م)^٢$ − $نق^٢$ = $(١٠)^٢$ − $(٦)^٢$ = ٦٤
- باستخدام الملاحظة السابقة : $ق_م$ (أ) = أ ب × أ حـ = ٤ × ١٦ = ٦٤

ومما سبق يمكن إيجاد : أ ء حيث أ ء = $\sqrt{ق_م (أ)}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

لاحظ أنه

في الشكل المقابل :



إذا كانت : أ نقطة خارج الدائرة

، $\overline{\text{أحـ}}$ تقطع الدائرة في ب ، حـ

فإن : قم (أ) = أب × أحـ

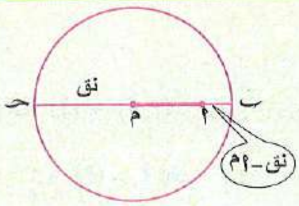
ويمكن استنتاج ذلك من الملاحظة السابقة حيث :

قم (أ) = $(\text{أء})^2$ (حيث $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ يمس الدائرة م في ء)

، ∵ $(\text{أء})^2$ = أب × أحـ ∴ قم (أ) = أب × أحـ

ملاحظة ٣

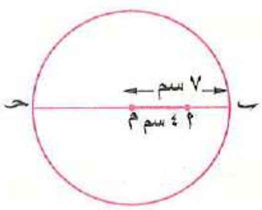
إذا وقعت النقطة أ داخل الدائرة م فإن :



قم (أ) = $(\text{أ م})^2$ − نق^2 = (أ م − نق) (أ م + نق)

= − (نق − أ م) (أ م + نق) = − أب × أحـ

◄ فمثلًا في الشكل المقابل :

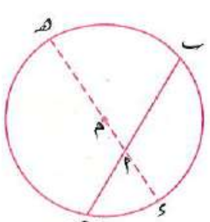


إذا كانت : أ نقطة تقع داخل الدائرة التي طول نصف قطرها ٧ سم وتبعد عن مركزها ٤ سم

فإن : قم (أ) = − أب × أحـ = −٣ × ١١ = −٣٣

لاحظ أنه

في الشكل المقابل :



إذا كانت : $\overline{\text{بحـ}}$ وترًا في الدائرة م

، أ ∈ $\overline{\text{بحـ}}$

فإن : قم (أ) = − أب × أحـ

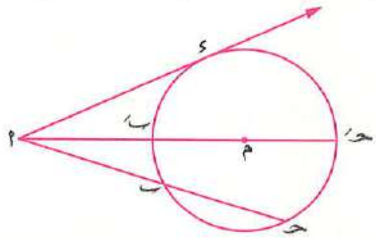
ويمكن استنتاج ذلك من الملاحظة السابقة كما يلي :

قم (أ) = − أء × أهـ (حيث $\overline{\text{ءهـ}}$ قطر)

، ∵ أء × أهـ = أب × أحـ ∴ قم (أ) = − أب × أحـ

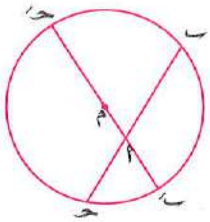
يمكن تلخيص ما سبق كما يلى :

إذا كانت : أ خارج الدائرة م فإن :



ق$_{م}$ (أ) = أب × أحـ = أبَ × أحـَ = (أء)^{٢}

إذا كانت : أ داخل الدائرة م فإن :

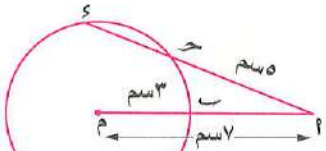


ق$_{م}$ (أ) = − أب × أحـ = − أبَ × أحـَ

مثال ٢

دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٧ سم ، رسم من أ مستقيم يقطع الدائرة فى حـ ، ء بحيث حـ ∈ $\overline{\text{أء}}$ فإذا كان : حـ أ = ٥ سم **فاحسب :** طول الوتر $\overline{\text{حـء}}$

الحـل



∵ ق$_{م}$ (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢} = ٤٩ − ٩ = ٤٠

، ∵ ق$_{م}$ (أ) = أ حـ × أ ء ∴ ٤٠ = ٥ × أ ء

∴ أ ء = ٨ سم

∴ حـ ء = أ ء − أ حـ = ٨ − ٥ = ٣ سم (وهو المطلوب)

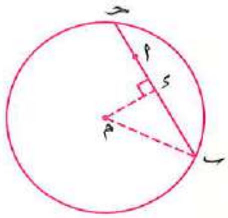
مثال ٣

دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٥ سم ، رُسم الوتر $\overline{\text{بحـ}}$ يمر بالنقطة أ بحيث أ ب = ٣ أ حـ

احسب : ١ طول الوتر $\overline{\text{بحـ}}$ ٢ بُعد الوتر $\overline{\text{بحـ}}$ عن مركز الدائرة.

الحـل

∵ ق$_{م}$ (أ) = (أ م)^{٢} − نق^{٢} = ٢٥ − ٤٩ = −٢٤



، ∵ ق$_{م}$ (أ) = − أ ب × أ حـ ∴ −٢٤ = − أ ب × أ حـ

∴ ٢٤ = أ ب × أ حـ ، ∵ أ ب = ٣ أ حـ

∴ ٢٤ = ٣ أ حـ × أ حـ ∴ (أ حـ)^{٢} = ٨

∴ أ حـ = $\sqrt{٨}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ سم ، ∵ أ ب = ٣ أ حـ

∴ أ ب = ٦ $\sqrt{٢}$ سم ∴ ب حـ = أ حـ + أ ب = ٨ $\sqrt{٢}$ سم (المطلوب أولًا)

، وبفرض أن بُعد الوتر $\overline{\text{بحـ}}$ عن مركز الدائرة هو م ء حيث : $\overline{\text{مء}}$ ⊥ $\overline{\text{بحـ}}$

، ∵ م ء ⊥ ب ح ∴ ء منتصف ب ح

∴ ق م (ء) = (ء م)² − نق² = − ب ء × ء ح

∴ (ء م)² − ٤٩ = − ٤ √٢ × ٤ √٢

∴ (ء م)² = ١٧ ∴ ء م = √١٧ ≃ ٤,١ سم **(المطلوب ثانيًا)**

حاول بنفسك

الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم ، أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦ سم ، رُسم الوتر ب ح حيث أ ∈ ب ح ، أ ب = ٢ أ ح

احسب : [١] طول الوتر ب ح [٢] بُعد الوتر ب ح عن مركز الدائرة.

ملاحظة هامة

تسمى مجموعة النقاط التى لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسى للدائرتين

فإذا كان : ق م (أ) = ق ن (أ) فإن أ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

فمثلًا إذا كان : ق م (أ) = ق ن (أ) ، ق م (ب) = ق ن (ب) فإن : أ ب ⟷ محور أساسى للدائرتين م ، ن

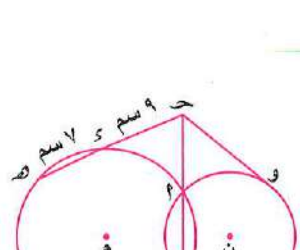
مثال ٤

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب ، ح ∈ ب أ ⟷ ، ح ∉ ب أ ، رسم ح ء ⟵ فقطع الدائرة م فى ء ، هـ حيث : ح ء = ٩ سم ، ء هـ = ٧ سم ، ورسم ح و ⟵ يمس الدائرة ن عند و

[١] **أثبت أن :** ح تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

[٢] إذا كان : أ ب = ١٠ سم **أوجد :** طول كل من أ ح ، ح و

الحل



∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن

∴ ق م (أ) = ق ن (أ) = صفر

، بالمثل : ق م (ب) = ق ن (ب) = صفر

∴ أ ب ⟷ محور أساسى للدائرتين م ، ن ، ∵ ح ∈ أ ب ⟷

∴ النقطة ح تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن **(المطلوب أولًا)**

، ∵ ق م (ح) = ح ء × ح هـ = ٩ × ١٦ = ١٤٤

، ق$_{م}$ (حـ) = حـ أ × حـ ب   ∴ ١٤٤ = حـ أ (حـ أ + ١٠)

∴ ١٤٤ = (حـ أ)^{٢} + ١٠ حـ أ   ∴ (حـ أ)^{٢} + ١٠ حـ أ − ١٤٤ = ٠

∴ (حـ أ − ٨) (حـ أ + ١٨) = ٠   ∴ حـ أ = ٨ سم

، ∵ حـ تقع على المحور الأساسى للدائرتين م ، ن

∴ ق$_{ن}$ (حـ) = ق$_{م}$ (حـ) ، ق$_{ن}$ (حـ) = (حـ و)^{٢}

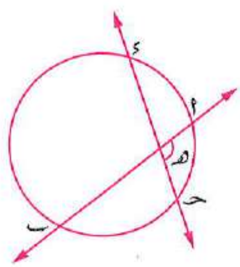
∴ (حـ و)^{٢} = ١٤٤   ∴ حـ و = ١٢ سم   **(المطلوب ثانيًا)**

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

تذكر أن :

١ إذا تقاطع قاطعان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التى تقابلها بالرأس.

فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ قاطعان للدائرة حيث $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء}$ = {هـ}

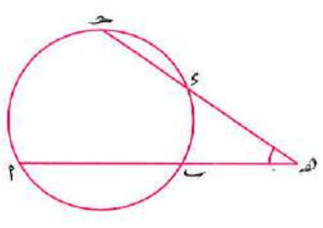
فإن : ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) + ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)]

فمثلًا إذا كان : ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) = ٥٠° ، ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ١٧٠°

فإن : ق (∠ أ هـ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [٥٠° + ١٧٠°] = ١١٠°

٢ إذا تقاطع قاطعان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف الفرق الموجب بين قياسى القوسين المقابلين لها.

فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ قاطعان للدائرة حيث $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء}$ = {هـ}

فإن : ق (∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) − ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)]

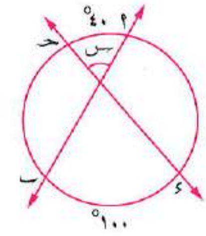
فمثلًا إذا كان : ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) = ١٢٠° ، ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ٥٠°

فإن : ق (∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ [١٢٠° − ٥٠°] = ٣٥°

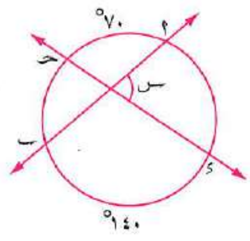
مثال ٥

فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة س :

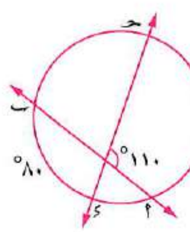
١



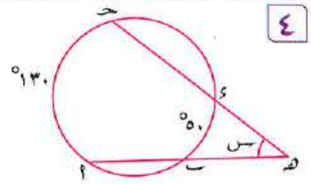
٢



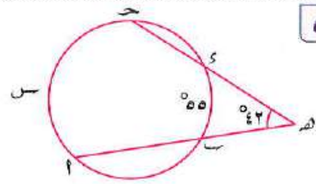
٣



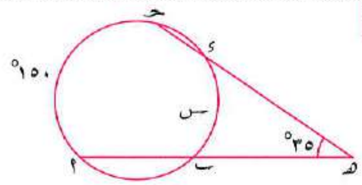
٤



٥



٦



الحل

١ س = $\frac{١}{٢}$ [٤٠° + ١٠٠°] = ٧٠°

٢ ∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ، ق (أ حـ⌒) + ق (ء ب⌒) = ٧٠° + ١٤٠° = ٢١٠°

∴ ق (أ ء⌒) + ق (ب حـ⌒) = ٣٦٠° − ٢١٠° = ١٥٠° ∴ س = $\frac{١}{٢}$ × ١٥٠° = ٧٥°

٣ ∵ $\frac{١}{٢}$ [س + ٨٠°] = ١١٠° ∴ س + ٨٠° = ٢٢٠° ∴ س = ١٤٠°

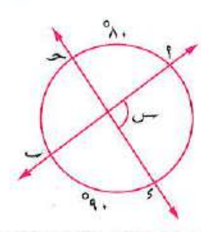
٤ س = $\frac{١}{٢}$ [١٣٠° − ٥٠°] = ٤٠°

٥ ∵ $\frac{١}{٢}$ [س − ٥٥°] = ٤٢° ∴ س − ٥٥° = ٨٤° ∴ س = ١٣٩°

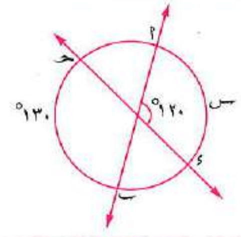
٦ ∵ $\frac{١}{٢}$ [١٥٠° − س] = ٣٥° ∴ ١٥٠° − س = ٧٠° ∴ س = ٨٠°

حاول بنفسك

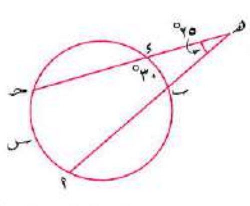
أوجد قيمة س فى كل مما يأتى :



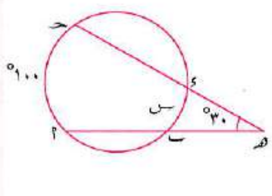
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

تمرين مشهور

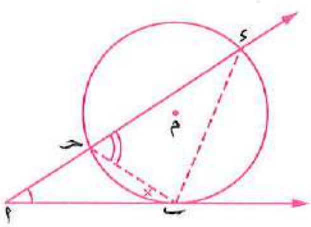
القاطع والمماس لدائرة (أو المماسان لدائرة) المتقاطعان فى نقطة خارجها ، يكون قياس زاوية تقاطعهما مساويًا نصف الفرق الموجب بين قياسى القوسين المقابلين لها.

الحالة الأولى: تقاطع القاطع والمماس لدائرة

◂ **المعطيات**: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة م عند ب ، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ∩ الدائرة م = {حـ ، د}

◂ **المطلوب**: إثبات أن: ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{\text{ب د}}$) − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)]

◂ **العمل**: نرسم $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$



◂ **البرهان**: ∵ ∠ب حـ د خارجة عن △ أ ب حـ

∴ ق(∠ب حـ د) = ق(∠أ) + ق(∠أ ب حـ)

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب حـ د) − ق(∠أ ب حـ)

، ∵ ∠ب حـ د محيطية. ∴ ق(∠ب حـ د) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب د}}$)

، ∵ ∠أ ب حـ مماسية. ∴ ق(∠أ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب د}}$) − $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

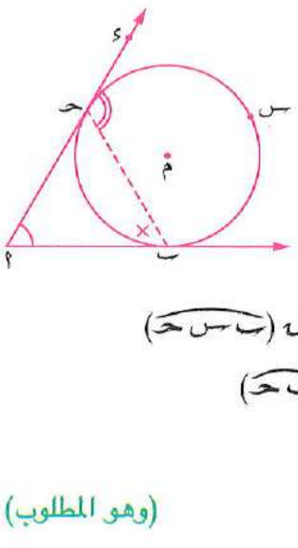
= $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{\text{ب د}}$) − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)] (وهو المطلوب)

الحالة الثانية: تقاطع مماسين لدائرة

◂ **المعطيات**: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ مماسان للدائرة م عند ب ، حـ

◂ **المطلوب**: إثبات أن: ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{\text{ب س حـ}}$) − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)]

◂ **العمل**: نرسم $\overline{\text{ب حـ}}$



◂ **البرهان**: ∵ ∠ب حـ د خارجة عن △ أ ب حـ

∴ ق(∠ب حـ د) = ق(∠أ) + ق(∠ب)

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب حـ د) − ق(∠ب)

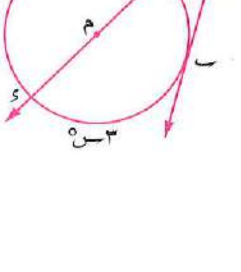
، ∵ ∠ب حـ د مماسية. ∴ ق(∠ب حـ د) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب س حـ}}$)

، ∵ ∠ب مماسية. ∴ ق(∠ب) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب س حـ}}$) − $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)

= $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{\text{ب س حـ}}$) − ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$)] (وهو المطلوب)

مثال ٦



في الشكل المقابل:

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماسًا للدائرة م عند ب ، ق(∠أ) = ٣٠°

، $\overleftrightarrow{\text{أم}}$ يقطع الدائرة في حـ ، د ، ق($\overset{\frown}{\text{ب د}}$) = ٣ س°

أوجد: قيمة س

الحـل

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، $\overleftrightarrow{أء}$ قاطع لها ∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌢بء) − ق(⌢بحـ)]

∴ $\frac{1}{2}$ [ق(⌢بء) − ق(⌢بحـ)] = ٣٠° ∴ ق(⌢بء) − ق(⌢بحـ) = ٦٠° (١)

، ∵ $\overline{حـء}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق(⌢بء) + ق(⌢بحـ) = ١٨٠° (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن : ٢ ق(⌢بء) = ٢٤٠° ∴ ق(⌢بء) = ١٢٠°

، ∵ ق(⌢بء) = ٣ س° ∴ ٣ س° = ١٢٠°

∴ س = ٤٠°

(وهو المطلوب)

مثـال ٧

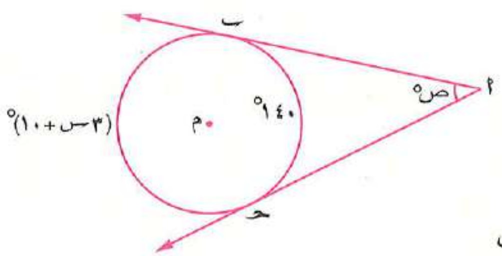
فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسين للدائرة م

عند ب ، حـ على الترتيب ، ق(∠أ) = ص°

، ق(⌢بحـ) الأصغر = ١٤٠°

، ق(⌢بحـ) الأكبر = (٣ س + ١٠)° **فأوجد :** قيمتى س ، ص



الحـل

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق(⌢بحـ) الأصغر + ق(⌢بحـ) الأكبر = ٣٦٠°

∴ ١٤٠° + (٣ س + ١٠)° = ٣٦٠° ∴ ٣ س° + ١٥٠° = ٣٦٠°

∴ ٣ س° = ٢١٠° ∴ س = ٧٠

∴ ق(⌢بحـ) الأكبر = (٣ × ٧٠° + ١٠°) = ٢٢٠° ، ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م

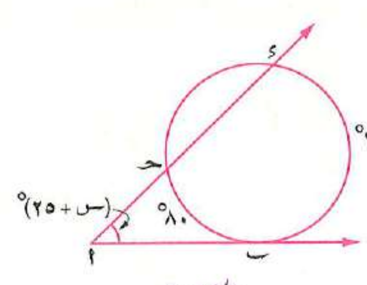
∴ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌢بحـ) الأكبر − ق(⌢بحـ) الأصغر]

∴ ص° = $\frac{1}{2}$ [٢٢٠° − ١٤٠°] = ٤٠° ∴ ص = ٤٠

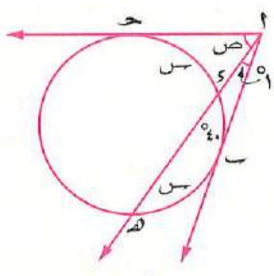
(وهو المطلوب)

حاول بنفسك

باستخدام معطيات الشكل ، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس :



شكل (١)



شكل (٢)

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ، أ نقطة فى مستويها بحيث م أ = ٤ سم

فإن : $ق_م$ (أ) = ...

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) ٩ (جـ) ٧ (د) −٧

(٢) إذا كانت ن دائرة طول قطرها ١٦ سم ، ب نقطة فى مستويها بحيث ن ب = ٥ سم

فإن : $ق_ن$ (ب) = ...

(أ) ٣٩ (ب) −٣٩ (جـ) $\sqrt{٣٩}$ (د) −٢٣١

(٣) إذا كانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م كمية سالبة فإن : أ تقع ....

(أ) داخل الدائرة. (ب) على مركز الدائرة. (جـ) خارج الدائرة. (د) على الدائرة.

(٤) إذا كانت م دائرة ، أ نقطة تقع فى مستويها بحيث $ق_م$ (أ) = ٠ فإن : أ تقع ....

(أ) داخل الدائرة. (ب) على مركز الدائرة. (جـ) خارج الدائرة. (د) على الدائرة.

(٥) إذا كان : $ق_م$ (أ) = $٥^{-١}$ فإن : أ تقع .... الدائرة م

(أ) خارج (ب) داخل (جـ) على (د) مركز

(٦) $ق_م$ (أ) = نق فإن النقطة أ تقع ....

(أ) خارج الدائرة. (ب) على الدائرة.

(جـ) داخل الدائرة. (د) على مركز الدائرة.

(٧) دائرة مركزها م وطول نصف قطرها نق ، $ق_م$ (أ) تمثل قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م

فإن : $ق_م$ (م) = ...

(أ) صفر (ب) نق (جـ) $نق^٢$ (د) − $نق^٢$

(٨) إذا كانت م دائرة ، أ نقطة فى مستويها بحيث م أ = ٦ سم ، $ق_م$ (أ) = −١٣

فإن مساحة هذه الدائرة = ... $سم^٢$ $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧} \right)$

(أ) ١٥٤ (ب) ٤٤ (جـ) ١٤٤ (د) ٧

(٩) إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة فى مستويها تبعد عن مركز الدائرة ٢٥ سم فإن طول القطعة المماسة المرسومة من أ للدائرة م يساوى .... سم

(أ) ٥ (ب) ٤٩ (جـ) ٢٤ (د) ١٢

(١٠) إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٢ سم ، أ نقطة تقع فى مستويها وكانت قوة النقطة أ بالنسبة لدائرة م = ١٣ فإن بعد النقطة أ عن مركز الدائرة هى .... سم

(أ) ٧ (ب) ١٤ (جـ) ٣,٥ (د) ٦

(١١) إذا كان : قم (أ) = ٩ فإن هذا يعنى أن ....

(أ) النقطة أ تقع على الدائرة التى مركزها م

(ب) النقطة أ تقع داخل الدائرة التى مركزها م

(جـ) طول نصف قطر الدائرة التى مركزها م يساوى ٩ وحدة طول.

(د) طول القطعة المستقيمة المماسة المرسومة من نقطة أ للدائرة التى مركزها م يساوى ٣ وحدة طول.

(١٢) إذا كانت : أ نقطة خارج دائرة م فإن طول القطعة المماسة المرسومة من أ للدائرة م يساوى ....

(أ) $(أ م)^2$ (ب) $(قم (أ))^2$ (جـ) قم (أ) (د) $\sqrt{قم (أ)}$

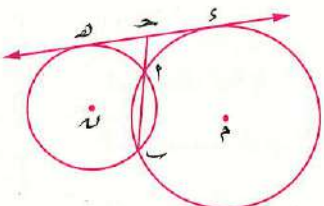
(١٣) إذا كان : م ، ن دائرتان متقاطعتان وكان : قم (أ) = ٥ ، ٢ قن (أ) = ١٠

فإن النقطة أ ∈ ....

(أ) الدائرة م (ب) الدائرة ن

(جـ) $\overleftrightarrow{مـن}$ (د) المحور الأساسى للدائرتين.

(١٤) فى الشكل المقابل :

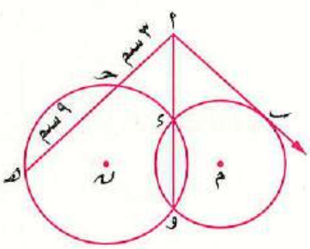


قم (حـ) − قن (حـ) = ...

(أ) كمية موجبة. (ب) كمية سالبة.

(جـ) صفر. (د) لا يمكن تحديدها.

(١٥) فى الشكل المقابل :



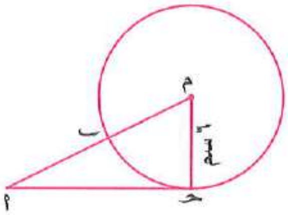
إذا كان : أ حـ = ٣ سم ، حـ هـ = ٩ سم

فإن : قم (أ) = ...

(أ) $٣\sqrt{٣}$ (ب) ٢٧

(جـ) ٣٦ (د) ٦

(١٦) في الشكل المقابل :



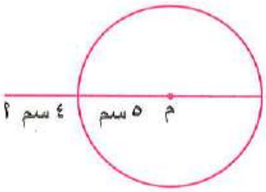
أحـ تمس الدائرة م في حـ ، م حـ = ٦ سم

، ق م (أ) = ٦٤

فإن : أب = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٧) في الشكل المقابل :

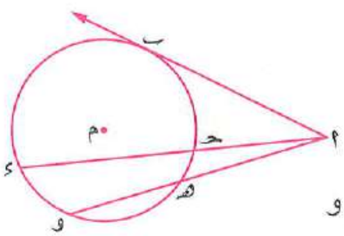


ق م (أ) = ...

(أ) ٨١ (ب) ٢٥

(جـ) ٥٦ (د) ١٦

(١٨) في الشكل المقابل :



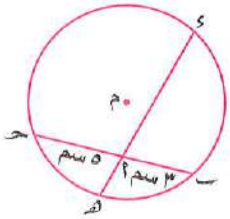
أب مماس

فإن : (أب)^{٢} = ...

(أ) أحـ × حـ ء (ب) أهـ × هـ و

(جـ) ق م (أ) (د) $\frac{\text{أحـ}}{\text{أء}}$

(١٩) في الشكل المقابل :

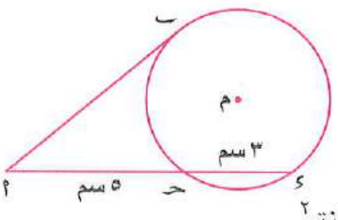


ق م (أ) = ...

(أ) ١٥ (ب) −١٥

(جـ) ٢٤ (د) −٢٤

(٢٠) في الشكل المقابل :



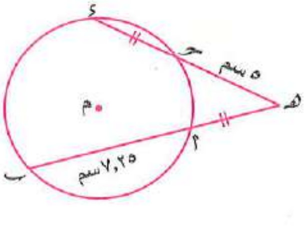
أب مماسة للدائرة عند ب ، ء حـ = ٣ سم ، حـ أ = ٥ سم

فإن : ق م (أ) = ...

(أ) ٢٥ (ب) (أب)^{٢} − نق^{٢}

(جـ) ٤٠ (د) (أ م)^{٢} − (أب)^{٢}

(٢١) في الشكل المقابل :

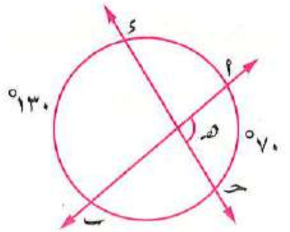


ق م (هـ) = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢٩

(جـ) ٢٥ (د) ٤٥

(٢٢) في الشكل المقابل :



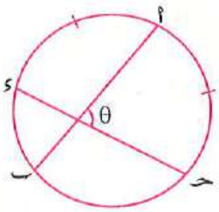
إذا كان : ق (⌒أ حـ) = ٧٠° ، ق (⌒ء ب) = ١٣٠°

فإن : ق (∠ء هـ ب) = ...°

(أ) ١٠٠ (ب) ٩٠

(جـ) ١١٠ (د) ١٢٠

(٢٣) في الشكل المقابل :



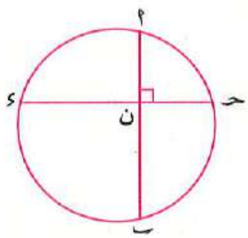
ق (⌒أ حـ) = ق (⌒أ ء) = ٢ ق (⌒ب ء) ، ق (⌒ب حـ) = ١٠٠°

فإن : θ = ...°

(أ) ٧٨ (ب) ٦٥

(جـ) ٥٢ (د) ٨٤

(٢٤) في الشكل المقابل :



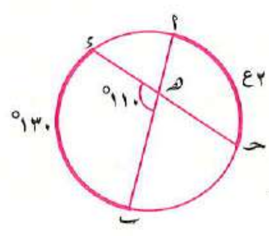
إذا كان : أب ⊥ حـ ء

فإن : ق (⌒أ حـ) + ق (⌒ب ء) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠°

(جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢٥) 📖 في الشكل المقابل :



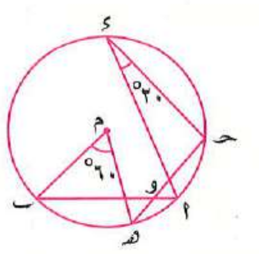
أب ∩ حـ ء = {هـ}

فإن : ع = ...°

(أ) ٩٠ (ب) ٤٥

(جـ) ٥٠ (د) ٨٠

(٢٦) في الشكل المقابل :



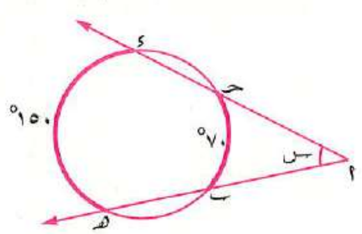
دائرة مركزها م

، ق (∠هـ و ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠°

(جـ) ٥٠° (د) ٦٠°

(٢٧) في الشكل المقابل :

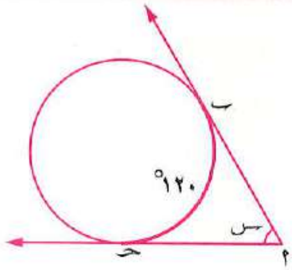


س = ...°

(أ) ١١٠ (ب) ٥٥

(جـ) ٨٠ (د) ٤٠

(٢٨) في الشكل المقابل :

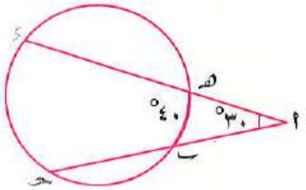


س = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠

(جـ) ١٨٠ (د) ٢٤٠

(٢٩) في الشكل المقابل :



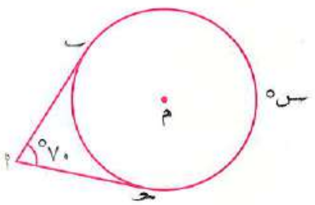
ق(∠ أ) = ٣٠° ، ق(⌒ب هـ) = ٤٠°

فإن : ق(⌒جـ د) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠°

(جـ) ٧٠° (د) ١٠٠°

(٣٠) في الشكل المقابل :



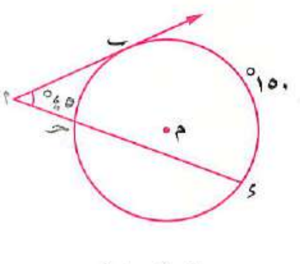
ق(∠ أ) = ٧٠° ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان

، ق(⌒ب جـ) الأكبر = س°

فإن : س = ...

(أ) ٢٥٠° (ب) ١١٠° (جـ) ٥٠٠° (د) ٢١٥°

(٣١) في الشكل المقابل :



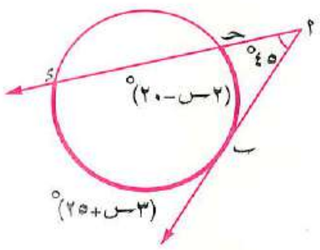
$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب

، ق(∠ أ) = ٤٥° ، ق(⌒ب د) = ١٥٠°

فإن : ق(⌒ب جـ) = ...°

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٨٠

(٣٢) في الشكل المقابل :

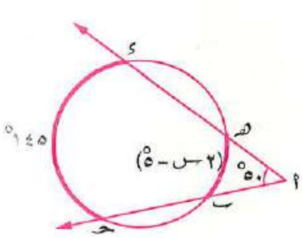


س = ...°

(أ) ٢٥ (ب) ٤٥

(جـ) ٦٥ (د) ٧٠

(٣٣) في الشكل المقابل :

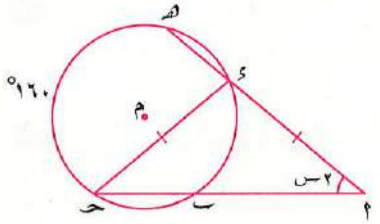


س = ...°

(أ) ٥٠ (ب) ٢٥

(جـ) ١٠٠ (د) ٧٥

(٣٤) في الشكل المقابل :



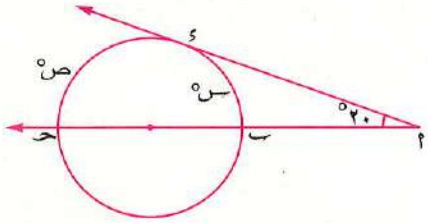
إذا كانت : م دائرة ، رسم $\overleftarrow{أهـ}$ يقطع الدائرة في ء ، هـ

، رسم $\overleftarrow{أجـ}$ يقطع الدائرة في ب ، جـ ، أء = ءجـ

فإن : قيمة س = ...°

(أ) ٤٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

(٣٥) في الشكل المقابل :

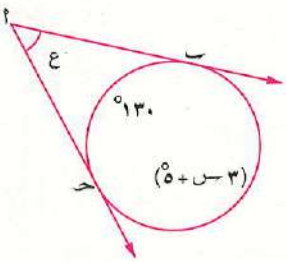


(س ، ص) = ...

(أ) (٦٠ ، ١٢٠) (ب) (١٢٠ ، ٦٠)

(جـ) (٧٠ ، ١١٠) (د) (١١٠ ، ٧٠)

(٣٦) في الشكل المقابل :

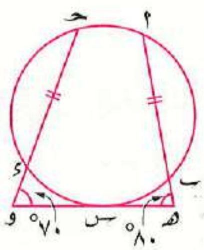


س + ع = ...°

(أ) ٥٠ (ب) ٧٥

(جـ) ١٢٥ (د) ٢٥٠

(٣٧) في الشكل المقابل :



أب = جـء ، ق(∠هـ) = ٨٠° ، ق(∠و) = ٧٠°

فإن : ق($\overset{\frown}{سء}$) − ق($\overset{\frown}{سب}$) = ...

(أ) ٥° (ب) ١٠°

(جـ) ١٥° (د) ٢٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ **أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها نق :**

(١) النقطة أ حيث أ م = ١٢ سم ، نق = ٩ سم

(٢) النقطة جـ حيث جـ م = ٧ سم ، نق = ٧ سم

(٣) النقطة ء حيث ء م = $\sqrt{١٧}$ سم ، نق = ٤ سم

٢ **حدد موقع كل من النقط أ ، ب ، جـ بالنسبة إلى الدائرة م ، والتى طول نصف قطرها ١٠ سم ، ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة في كل من الحالات الآتية :**

(١) $ق_م$ (أ) = −٣٦ (٢) $ق_م$ (ب) = ٩٦ (٣) $ق_م$ (جـ) = صفر

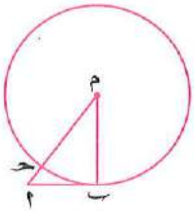
٣ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوى ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة تساوى ٤٠٠
أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة. «١٥ سم»

---

٤ إذا كانت أ نقطة خارج الدائرة م ، أ ء مماسة للدائرة عند ء بحيث أ ء = ٨ سم
فأوجد قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م «٦٤»

---

٥ في الشكل المقابل :



أ ب تمس الدائرة م عند ب ، م أ تقطع الدائرة م في نقطة حـ
إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٢ سم
، ق م (أ) = ٨١
فأوجد : (١) طول أ ب (٢) طول أ حـ «٩ سم ، ٣ سم»

---

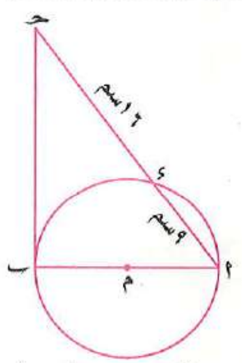
٦ الدائرة م طول نصف قطرها ٣١ سم ، النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣ سم ، رسم الوتر ب حـ
حيث : أ ∈ ب حـ ، أ ب = ٣ أ حـ
احسب : (١) طول الوتر ب حـ (٢) بعد الوتر ب حـ عن مركز الدائرة. «٤٨ سم ، ١٩,٦ سم»

---

٧ الدائرة ن طول نصف قطرها ٨ سم ، النقطة ب تبعد ١٢ سم عن مركز الدائرة ، رسم مستقيم
يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرة في نقطتين حـ ، ء حيث حـ ب = حـ ء
احسب طول الوتر حـ ء وبعده عن النقطة ن «$2\sqrt{10}$ سم ، $3\sqrt{6}$ سم»

---

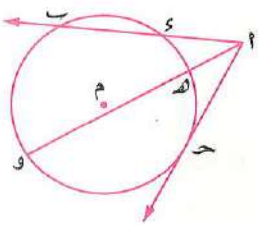
٨ في الشكل المقابل :



م دائرة ، أ ب قطر فيها ، جـ ب تمس الدائرة م
في ب ، حـ أ تقطع الدائرة م في ء بحيث :
حـ ء = ١٦ سم ، ء أ = ٩ سم
أوجد : (١) طول نصف قطر الدائرة.
(٢) مساحة المثلث أ ب حـ
«٧,٥ سم ، ١٥٠ سم^2»

---

٩ في الشكل المقابل :



أ نقطة خارج الدائرة م ، أ ب يقطع الدائرة في ء ، ب
، أ و يقطع الدائرة في هـ ، و ، أ حـ يمس الدائرة عند حـ
، أ ء = ٨ سم ، هـ و = ١٨ سم
(١) إذا كان : ق م (أ) = ١٤٤ فأوجد : طول كل من أ حـ ، ء ب ، أ هـ
(٢) إذا كان : س ∈ ب ء حيث ء س = ٤ سم فأوجد : ق م (س) «١٢ سم ، ١٠ سم ، ٦ سم ، −٢٤»

١٠ الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج فى أ ، أب مماس مشترك للدائرتين م ، ن ، ب حـ يقطع الدائرة م فى حـ ، ء ، ب هـ يقطع الدائرة ن فى هـ ، و على الترتيب.

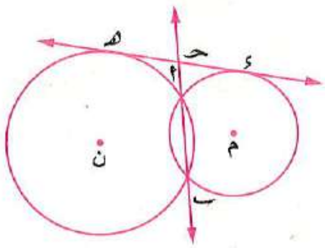
(١) **أثبت أن :** أب محور أساسى للدائرتين م ، ن

(٢) إذا كان : ق$_م$ (ب) = ٣٦ ، ب حـ = ٤ سم ، هـ و = ٩ سم

أوجد : طول كل من حـ ء ، أب ، ب هـ «٥ سم ، ٦ سم ، ٣ سم»

---

١١ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

، هـ ء مماس مشترك للدائرتين م ، ن عند ء ، هـ

على الترتيب ، ب أ ∩ ء هـ = {حـ}

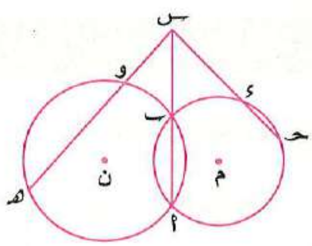
(١) **أثبت أن :** ب حـ محور أساسى للدائرتين.

(٢) إذا كان : أب = ١٢ سم ، ق$_ن$ (حـ) = ٦٤

أوجد : طول كل من حـ أ ، حـ ء «٤ سم ، ٨ سم»

---

١٢ في الشكل المقابل :



الدائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب

حيث : أب ∩ حـ ء ∩ هـ و = {س}

، س ء = ٢ ء حـ ، هـ و = ١٠ سم ، ق$_ن$ (س) = ١٤٤

(١) **أثبت أن :** أب محور أساسى للدائرتين م ، ن

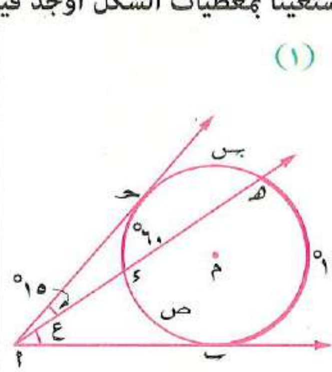
(٢) **أوجد :** طول كل من س حـ ، س و

(٣) **أثبت أن :** الشكل حـ ء و هـ رباعى دائرى. «٦ √٦ سم ، ٨ سم»

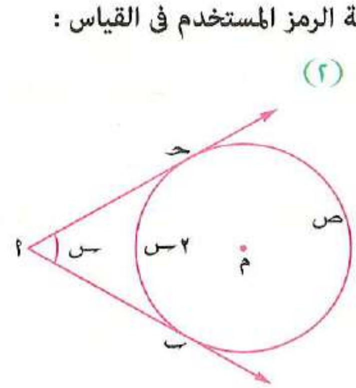
---

١٣ مستعينًا بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس :

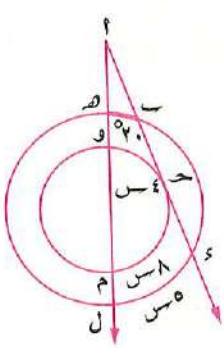
(١)



(٢)



(٣)



١٤ في الشكل المقابل :

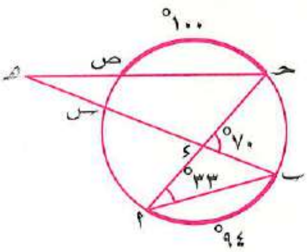
ق (∠ب أ حـ) = ٣٣° ، ق (∠ب ء حـ) = ٧٠°

، ق (⌒أب) = ٩٤° ، ق (⌒حـ ص) = ١٠٠°

أوجد قياس كل من :

(١) ⌒س ص (٢) ⌒أ س

(٣) ∠ب هـ حـ



«٢٦° ، ٧٤° ، ٢٠°»

---

١٥ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ خماسي منتظم مرسوم داخل الدائرة م

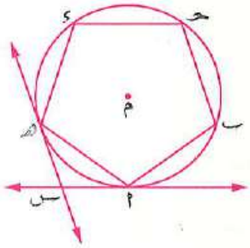
، $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة عند أ

، $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة عند هـ

حيث $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \cap \overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ = {س}

أوجد : (١) ق (⌒أ هـ)

(٢) ق (∠أ س هـ)



«٧٢° ، ١٠٨°»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

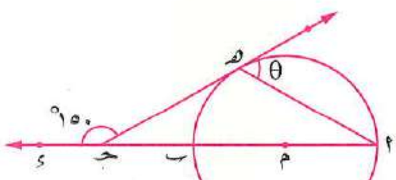
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) في الشكل المقابل :

θ = ... °

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠

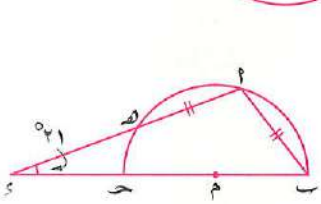
(جـ) ٥٥ (د) ٦٠



(٢) في الشكل المقابل :

إذا كان : أ هـ = أ ب ، $\overline{\text{ب حـ}}$ قطراً ، ق (∠ء) = ٢١°

فإن : ق (∠أ) = ... °



(أ) ١٠٠ (ب) ١٠٤ (جـ) ١٠٦ (د) ١١٠

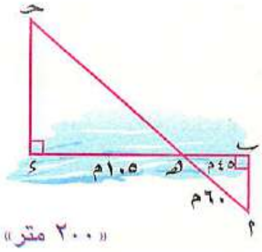
تطبيقات حياتية على الوحدة الرابعة

📖 من أسئلة الكتاب المدرسى

١ 📖 لتحديد الموقع حـ ،

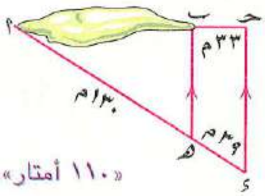
قام المساحون بالقياس وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع حـ عن الموقع ؟



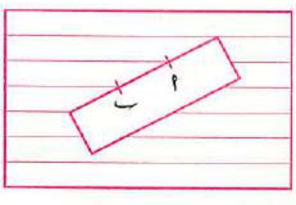
«٢٠٠ متر»

٢ 📖 قام فريق مكافحة التلوث بتحديد موقع بقعة زيت على أحد الشواطئ كما فى الشكل المقابل. احسب طول بقعة الزيت.

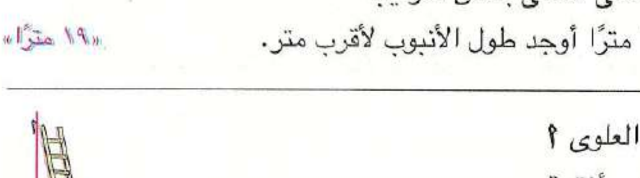


«١١٠ أمتار»

٣ 📖 أراد يوسف تقسيم شريط من الورق إلى ٣ أجزاء متساوية فى الطول، فقام بوضعه على صفحة كراسته كما بالشكل المقابل وحدد نقطتى التقسيم أ ، ب هل تقسيم يوسف للشريط صحيح ؟ فسر إجابتك. استخدم أدواتك الهندسية لتتحقق من صحة إجابتك.



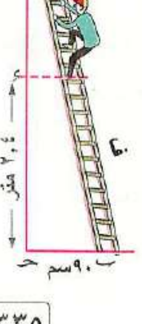
٤ 📖 تنقل عبوات الأسمدة من إنتاج أحد المصانع بانزلاقها عبر أنبوب مائل لتحملها السيارات إلى مراكز التوزيع كما فى الشكل المقابل.



فإذا كانت ء ، هـ ، و مساقط النقط أ ، ب ، حـ على الأفقى بنفس الترتيب ، أ ب = ١,٢ م ، ء هـ = ٨٠ سم ، هـ و = ١٢ مترًا أوجد طول الأنبوب لأقرب متر.

«١٩ مترًا»

٥ 📖 $\overline{\text{أ ب}}$ سلم طوله ٤,١ أمتار يستند بطرفه العلوى أ على حائط رأسى وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة. إذا كان بعد الطرف السفلى عن الحائط ٩٠ سم. فاحسب المسافة التى يصعدها رجل على السلم ليصبح على ارتفاع ٢,٤ متر من الأرض.

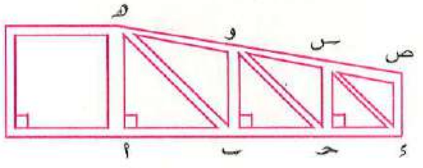


«٢,٤٦ مترًا»

٦ إذا كان : أب = ١٨٠ سم ، هـ و = ٢ متر

، أب : ب حـ : حـ ء = ٥ : ٤ : ٣

أوجد : طول كل من هـ ص ، حـ ء



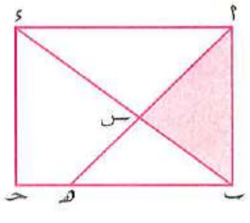
«٤٨٠ سم ، ١٠٨ سم»

٧ يبين الشكل المقابل تقسيمًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل إلى أربعة أقسام مختلفة بالمستقيمين ب ء ، أهـ ،

حيث هـ $\in$ ب حـ ، ب ء $\cap$ أهـ = {س}

فإذا كان : أب = ب هـ = ٤٢ مترًا ، أء = ٥٦ مترًا.

احسب مساحة القطعة أب س بالأمتار المربعة وطول أس

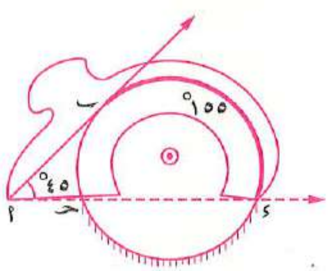


«٥٠٤ متر مربع ، ٢٤ $\sqrt{2}$ متر»

٨ منشار دائرى لقطع الخشب طول نصف قطر دائرته ١٠ سم ، يدور داخل حافظة حماية ،

فإذا كان : ق (∠ ب أ ء) = ٤٥° ، ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ١٥٥°

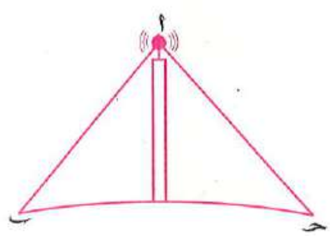
أوجد طول قوس قرص المنشار خارج حافظة الحماية.



«٢٤,٤ سم»

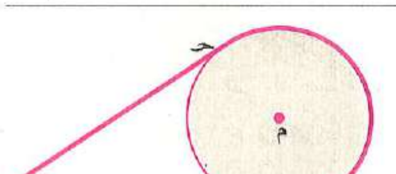
٩ تتبع الإشارات التى تصدر عن برج الاتصالات فى مسارها شعاعًا ، نقطة بدايته على قمة البرج ، ويكون مماسًا لسطح الأرض ، كما فى الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالماسين بفرض أن البرج يقع على مستوى سطح البحر

، ق (∠ حـ أ ب) = ٨٠°



«١٠٠°»

١٠ تدور بكرة عند محور م بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة عند أ فإذا كان قياس الزاوية بين جزئى السير ٤٠° فأوجد طول $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$ الأكبر ، علمًا بأن طول نصف قطر البكرة الكبرى ٩ سم



«٣٤,٥٦ سم»

١١ يدور قمر صناعى فى مدار ، محافظًا فى أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق منطقة خط الاستواء ، وتستطيع آلة التصوير به رصد قوس طوله ٦٠١١ كم على سطح الأرض. إذا كان قياس هذا القوس ٥٤°

فأوجد :

(١) قياس زاوية آلة التصوير الموضوعة على القمر الصناعى.

(٢) طول نصف قطر الأرض عند دائرة خط الاستواء.

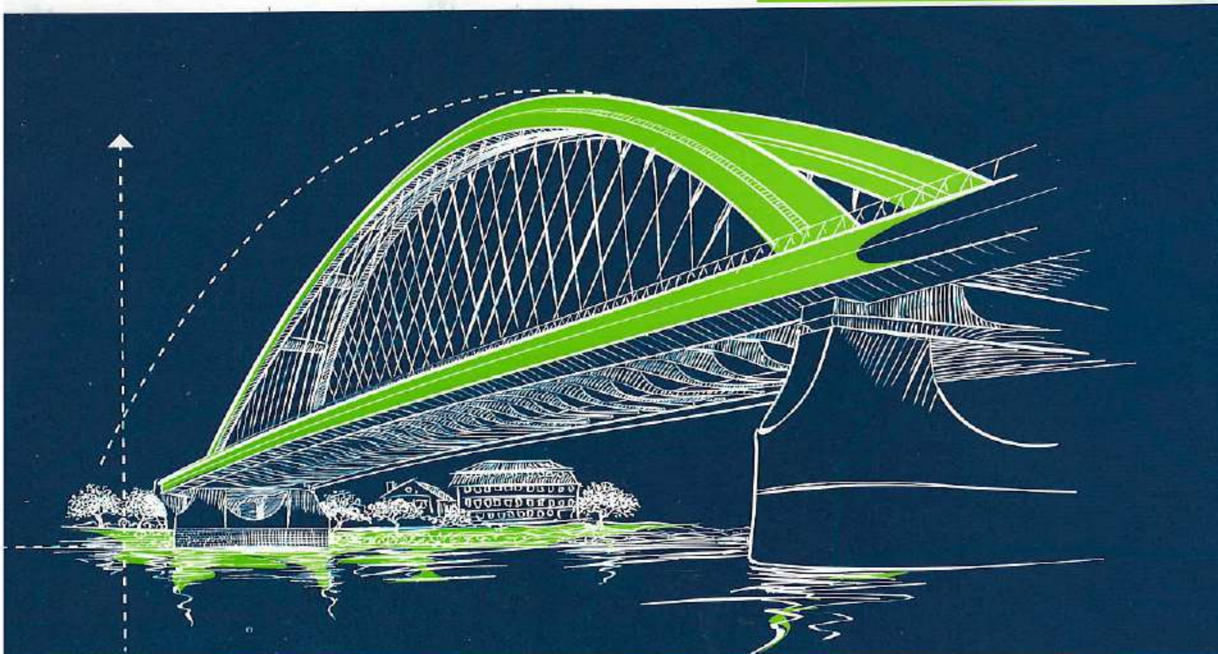
«١٢٦° ، ٦٣٧٨ كم»

الرياضيات

الجزء الخاص بالامتحانات

- اختبارات تراكمية
- اختبارات شهرية
- امتحانات نهائية

امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR



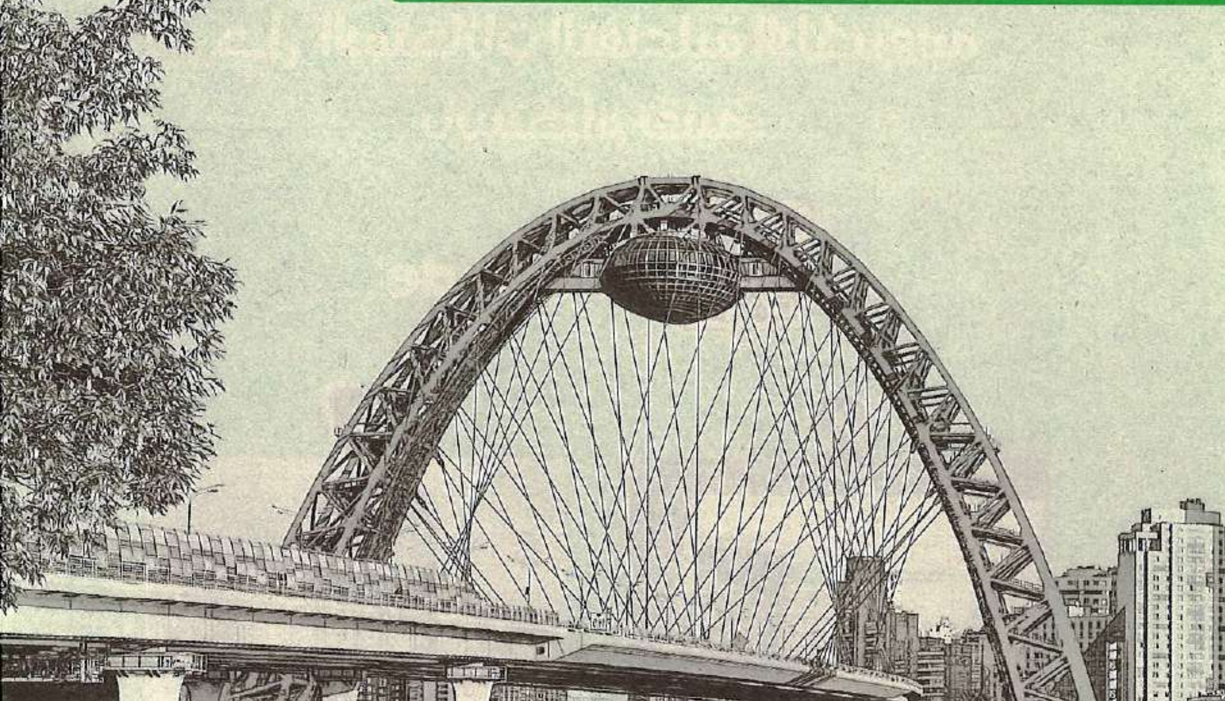
الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الأول

المعاصر 2024

إعداد نخبة من خبراء التعليم

محتويات الكتاب

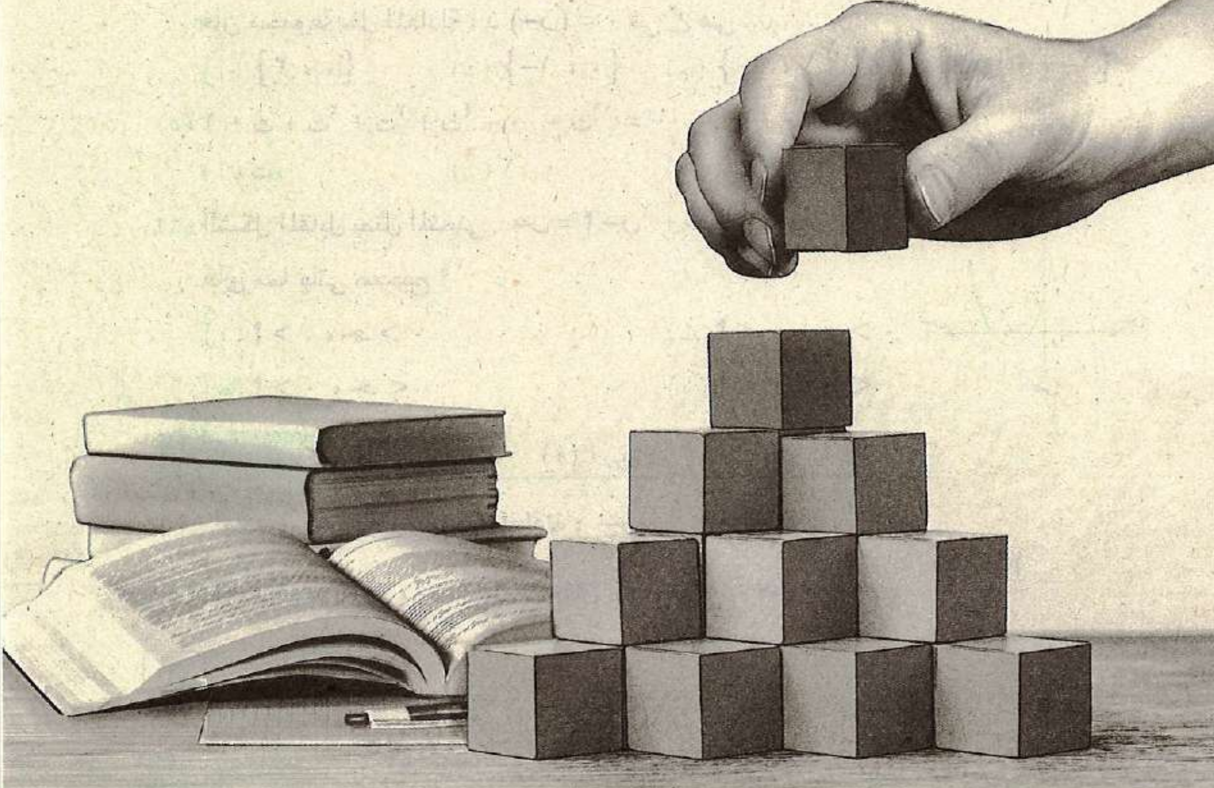


الاختبارات التراكمية القصيرة

أولًا : اختبارات تراكمية قصيرة في الجبر.

ثانيًا : اختبارات تراكمية قصيرة في حساب المثلثات.

ثالثًا : اختبارات تراكمية قصيرة في الهندسة.



الدرجة الكلية

١٠

اختبـار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨} =$ ....

(أ) ٤ (ب) −٤ (ج) ٤ ت (د) −١٦

(٢) أبسط صورة للعدد التخيلي $ت^{٤٢}$ هى ....

(أ) −١ (ب) ١ (ج) ت (د) − ت

(٣) مجموعة حل المعادلة : $س^{٢} + ٩ = ٠$ فى ك هى ....

(أ) {٣ ، −٣} (ب) {−٣ت} (ج) {٣ت ، −٣ت} (د) ∅

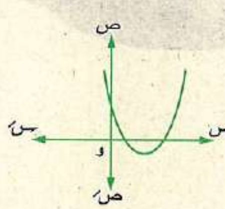
(٤) إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يقطع محور السينات فى النقطتين (٣ ، ٠) ، (−١ ، ٠)
فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ فى ح هى ....

(أ) {٣ ، ٠} (ب) {−١ ، ٠} (ج) {−٣ ، ١} (د) {٣ ، −١}

(٥) $١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + \cdots + ت^{١٦} =$ ....

(أ) ت (ب) ١ (ج) ١٦ (د) ٤

(٦) الشكل المقابل يمثل المنحنى : $ص = أ س^{٢} + ب س + حـ$



فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) أ > ٠ ، حـ > ٠ (ب) أ < ٠ ، حـ > ٠

(جـ) أ > ٠ ، حـ < ٠ (د) أ < ٠ ، حـ < ٠

السـؤال الثانى ٤ درجات — (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد فى ك مجموعة حل المعادلة : $س^{٢} - ٢ س + ٤ = ٠$

(ب) أوجد قيمتى س ، ص اللتين تحققان أن : $س + ت ص = \frac{(٢ + ت)(٢ - ت)}{٣ + ٢ ت}$

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان جذرا المعادلة : ٤ س^٢ − ١٢ س + حـ = ٠ متساويين فإن : حـ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٦

(٢) إذا كان : س = −١ أحد جذرى المعادلة : س^٢ − ٲ س − ٢ = ٠ فإن : ٲ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٣ (د) −٣

(٣) إذا كان : ٲ = ١ + $\sqrt{٢}$ ت ، ب = ١ − $\sqrt{٢}$ ت فإن : ٲ ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٤) إذا كان جذرا المعادلة : س^٢ − ٦ س + ك = ٠ حقيقيين مختلفين فإن : ك ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٩[(ب)]٩ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٩] (د) [٩ ، ∞[

(٥) إذا كان جذرا المعادلة : ٲ س^٢ + ب س + حـ = ٠ مركبان مترافقان فأى مما يأتى صحيح ؟

(أ) ب^٢ − ٤ ٲ حـ > ٠ (ب) ب^٢ − ٤ ٲ حـ = ٠

(جـ) ب^٢ − ٤ ٲ حـ < ٠ (د) ب^٢ − ٤ ٲ حـ ≥ ٠

(٦) (٢ + ٢ ت)^{٢٠} = ...

(أ) ٢^{٢٠} (ب) ٢^{٣٠} (جـ) ٢^{٢٠} ت (د) −٢^{٣٠}

السـؤال الثانى ٤ درجات — (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أثبت أن جذرى المعادلة : ٣ س^٢ − ٤ س + ٥ = ٠ غير حقيقيين

ثم أوجد : مجموعة حل المعادلة فى ك

(ب) أوجد قيم ك التى تجعل للمعادلة : ك س^٢ − ٤ س + ٤ = ٠

جذرين مركبين وغير حقيقيين.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - (م - ٣) س + ٥ = ٠$ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : م = ...

(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٥

(٢) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٣١}$ هى ....

(أ) ت (ب) −ت (جـ) ١ (د) −١

(٣) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $أ س^٢ + ٢ س + ٥ = ٠$ معكوسًا ضربيًا للآخر

فإن : أ = ...

(أ) −٥ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٥

(٤) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ + ٤ س + ك = ٠$ حقيقيين فإن : ك ∈ ....

(أ) [٤ ، ∞[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤] (د)]−∞ ، ٤[

(٥) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : $أ س^٢ + ب س - حـ =$ صفر مختلفى الأشارة

فإن : ....

(أ) ب = صفر (ب) حـ < ٠ (جـ) $\frac{حـ}{أ} < ٠$ (د) $\frac{حـ}{أ} > ٠$

(٦) إذا كان : $(١ + ت^٨)(١ - ت^{١١}) = س + ت ص$ فإن : س + ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

السؤال الثانى **٤ درجات** (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ - ٣ س + ٢ + \frac{١}{م} = ٠$ متساويين **فأوجد : قيمة م**

(ب) **أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة :** $س^٢ + ٣ س + ك = ٠$ ضعف الجذر الآخر.

الدرجة الكلية

١٠

اختبـار 4 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : سـ^{٢} − ٤ سـ = −٤ فى ح هى ....

(أ) {−٢} (ب) {٢} (جـ) {−٢ ، ٢} (د) $\varnothing$

(٢) المعادلة التربيعية التى جذراها : ت ، −ت هى ....

(أ) سـ^{٢} − ١ = ٠ (ب) سـ^{٢} + ١ = ٠

(جـ) (سـ + ١)^{٢} = ٠ (د) (سـ − ١)^{٢} = ٠

(٣) يكون جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ٢ سـ + ك = ٠ حقيقيين مختلفين إذا كان : ....

(أ) ك = ١ (ب) ك $>$ ١ (جـ) ك $<$ ١ (د) ك = ٤

(٤) أبسط صورة للمقدار : (١ − ت)^{٤} هى ....

(أ) −٤ (ب) ٤ (جـ) −٤ ت (د) ٤ ت

(٥) إذا كان جذرا المعادلة التربيعية : سـ^{٢} + بـ سـ + حـ = ٠ عددان فرديان متتاليان فإن : بـ^{٢} − ٤ حـ = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٦) حاصل ضرب جذور المعادلات : أ سـ^{٢} + بـ سـ + حـ = ٠ ، بـ سـ^{٢} + حـ سـ + أ = ٠ ، حـ سـ^{٢} + أ سـ + بـ = ٠ يساوى ....

(أ) أ بـ حـ (ب) −١ (جـ) ١ (د) صفر

السـؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ سـ^{٢} + ٢ سـ + ٣ = ٠

فكون المعادلة التى جذراها : $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$

(ب) أوجد فى أبسط صورة المقدار : (٣ − ٢ ت)^{٢} (٣ + ٢ ت)

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 5 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : [-٢ ، ٤] ⟵ ح ، د (س) = ٤ - ٢ س تكون إشارتها سالبة فى الفترة ....

(أ) [-٢ ، ٠] (ب)]٠ ، ٤] (جـ) [٢ ، ٤] (د)]٢ ، ٤]

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢$ - ٦ س + ك = ٠ متساويين فإن : ك = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ١ (د) ١٢

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها (١ + ت) ، (١ - ت) هى ....

(أ) $س^٢$ - ٢ س + ٢ = ٠ (ب) $س^٢$ + ٢ س - ٢ = ٠

(جـ) $س^٢$ + ٢ س + ٢ = ٠ (د) $س^٢$ - ٢ س - ٢ = ٠

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ $س^٢$ - ٣ س + ٢ = ٠ معكوسًا ضربيًا للآخر فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) -٢

(٥) إذا كانت د : د (س) = أ $س^٢$ + ب س + حـ موجبة لجميع قيم س الحقيقية فإن ....

(أ) $ب^٢$ - ٤ أ حـ < ٠ (ب) $ب^٢$ - ٤ أ حـ > ٠

(جـ) $ب^٢$ - ٤ أ حـ = ٠ (د) $ب^٢$ - ٤ أ حـ ≤ ٠

(٦) أي مما يأتى تحليل للمقدار ($س^٢$ + ٩) ؟

(أ) (س - ٣) (س + ٣) (ب) $(س + ٣)^٢$

(جـ) $(س - ٢ ت)^٢$ (د) (س - ٣ ت) (س + ٣ ت)

السؤال الثانى ٤ درجات — (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

عيِّن إشارة كل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين موضحًا ذلك على خط الأعداد :

(١) د (س) = (س - ١) (س + ٢) (٢) د (س) = - $س^٢$ + ٩

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الدالة د : د (س) = −٣ تكون سالبة فى ....

(أ)]−∞ ، −٣]   (ب)]−٣ ، ٣[(جـ)]−∞ ، ∞[(د)]−∞ ، ٠[

(٢) مجموعة الحل للمتباينة : س (س − ٢) ≤ ٠ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ٢}   (ب) [٠ ، ٢]   (جـ) ح − [٠ ، ٢]   (د) ح −]٠ ، ٢[

(٣) أبسط صورة للعدد التخيلى ت^٥٢ هى ....

(أ) ت   (ب) − ت   (جـ) ١   (د) −١

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : أ س^٢ + ٤ س + ٧ = ٠ معكوسًا ضربيًا للجذر الآخر

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) ٧   (جـ) ٤   (د) −٧

(٥) مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة حل المتباينة (س − ٥) (٣ س − ٤) ≤ ٠

يساوى ....

(أ) ٧   (ب) ١٤   (جـ) ١٥   (د) ٩

(٦) أى مما يأتى عدد تخيلى ؟

(أ) π   (ب) ٥ − ت   (جـ) $\sqrt{-٥}$ (د) ت^٢

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان : ١ + ت أحد جذرى المعادلة : س^٢ − ٢ س + حـ = ٠ حيث حـ ∈ ح

فأوجد الجذر الآخر ثم أوجد : قيمة حـ

(ب) ابحث إشارة الدالة د : د (س) = ٢ س^٢ + ٧ س − ١٥

ومن ذلك استنتج مجموعة حل المتباينة : ٢ س^٢ + ٧ س ≤ ١٥

الدرجة الكلية
....
١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التى قياسها ٥٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ....

(أ) ١٣٠° (ب) ٣١٠° (جـ) ١٤٠° (د) ٤١٠°

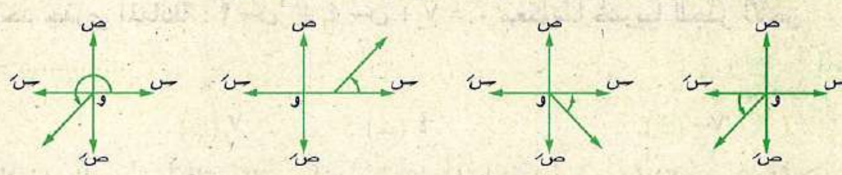
(٢) جميع الزوايا التى قياساتها كالآتى تقع فى الربع الثانى ما عدا ....

(أ) −٢١٠° (ب) ١٢٠° (جـ) −١٢٠° (د) ٨٥٠°

(٣) الزاوية التى قياسها (−٧٥٠°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٤) جميع الزوايا الموجهة التالية ليست فى وضعها القياسى ما عدا ....



(أ) (ب) (جـ) (د)

(٥) إذا كان الضلع النهائى للزاوية فى الوضع القياسى يمر بالنقطة (−١ ، ٠) فإن الضلع النهائى يقع فى ....

(أ) الربع الأول. (ب) الربع الثانى. (جـ) الربع الثالث. (د) غير ذلك.

(٦) إذا كان : أ ، ب قياسى زاويتين متكافئتين فإن : −أ ، −ب يكونان ....

(أ) متكاملتين. (ب) متكافئتين. (جـ) متتامتين. (د) مجموعهما −٣٦٠°

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) عيِّن الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) −٥٢° (٢) ٢٢٠° (٣) ١٥َ ١١٢٠°

(ب) أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين فى الضلع النهائى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

(١) −١٣٢° (٢) ٧٠° (٣) −٧٣٠°

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) الزاوية التى قياسها $\frac{٩\pi}{٤}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢) القياس الستينى لزاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطرها ٦ سم وتقابل قوسًا طوله ٣ π سم يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٣) الزاوية التى قياسها −٣,٧ $'$ تكافئ الزاوية التى قياسها الستينى ....

(أ) $٥٨^\circ \ ١٥' \ ٣٣''$ (ب) $٣٠١^\circ \ ٤٤' \ ٢٧''$ (جـ) $-٢٣٣^\circ \ ١٥' \ ٣٣''$ (د) $٢١١^\circ \ ٤٤' \ ٢٧''$

(٤) القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ سم فى دائرة طول قطرها ٤ سم يساوى ....

(أ) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{د}$ (ب) $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{د}$ (جـ) $٥^{د}$ (د) $٦^{د}$

(٥) القياس الموجب للزاوية التى يصنعها عقرب الساعات مع عقرب الدقائق عند الساعة الثانية ونصف تمامًا يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

(٦) إذا كان : أ ، − أ قياسا زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم أ هى ....

(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد طول القوس المقابل لزاوية محيطية قياسها ٦٠° فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم

(ب) أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠أ) = ٧٠° ، ق(∠ب) = ٦٠° أوجد : ق(∠جـ) بالتقدير الدائرى.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٥ سم من دائرة طول قطرها ١٠ سم يساوى ....

(أ) $\frac{1}{2}$ ᵈ (ب) ١ ᵈ (جـ) ٢ ᵈ (د) π ᵈ

(٢) قياس أصغر زاوية موجبة مكافئة للزاوية التى قياسها (−٨٧٠°) هو ....

(أ) ٢١٠° (ب) ١٥٠° (جـ) −٢١٠° (د) ١٢٠°

(٣) إذا كان θ قياس زاوية موجهة مرسومة فى الوضع القياسى بحيث : حا θ < ٠

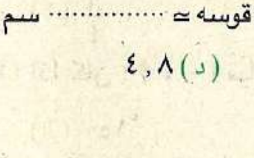
ففى أى ربع يقع الضلع النهائى لهذه الزاوية ؟

(أ) الأول. (ب) الأول والثانى. (جـ) الثانى والثالث. (د) الثالث والرابع.

(٤) إذا كان : قا θ = ٢ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن : θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : طا ب + طا جـ = ٢ $\frac{1}{12}$

فإن : ب جـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٦ (جـ) ٢٥ (د) ٢٨

(٦) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{1}{10}\pi$ فإن طول قوسه ≃ .... سم

(أ) ٤,٦ (ب) ٤,٤ (جـ) ٤,٢ (د) ٤,٨

السؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

٣ حا ٣٠° حا² ٦٠° − حتا ٠° قا ٦٠° + حا ٢٧٠° حتا² ٤٥°

(ب) إذا كان : حا θ = $\frac{3}{5}$ ، $\theta \in]\frac{\pi}{2} , \pi[$

فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية التى قياسها θ

الدرجة الكلية
....
١٠

اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أبسط صورة للمقدار : طا $(١٨٠° + \theta)$ + طتا $(٢٧٠° - \theta)$ هى ....

(أ) ٠ (ب) ٢ طا θ (جـ) ٢ طتا θ (د) ٢

(٢) إذا كان : حا $\theta > ٠$ ، طا $\theta < ٠$ فإن : θ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) إذا كانت θ زاوية حادة وكان : حتا $(\theta + ٢٥°)$ = حا ٣٠° فإن : θ = ...

(أ) ٥° (ب) ٢٠° (جـ) ٢٥° (د) ٣٥°

(٤) القياس الستينى لزاوية مركزية تحصر قوسًا طوله ٣ π سم من دائرة طول نصف قطرها ٤ سم هو ....

(أ) $\left(\frac{٣\pi}{٤}\right)^{د}$ (ب) ٤٥° (جـ) ١٣٥° (د) ٢٧٠°

(٥) حتا ١° × حتا ٢° × حتا ٣° × ⋯ × حتا ١٠٠° = ...

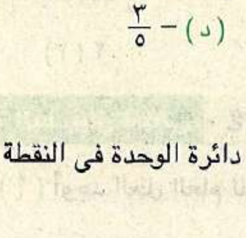
(أ) حا ١° × حا ٢° × حا ٣° × حا ٤° × ⋯ × حا ١٠٠°

(ب) ١

(جـ) ١° × ٢° × ٣° × ٤° × ⋯ × ١٠٠°

(د) صفر

(٦) فى الشكل المقابل :



Δ ا ب جـ قائم الزاوية فى ب ، طا $\theta = \frac{٣}{٤}$

فإن : حتا α = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $-\frac{٣}{٤}$ (جـ) $-\frac{٤}{٥}$ (د) $-\frac{٣}{٥}$

السؤال الثانى **٤ درجات** (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) إذا كان الضلع النهائى لزاوية θ مرسومة فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥}\right)$ فأوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار :

حتا $(١٨٠° - \theta)$ طتا $(٩٠° - \theta)$ + حا $(١٨٠° - \theta)$ طا $(-\theta)$

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة : قتا $(٢\theta - ١٥°)$ = قا $(\theta - ٣٠°)$

ثم أوجد : جميع قيم θ حيث $\theta \in]٠° ، ٩٠°[$ التى تحقق المعادلة.

الدرجة الكلية

١٠

اختبـار 5 حتى درس 5 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السـؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القيمة العظمى للدالة د : د (θ) = ٤ جا ٢ θ هى ....

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) −٢

(٢) الزاوية التى قياسها ٦٢٠° تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) القياس الدائرى للزاوية التى قياسها ١٢٠° بدلالة π هو ....

(أ) $\frac{١}{٣}\pi$ (ب) $\frac{٢}{٣}\pi$ (جـ) $\frac{٣}{٢}\pi$ (د) $\frac{١}{٢}\pi$

(٤) إذا كانت : جا θ = جتا ٢ θ حيث $\theta \in$]٠° ، ٩٠°[فإن : جا ٣ θ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥) الدالة د : د (θ) = ٣ جتا ٢ θ دالة دورية ودورتها تساوى ....

(أ) ٢ π (ب) $\frac{٢\pi}{٣}$ (جـ) ٦ π (د) π

(٦) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٣ س مع محور السينات فى الفترة [٠ ، ٢ π]

يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

السـؤال الثانى ٤ درجات (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد الحل العام للمعادلة : طا ٤ θ = طتا ٢ θ

(ب) إذا كانت الدالة د : د (θ) = جتا θ أوجد :

(١) مجالها. (٢) مداها. (٣) دورتها.

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 6 حتى درس 6 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات — كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ٢ حتا θ = $-\sqrt{2}$ فإن قياس أصغر زاوية موجبة تحقق ذلك هى ....

(أ) 45° (ب) 135° (جـ) 225° (د) 315°

(٢) أبسط صورة للمقدار : ظا $(360^\circ - \theta)$ + ظتا $(270^\circ - \theta)$ هى ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٢ ظا θ (د) ٢ ظتا θ

(٣) قياس الزاوية المركزية التى تقابل قوسًا طوله ٦ π سم فى دائرة طول نصف قطرها ٩ سم بالدرجات يساوى ....

(أ) 30° (ب) 60° (جـ) 120° (د) 150°

(٤) أى من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها سالبين ؟

(أ) 50° (ب) 150° (جـ) 210° (د) 300°

(٥) حتا (ظا$^{-1}$ $\left(\frac{3}{4}\right)$) = ...

(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{4}{5}$ (جـ) $\frac{3}{5}$ (د) حا$^{-1}$ $\left(\frac{3}{4}\right)$

(٦) إذا كان : حا^2 θ = $\frac{1}{2}$ فأى مما يأتى لا يصلح قيمة تقريبية لـ θ ؟

(أ) $215^\circ\ 15'\ 51.8''$ (ب) $-35^\circ\ 15'\ 51.8''$

(جـ) $70^\circ\ 30'\ 50.3''$ (د) $144^\circ\ 44'\ 8.2''$

السؤال الثانى ٤ درجات — (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أوجد بالقياس الستينى قيمة θ التى تحقق أن : حتا θ = -0.642

(ب) إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ فى الوضع القياسى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ فأوجد : قيمة θ

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

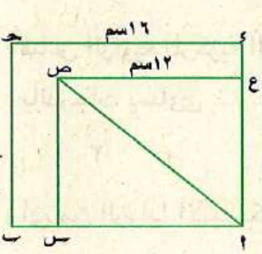
السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٢ : ٣ فإذا كان محيط الأصغر ١٤ سم فإن محيط الأكبر .... سم

(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ١٥ (د) ٢١

(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان المستطيل أ ب حـ ء ~ المستطيل أ س ص ع

، ء حـ = ١٦ سم ، ب حـ = ع ص = ١٢ سم

فإن : أ ص = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٩

(جـ) ١٥ (د) ١٨

(٣) مثلثان متشابهان فيهما $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ع س}}$ فأى مما يأتى خطأ ؟

(أ) Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع (ب) ق (∠ حـ) = ق (∠ ع)

(جـ) ق (∠ أ ب حـ) = ق (∠ ص س ع) (د) Δ أ ب حـ ~ Δ ص س ع

(٤) أى مما يأتى صحيح ؟

(أ) كل المضلعات المنتظمة متشابهة. (ب) كل المربعات متطابقة.

(جـ) كل المثلثات متساوية الأضلاع متشابهة. (د) كل المعينات متشابهة.

(٥) إذا كان : Δ ل م ن ~ Δ س ص ع وكان ق (∠ ل) = ٣٥° ، ق (∠ ع) = ٧٥°

فإن : ق (∠ م) = ...

(أ) ١١٠° (ب) ٣٥° (جـ) ٧٥° (د) ٧٠°

(٦) إذا كان ك هو معامل تشابه مضلعين $م_1$ إلى $م_2$ حيث المضلع $م_1$ هو تصغير للمضلع $م_2$ فإن ....

(أ) ك > ٠ (ب) ك = ١ (ج) ك > ١ (د) ٠ < ك < ١

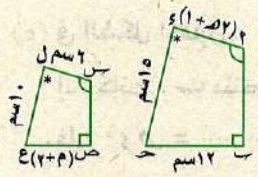
السؤال الثانى **٤ درجات** (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

فى الشكل المقابل :

المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

(١) أوجد معامل تشابه المضلع أ ب حـ ء للمضلع س ص ع ل

(٢) **أوجد قيمة كل من : م ، هـ**



الدرجة الكلية

١٠

اختبار 2 حتى درس 2 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

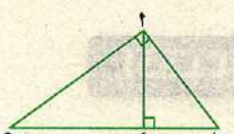
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مستطيلان متشابهان بعدا الأول ١٢ سم ، ٨ سم ومحيط الثانى ٦٠ سم فإن طول المستطيل الثانى = ...

(أ) ١٢ سم (ب) ١٨ سم (جـ) ٢٤ سم (د) ١٦ سم

(٢) **فى الشكل المقابل :**

أى العبارات التالية غير صحيحة ؟



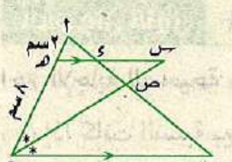
(أ) $(أب)^2$ = ب ء × ء حـ (ب) $(أحـ)^2$ = حـ ء × حـ ب

(جـ) $(أء)^2$ = ء ب × ء حـ (د) أ ب × أ حـ = ب حـ × أ ء

(٣) **فى الشكل المقابل :**

إذا كان : $\overrightarrow{حـ س}$ ينصف ∠ أ حـ ب ، $\overleftrightarrow{س ء}$ // $\overline{ب حـ}$

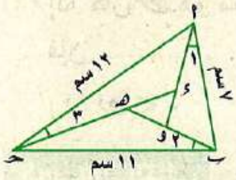
فإن : س ء = ... سم.



(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(٤) في الشكل المقابل :



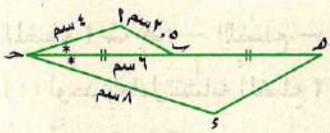
إذا كان : ق (ـــ ١) = ق (ـــ ٢) = ق (ـــ ٣)

فإن : ء هـ : هـ و : و ء = ...

(أ) ٧ : ١١ : ١٢ (ب) ١٢ : ١١ : ٧

(جـ) ١٢ : ٧ : ١١ (د) ١١ : ١٢ : ٧

(٥) في الشكل المقابل :

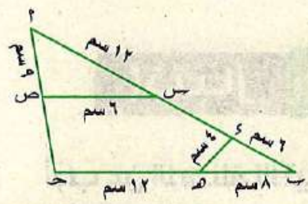


إذا كانت : ب منتصف $\overline{\text{حـ هـ}}$

فإن : ء هـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٦) في الشكل المقابل :



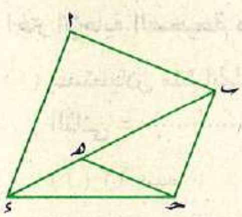
ص حـ = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠

(جـ) ١١ (د) ١٢

السؤال الثاني **٤ درجات** (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء شكل رباعي ، هـ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ حيث :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{ب حـ}}$ ، $\frac{\text{ب ء}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}}$

أثبت أن : (١) $\overline{\text{أ ء}} // \overline{\text{ب حـ}}$ (٢) $\overline{\text{أ ب}} // \overline{\text{حـ هـ}}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 3 حتى درس 3 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٤ : ٩ فإن النسبة بين مساحتيهما ....

(أ) ٤ : ٩ (ب) ٢ : ٣ (جـ) ١٦ : ٨١ (د) ٨ : ١٨

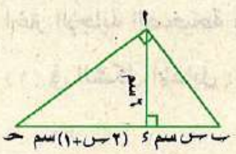
(٢) في الشكل المقابل :

س = ...

(أ) $\frac{١٥}{٢}$ (ب) ٢٧

(جـ) ١٤ (د) $١٠\frac{١}{٢}$

(٣) في الشكل المقابل :

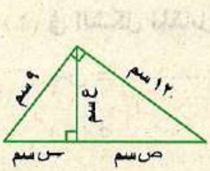


س = ...

(أ) ٤,٥ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٣٦

(٤) في الشكل المقابل :

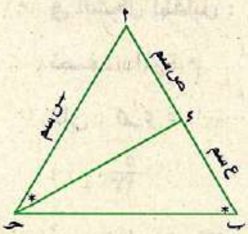


س + ص + ع = ...

(أ) ١٥ (ب) ١٨,٢

(جـ) ٢٢ (د) ٢٢,٢

(٥) في الشكل المقابل :



س^٢ − ص^٢ = ...

(أ) (س − ص)^٢ − ٢ س ص (ب) ع^٢

(جـ) ع ص (د) صفر

(٦) إذا كان Δ س ص ع ~ Δ أ ب جـ ، م (Δ س ص ع) = ٣ م (Δ أ ب جـ)

وكان : س ص = ٣ سم فإن : أ ب = ...

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣$\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) ٣

السـؤال الثاني **٤ درجات**

أ ب جـ د ، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{ص ع}}$

وكان : أ م = ٤ سم ، س ن = ٩ سم

فأثبت أن : مساحة المضلع أ ب جـ د : مساحة المضلع س ص ع ل = ١٦ : ٨١

الدرجة الكلية
....
١٠

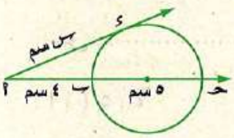
اختبار 4 حتى درس 4 من الوحدة الثالثة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :



س = ...

(أ) $٢\sqrt{٥}$ (ب) ٣٦ (جـ) ٢٠ (د) ٦

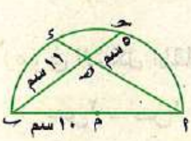
(٢) فى الشكل المقابل :

س = ...

(أ) ٥ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٧

(٣) فى الشكل المقابل :



نصف دائرة م

فإن : هـ ء = ... سم

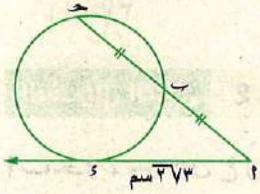
(أ) $\frac{٥٠}{١٣}$ (ب) $\frac{٥٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥٧}{١٣}$ (د) $\frac{٥٩}{١٣}$

(٤) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان ....

(أ) متطابقان. (ب) متساويان فى المساحة.

(جـ) متساويان فى المحيط. (د) متشابهان.

(٥) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة

فإن : أ حـ = ... سم

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣

(جـ) ١٨ (د) ٦

(٦) فى الشكل المقابل :

$\frac{\text{م}(\triangle\text{ أ ب هـ})}{\text{م}(\triangle\text{ حـ ء هـ})}$ = ...

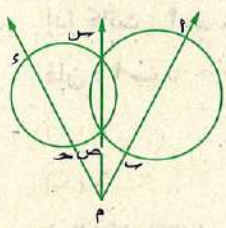
(أ) $\frac{٩}{٤٩}$ (ب) $\frac{٢٥}{٤٩}$ (جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{١٦}{٤٩}$

السؤال الثانى **٤ درجات** (أ) ٢ درجة (ب) ٢ درجة

(أ) أ ب حـ ، ء هـ و مثلثان متشابهان ، س منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، ص منتصف $\overline{\text{هـ و}}$ أثبت أن : $\triangle$ أ ب س ~ $\triangle$ ء هـ ص

(ب) فى الشكل المقابل :



أثبت أن :

النقط أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة.

الدرجة الكلية

١٠

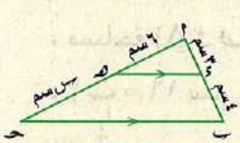
اختبار 5 حتى درس 1 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

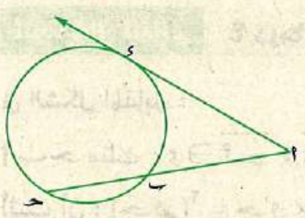


إذا كان : $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٢) فى الشكل المقابل :

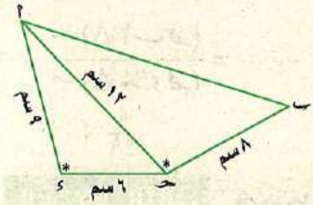


إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ مماسًا للدائرة فإن : $(\text{أ ء})^2$ = ...

(أ) أ ب × ب حـ (ب) أ حـ × أ ب

(جـ) أ ء × أ ب (د) $(\text{أ حـ})^2$

(٣) في الشكل المقابل :



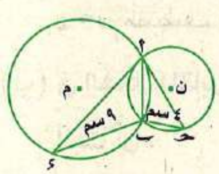
إذا كان : ق (∠ أ ء حـ) = ق (∠ أ حـ ب)

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

(٤) في الشكل المقابل :



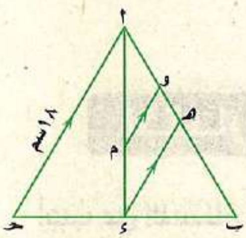
إذا كانت : $\overline{\text{أحـ}}$ مماسة للدائرة م عند أ ، $\overline{\text{أء}}$ مماسة للدائرة ن عند أ

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٧

(٥) في الشكل المقابل :



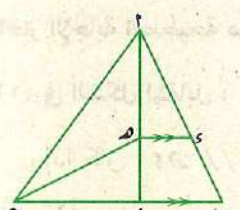
إذا كان م نقطة تلاقى المتوسطات Δ أ ب حـ

، طول $\overline{\text{و م}}$ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٦) في الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة (Δ أ هـ حـ) = ١٥ سم^{٢}

، مساحة (Δ و هـ حـ) = ٩ سم^{٢}

، أ ب = ١٦ سم فإن : أ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) ١٠

(جـ) ١٢ (د) ١٣

السؤال الثاني ٤ درجات

في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث ، ء $\in$ $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{ءو}}$ // $\overline{\text{أهـ}}$

أثبت أن : (حـ هـ)^{٢} = حـ و × حـ ب

الدرجة الكلية
....
١٠

اختبار 6 حتى درس 2 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل إذا كانت الأطوال مقدرة بالسنتيمتر :

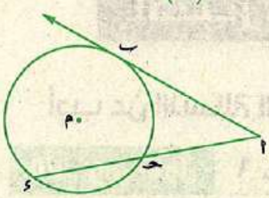
فإن : س + ص = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ٤ (جـ) ٢٠ (د) ٢٤

(٢) إذا كان : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و ، مساحة (Δ أ ب جـ) = ٤ مساحة (Δ د هـ و)

، وكان : د هـ = ٦ سم فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢ (د) ٨



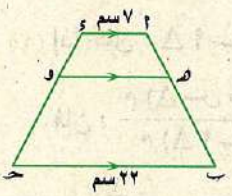
(٣) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م

إذا كان : $(\text{أ ب})^2$ = ...

(أ) أ جـ × جـ د (ب) أ جـ × أ د

(جـ) أ ب × أ جـ (د) أ ب × جـ د



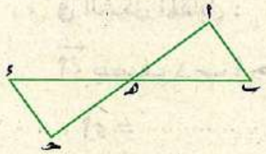
(٤) فى الشكل المقابل :

$\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٢}{٣}$

فإن : هـ و = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١١

(جـ) ١٣ (د) ١٥



(٥) فى الشكل المقابل :

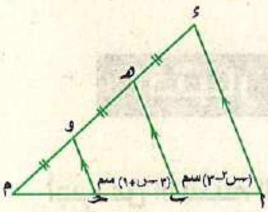
لإثبات أن أ ب جـ د رباعى دائرى

نحتاج إثبات أن ....

(أ) أ ب × أ جـ = د ب × د جـ (ب) أ هـ × أ جـ = ب هـ × ب د

(جـ) ق (∠ أ) = ق (∠ جـ) (د) أ هـ × هـ جـ = ب هـ × هـ د

(٦) فى الشكل المقابل :



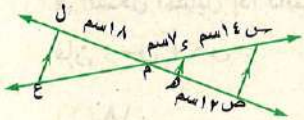
أ م = ... سم

(أ) ٩ س (ب) ٢ $س^{٢}$ + ٤

(جـ) ٣٩ (د) ٢٦

السؤال الثانى **٤ درجات** (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

فى الشكل المقابل :



$\overline{سص}$ // $\overline{ءهـ}$ // $\overline{لع}$

أوجد : (١) طول $\overline{هـم}$ (٢) طول $\overline{مع}$

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 7 حتى درس 3 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول **٦ درجات** كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع وكان : أ ب = ٣ س ص

فإن : $\frac{م(\triangle سصع)}{م(\triangle أبحـ)}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) ٩

(٢) فى الشكل المقابل :

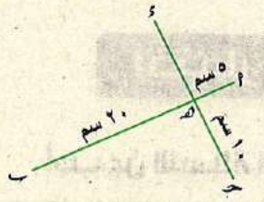
$\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ

، أ ء = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٦٠

(جـ) ٢ $\sqrt{١٥}$ (د) ٧ $\sqrt{٣}$

(٣) فى الشكل المقابل :



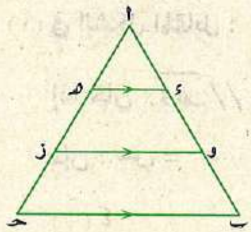
إذا كان : أ ب ∩ جـ د = {هـ}

فإن : النقط أ ، جـ ، ب ، د تقع على دائرة واحدة

إذا كان : هـ د = ...

(أ) ٥ سم　　(ب) ٨ سم　　(جـ) هـ جـ　　(د) هـ ب

(٤) فى الشكل المقابل :

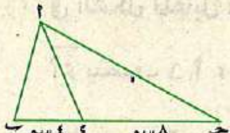


$\frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{و ز}}{\text{ب جـ}}$　　(ب) $\frac{\text{أ د}}{\text{أ و}}$

(جـ) $\frac{\text{هـ ز}}{\text{هـ جـ}}$　　(د) $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$

(٥) فى الشكل المقابل :

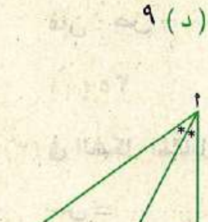


إذا كان : ق (∠ب) = ٢ ق (∠د أ ب) = ٢ ق (∠د أ جـ)

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٤　　(ب) ٦　　(جـ) ٨　　(د) ٩

(٦) فى الشكل المقابل :



أ جـ = ... سم

(أ) ٤　　(ب) ٥

(جـ) ٦　　(د) ٧

السؤال الثانى　٤ درجات

س ص ع مثلث ، نصفت زاوية ص بمنصف قطع س ع فى م ، ثم رسم

م ن // ع ص فقطع س ص فى ن **أثبت أن :** $\frac{\text{س ص}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{س ن}}{\text{ص ن}}$

وإذا كان : س ص = ٦ سم ، ص ع = ٤ سم **فأوجد :** طول س ن

الدرجة الكلية

١٠

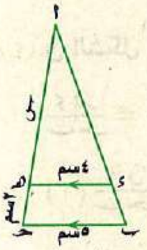
اختبار 8 حتى درس 4 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

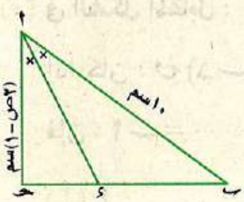


إذا كان : $\overline{ءهـ} \,//\, \overline{بحـ}$

فإن : س = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢) فى الشكل المقابل :



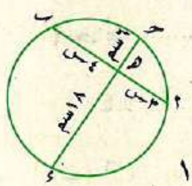
$\overrightarrow{أء}$ ينصف ∠ أ ، $\frac{بء}{ءحـ} = \frac{٥}{٣}$ فإذا كان : أب = ١٠ سم

، أحـ = (٢ ص – ١) سم

فإن : ص = ... سم

(أ) ٣٥ (ب) ٢٥ (جـ) ٣,٥ (د) ٢,٥

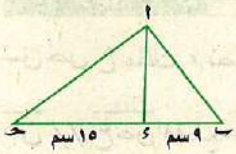
(٣) فى الشكل المقابل :



س = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢ (د) ١٨

(٤) فى الشكل المقابل :



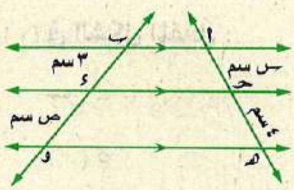
لإثبات أن ق (∠ب أ ء) = ق (∠ء أ حـ)

نحتاج معرفة أن ....

(أ) أب = أحـ (ب) أء = $٢\sqrt{٣٠}$

(جـ) ٣ أحـ = ٥ أب (د) ق (∠ب) = ق (∠حـ)

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $س^٢ + ص^٢ = ٥٧$

فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١٢

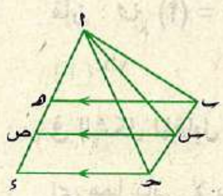
(٦) فى الشكل المقابل :

مساحة △ أ ب ء = ... سم^٢

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨ (جـ) ٥٤ (د) ٧٢

السؤال الثانى ٤ درجات

فى الشكل المقابل :



ب هـ // س ص // جـ ء ، $\frac{أ ب}{أ جـ} = \frac{هـ ص}{ص ء}$

أثبت أن : أ س ينصف ∠ ب أ جـ

الدرجة الكلية

١٠

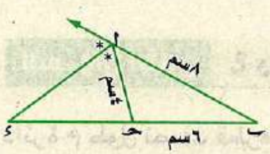
اختبار 9 حتى درس 5 من الوحدة الرابعة

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٦ درجات كل جزئية درجة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

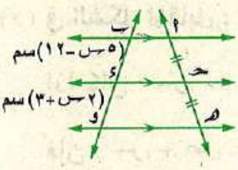


إذا كان : أ ء ينصف الزاوية الخارجة عند أ

فإن : جـ ء = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢) فى الشكل المقابل :

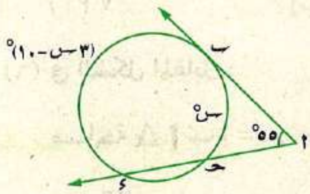


س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣

(جـ) ٧ (د) ٢

(٣) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ مماساً للدائرة

فإن : س = ...

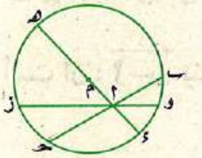
(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ١٥° (د) ٥٥°

(٤) إذا كان : أ م = ٤ سم ، نق = ٣ سم حيث أ نقطة خارج الدائرة م

فإن : $ق_م$ (أ) = ...

(أ) ١٦ (ب) ٩ (جـ) ٢٥ (د) ٧

(٥) فى الشكل المقابل :

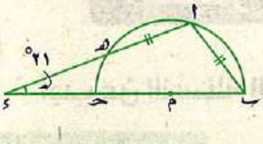


أى مما يأتى لا يساوى $ق_م$ (أ) ؟

(أ) $(أ م)^2 - (ء م)^2$ (ب) $ب أ \times أ جـ$

(جـ) $-ء أ \times أ هـ$ (د) $-و أ \times أ ز$

(٦) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ هـ = أ ب ، $\overline{ب جـ}$ قطر ، ق (∠ ء) = ٢١°

فإن : ق (∠ أ) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ١٠٤°

(جـ) ١٠٦° (د) ١١٠°

السؤال الثانى ٤ درجات (١) ٢ درجة (٢) ٢ درجة

دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، أ نقطة تبعد عن مركزها ٥ سم ، رُسم الوتر $\overline{ب جـ}$ يمر بالنقطة أ بحيث أ ب = ٣ أ جـ

احسب : (١) طول الوتر $\overline{ب جـ}$ (٢) بُعد الوتر $\overline{ب جـ}$ عن مركز الدائرة.

الاختبارات الشهرية

أولًا : نماذج اختبارات شهر أكتوبر.

ثانيًا : نماذج اختبارات شهر نوفمبر.

محتوى امتحان شهر أكتوبر

الجبر

من : حل معادلة الدرجة الثانية فى متغيرواحد بيانيا.

إلى : نهاية قسمة الأعداد المركبة.

حساب المثلثات

من : الزاوية الموجهة.

إلى : نهاية الزوايا المتكافئة.

الهندسة

من : تشابه المضلعات.

إلى : نهاية النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين (نظريه ٣).

محتوى امتحان شهر نوفمبر

الجبر

من : تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية.

إلى : تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها.

حساب المثلثات

من : القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية.

إلى : الدوال المثلثية.

الهندسة

من : النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين (نظرية ٤).

إلى : نظرية تاليس.

اختبار 1

الدرجة الكلية
....
٢٠

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) $\sqrt{-٤} \times \sqrt{-٩} =$ ....

(أ) ٦ (ب) −٦ (ج) ٦ ت (د) −٦ ت

(٢) إذا كان : $س^{٢} - ٢ س + ٤ = ٠$ فإن : س = ...

(أ) ١ ± ٣ ت (ب) $١ \pm \sqrt{٣}$ (ج) $١ \pm \sqrt{٣}$ ت (د) ١ ± ت

(٣) إذا كان : Δ أ ب ج ~ Δ س ص ع وكان : أ ب = ٣ س ص

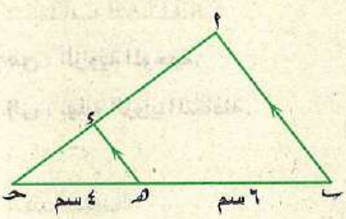
فإن : $\frac{م(\Delta \text{ س ص ع})}{م(\Delta \text{ أ ب ج})} =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٩}$

(٤) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها (-٣٠°) فى الوضع القياسى دورة ونصف ضد اتجاه عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يكون في الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (ج) الثالث. (د) الرابع.

(٥) **فى الشكل المقابل :**



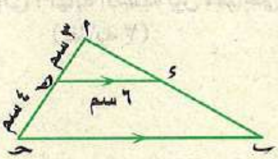
إذا كانت مساحة الشكل أ ب هـ ء = ٤٢ سم^{٢}

فإن مساحة Δ ج هـ ء = ... سم^{٢}.

(أ) ٨ (ب) ١٢

(ج) ١٦ (د) ٢٠

(٦) **فى الشكل المقابل :**



$\overline{ء هـ} // \overline{ب ج}$ ، أ هـ = ٣ سم ، هـ ج = ٤ سم

، ء هـ = ٦ سم فإن : ب ج = ... سم.

(أ) ١٤ (ب) ١٢ (ج) ٢١ (د) ٨

(٧) إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل وكان أ ب = ٣٢ سم

، ب حـ = ٤٠ سم ، س ص = ٣ م − ١ ، ص ع = ٣ م + ١

فإن : م = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٤

(٨) أبسط صورة للعدد التخيلى ت^٣٩ هى ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ت (د) − ت

(٩) إذا كان : س + ص ت = (١ − ٢ ت) (١ + ت) حيث س ، ص ∈ ح

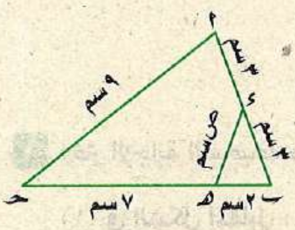
فإن : س + ص = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٣٢ (د) ٤

(١٠) الزاوية التى قياسها −٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٣٠٠° (د) −٣٠٠°

(١١) فى الشكل المقابل :

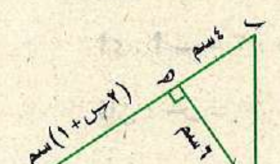


ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٤,٥

(جـ) ٣,٥ (د) ٣

(١٢) فى الشكل المقابل :



س = ...

(أ) ٨ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٤,٨

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

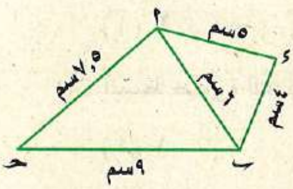
(١) أوجد قيمتى س ، ص الحقيقيتين اللتين تحققان أن :

(٢ + ت) (٢ − ت) / (٤ + ٣ ت) = س + ت ص (درجتان)

(٢) حدد الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها ٣٠° + (٤ ن − ١) × ٩٠°

حيث : ن ∈ ص **(درجتان)**

(٣) فى الشكل المقابل : **(درجتان)**



أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٩ سم

، أ حـ = ٧,٥ سم ، ء نقطة خارجة عن المثلث أ ب حـ

حيث : ء ب = ٤ سم ، ء أ = ٥ سم

أثبت أن : (١) Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ

(٢) $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ينصف ∠ ء ب حـ

(٤) $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$ وتران فى دائرة ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = {هـ} حيث هـ خارج الدائرة **(درجتان)**

، أ ب = ٤ سم ، ء حـ = ٧ سم ، ب هـ = ٦ سم

أثبت أن : Δ أ ء هـ ~ Δ حـ ب هـ ، ثم أوجد : طول $\overline{\text{حـ هـ}}$

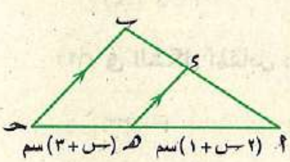
الدرجة الكلية

٢٠

اختبار 2

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : **(١٢ درجة)**

(١) فى الشكل المقابل :

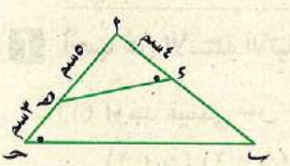


أ ء : أ ب = ٣ : ٥ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٧

(٢) فى الشكل المقابل :



ب ء = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٧

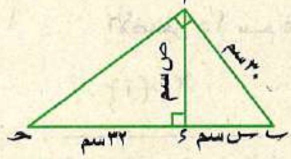
(٣) في الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ حـ)

فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ١٨ (جـ) ٢١ (د) ٢٤

(٤) في الشكل المقابل :



أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

، أ ب = ٣٠ سم ، ء حـ = ٣٢ سم

فإن : س + ص = ...

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨ (جـ) ٤٢ (د) ٥٢

(٥) الزاوية التي قياسها ٥٨٥° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها ....

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(٦) الزاوية التي قياسها −٨٧٠° تقع في الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثاني. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٧) إذا كان : س + ص ت = (١ + ت)^{٤} حيث س ، ص ∈ ح

فإن : س − ص = ...

(أ) ١٦ (ب) −١٦ (جـ) ٤ (د) −٤

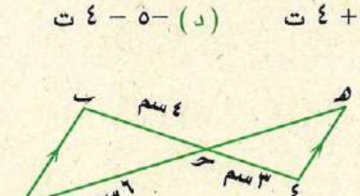
(٨) ٢ + ت + ت^{٢} + ت^{٣} = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) −١ (د) صفر

(٩) (١٢ − ٥ ت^{١٧}) − (٧ − $\sqrt{-٨١}$) = ...

(أ) ٥ − ٤ ت (ب) −٥ + ٤ ت (جـ) ٥ + ٤ ت (د) −٥ − ٤ ت

(١٠) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$ ، حـ ء = ٣ سم

، أ حـ = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم

فإن : حـ هـ = ... سم.

(أ) ٥,٤ (ب) ٤,٥ (جـ) ٨ (د) ٢,٥

(١١) إذا كان : س + ت ص = $\frac{٢٦}{٣ - ٢ ت}$ حيث س ، ص ∈ ع

فإن : س × ص = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ٢٦ (د) ٢٤

(١٢) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط الأصغر ١٥ سم فإن محيط الأكبر .... سم.

(أ) ٢٠ (ب) $\frac{٨٠}{٣}$ (جـ) ٢٧ (د) $\frac{٤٥}{٤}$

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) حل المعادلة : $س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$ فى مجموعة الأعداد المركبة. (درجتان)

(٢) اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان فى الضلع النهائى للزاوية التى قياسها (-١٣٥°) (درجتان)

(٣) أ ب حـ مثلث ، أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{أ ب}$

حيث : أ هـ = ٢ سم ، ء ∈ $\overline{ب حـ}$ حيث : ب ء = ٤ سم

(١) برهن أن : △ ب ء هـ ~ △ ب أ حـ واستنتج : طول $\overline{ء هـ}$

(٢) أثبت أن : الشكل أ حـ ء هـ رباعى دائرى. (درجتان)

(٤) مثلثان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتيهما ١٣٠ $سم^٢$.

أوجد مساحة كل منهما. (درجتان)

ثانيًا نماذج اختبارات شهر نوفمبر

الدرجة الكلية

....

٢٠

اختبار 1

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) الزاوية التى قياسها الدائرى ($\frac{٧ \pi}{٦}$) يكون قياسها الستينى ....

(أ) ٢٢٥° (ب) ٢١٠° (جـ) ٨٤٠° (د) −٢٢٥°

(٢) إذا كان أحد جذور المعادلة : سـ^٢ − ٣ سـ + حـ = ٠ ضعف الجذر الآخر

فإن : حـ = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٤

(٣) فى الشكل المقابل :

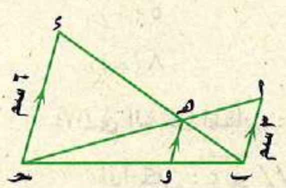
$\overline{أب}$ مماسة للدائرة عند ب ، حـ منتصف $\overline{أء}$

، أب = ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن : أء = ... سم

(أ) ٢ $\sqrt{٦}$ (ب) ٥ $\sqrt{٦}$

(جـ) ٥ (د) ٢,٥ $\sqrt{٦}$

(٤) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{أب}$ // $\overline{هـو}$ // $\overline{حـء}$

فإن : هـ و = ... سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٢

(جـ) ١,٥ (د) ١

(٥) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : سـ^٢ − ٥ سـ + ٧ = ٠ .

فإن المعادلة التى جذراها : ل^٢ ، م^٢ هى ....

(أ) سـ^٢ + ١١ سـ + ٤٩ = ٠ . (ب) سـ^٢ − ١١ سـ + ٤٩ = ٠ .

(جـ) سـ^٢ − ٤٩ سـ + ١١ = ٠ . (د) سـ^٢ + ١١ سـ − ٤٩ = ٠ .

(٦) جذرا المعادلة : سـ (سـ − ٢) = ٥ يكونان ....

(أ) مركبين غير حقيقيين. (ب) حقيقيين متساويين.

(جـ) حقيقيين مختلفين. (د) ٢ ، ٠ .

(٧) مضلعان متشابهان مجموع مساحتى سطحيهما ٢٢٥ سم^{٢} والنسبة بين محيطيهما ٤ : ٣ فإن مساحة المضلع الأكبر = ... سم^{٢}

(أ) ٨١ (ب) ١٤٤ (جـ) $١٢٨ \frac{٤}{٧}$ (د) $٩٦ \frac{٣}{٧}$

(٨) إذا كانت : $\theta \in] \cdot ، \frac{\pi}{٢} [$ ، جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$

فإن : قتا θ جا θ − ظا θ قتا θ = ...

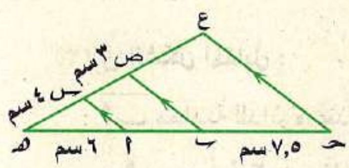
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $-\frac{٣}{٢}$ (د) $-\frac{٢}{٣}$

(٩) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} − ٥ س − ٦ = ٠

فإن القيمة العددية للمقدار : ل^{٢} − ٥ ل + ٣ = ...

(أ) −٦ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٣

(١٠) فى الشكل المقابل :

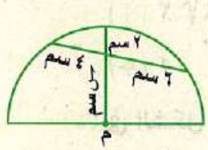


أ ب + ص ع = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٣

(جـ) ١١ (د) ٩,٥

(١١) فى الشكل المقابل :

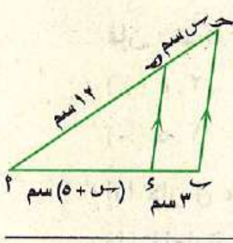


نصف دائرة مركزها م فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٧

(جـ) ٨ (د) ١٢

(١٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٩

(جـ) ١٢ (د) ٣

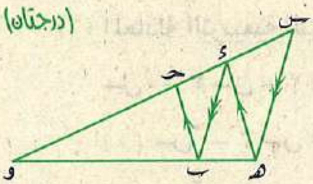
٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أثبت أن جذرى المعادلة : ٧ س^{٢} − ١١ س + ٥ = ٠ مركبان غير حقيقيين ، ثم أوجد هذين الجذرين باستخدام القانون العام. (درجتان)

(٢) إذا كانت س $\in$ [٠° ، ٩٠°] فأوجد قيمة س التى تحقق المعادلة :

جا س = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° (درجتان)

(٣) فى الشكل المقابل : (درجتان)



$\overline{هـ ء} // \overline{ب حـ}$ ، $\overline{ء ب} // \overline{هـ س}$

أثبت أن : $\left(\frac{و ب}{و هـ}\right)^{٢} = \frac{و حـ}{و س}$

(٤) $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{هـ\}$ ، أهـ $= \frac{٥}{١٢}$ ب هـ ، ء هـ $= \frac{٣}{٥}$ هـ حـ ،

إذا كان : ب هـ = ٦ سم ، حـ هـ = ٥ سم

أثبت أن : النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة. (درجتان)

اختبار 2

الدرجة الكلية

٢٠

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة : (١٢ درجة)

(١) إذا كانت النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ١٦ : ٢٥

فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما = ...

(أ) ٢ : ٥ (ب) ٤ : ٥ (جـ) ١٦ : ٢٥ (د) ١٦ : ٤١

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : ٤ س^{٢} − ١٢ س + م = ٠ متساويين

فإن : م = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) ١٦

(٣) طول القوس الذى يقابل زاوية مركزية قياسها ١٥٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٨ سم

يساوى .... سم

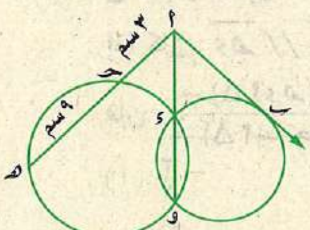
(أ) $\frac{٢٠}{٣}$ π (ب) $\frac{١٧}{٢}$ π (جـ) ٨ π (د) ٢٠

(٤) إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : س^{٢} − ٧ س + ٣ = ٠

فإن : ل^{٢} + م^{٢} = ...

(أ) ٧ (ب) ٤٣ (جـ) ٥٨ (د) ٧٩

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أحـ = ٣ سم ، حـ هـ = ٩ سم

فإن : أب = ... سم

(أ) ٢٧ (ب) ٣٦

(جـ) ٩ (د) ٦

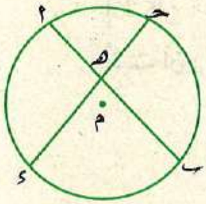
(٦) المعادلة التربيعية التى كل من جذريها يزيد بمقدار ٢ عن كل من جذرى المعادلة :

س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠ هى ....

(أ) س^{٢} − ٣ س + ٢ = ٠ (ب) س^{٢} + ٧ س + ١٢ = ٠

(جـ) س^{٢} − ٧ س + ١٢ = ٠ (د) س^{٢} − ٧ س − ١٢ = ٠

(٧) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب} \cap \overline{حـء} = \{هـ\}$ ، أهـ = ٤ سم ، هـب = ٦ سم

، ءهـ = (س + ١) سم ، حـهـ = (س − ١) سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٧

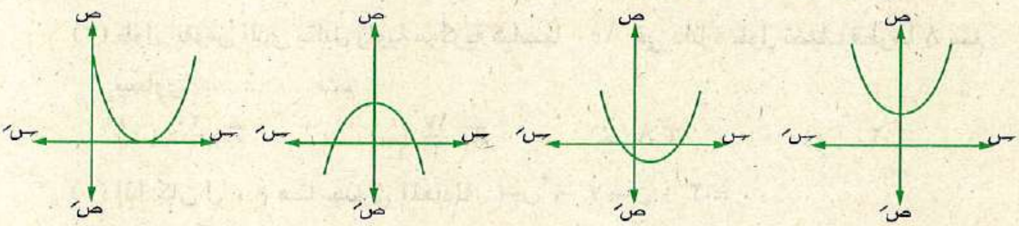
(٨) إذا كانت : س ∈ [٠° ، ٩٠°] وكان جتا س = $\frac{جا ٦٠°}{جا ٩٠°} - \frac{جا ٠}{جا ٤٥°}$

فإن : س = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٠° (د) ٩٠°

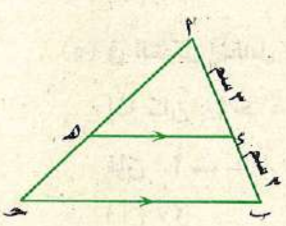
(٩) كل من الأشكال الآتية يمثل منحنى الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ

فى أى من الأشكال يكون ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠ ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

(١٠) فى الشكل المقابل :



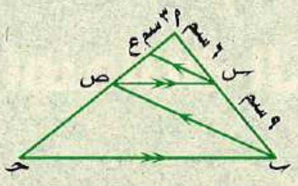
إذا كان : $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

فإن : $\frac{م (\Delta أءهـ)}{م (\Delta أبحـ)}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٩}{٤}$

(جـ) $\frac{٩}{٢٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

(١١) في الشكل المقابل :



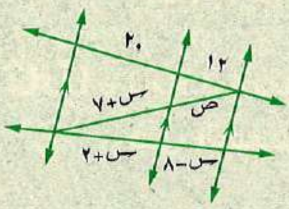
$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{ب ص}}$

، أ س = ٦ سم ، س ب = ٩ سم ، أ ع = ٣ سم

فإن : ع حـ = ... سم

(أ) ٤,٥ (ب) $١٥\frac{٣}{٤}$ (جـ) ١٥ (د) $١٢\frac{٣}{٤}$

(١٢) في الشكل المقابل :



إذا كانت الأطوال مقدرة بالسنتيمتر

فإن : س + ص = ... سم

(أ) ٢٣ (ب) ١٨

(جـ) ٤١ (د) ٥١

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : ٢ س^٢ − ٣ س − ١ = ٠

كوّن المعادلة التربيعية التى جذراها : $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$ (درجتان)

(٢) إذا كانت : $\theta \in]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi[$ ، جا $\theta = \frac{-٢٤}{٢٥}$ فأوجد : جا θ − قا θ ظا θ

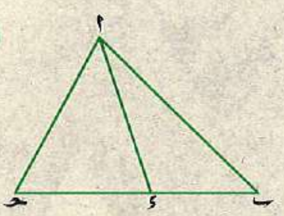
(درجتان)

(٣) أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ

فإذا كان : أ هـ = ٦ سم ، ب هـ = ١٣ سم ، هـ حـ = ١٠ سم

، هـ ء = ٧,٨ سم أثبت أن : الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف. (درجتان)

(٤) في الشكل المقابل : (درجتان)



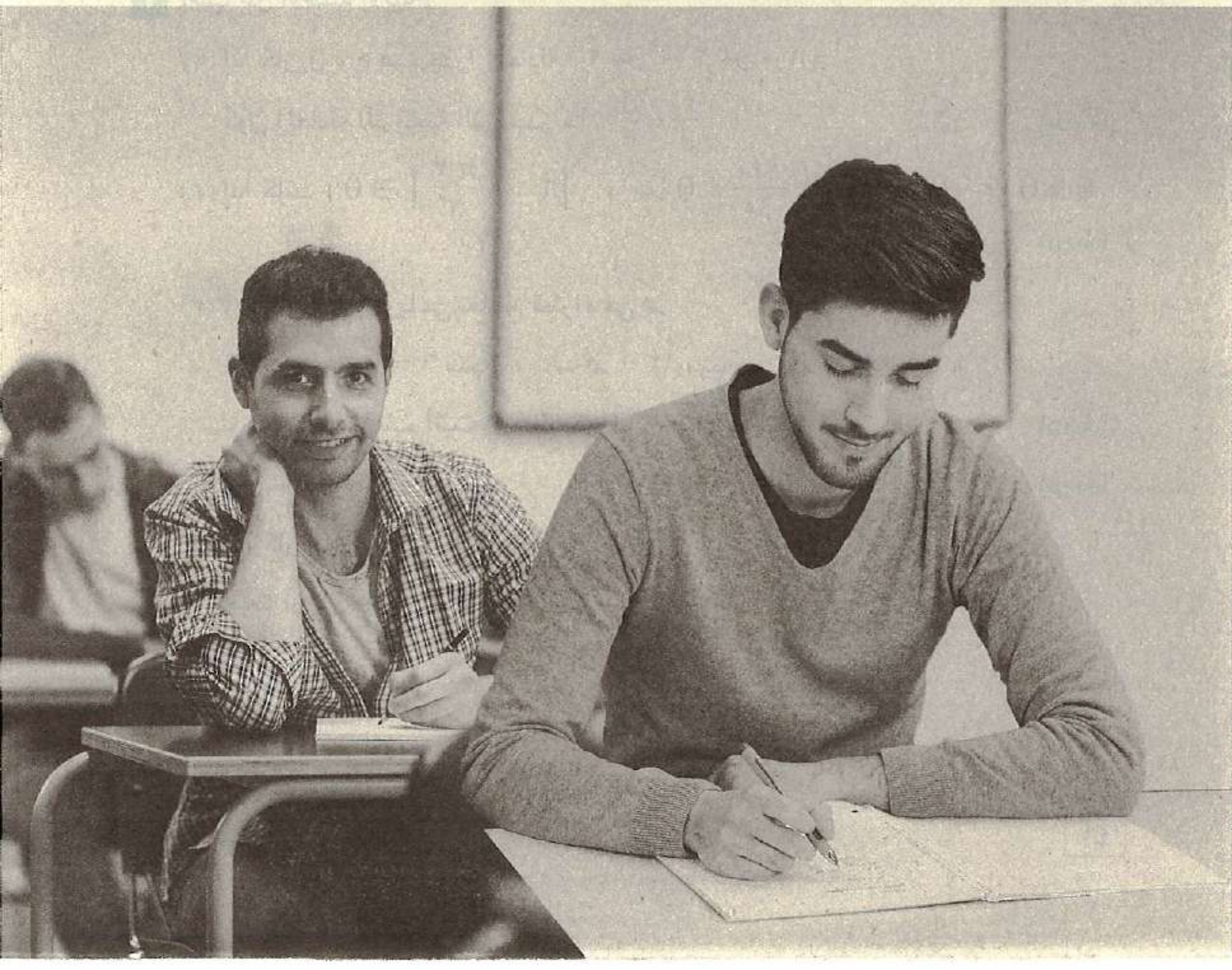
إذا كان : (أ حـ)^٢ = حـ ء × حـ ب

أثبت أن : △ أ حـ ء ~ △ ب حـ أ

امتحانات الكتاب المدرسى

أولًا : نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر وحساب المثلثات.

ثانيًا : نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الهندسة.



النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ل ، م جذرى المعادلة : $س^٢ - ٧ س + ٣ = ٠$ فإن : ل + م = ...

(أ) ‎-٣ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ‎-٧

(٢) إذا كانت : جا θ = ‎-١ ، جتا θ = ٠ فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) ٢π

(٣) المعادلة التربيعية التى جذراها : ٢ - ٣ ت ، ٢ + ٣ ت هى ....

(أ) $س^٢ + ٤ س + ١٣ = ٠$ (ب) $س^٢ - ٤ س + ١٣ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ٤ س - ١٣ = ٠$ (د) $س^٢ - ٤ س - ١٣ = ٠$

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $س^٢ - (م + ٢) س + ٣ = ٠$ معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر فإن : م = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ‎-٢ (د) ‎-٣

---

2 أكمل ما يأتى :

(١) الدالة د حيث د (س) = - (س - ١) (س + ٢) موجبة فى الفترة ....

(٢) الزاوية التى قياسها ٩٣٠° تقع فى الربع ....

(٣) إذا كان : جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن : θ = ...

(٤) المعادلة التربيعية التى جذراها ضعف جذرى المعادلة : $٢ س^٢ - ٨ س + ٥ = ٠$ هى ....

---

3 (أ) ضع العدد : $\frac{٢ - ٣ ت}{٣ + ٢ ت}$ فى صورة عدد مركب حيث : $ت^٢ = -١$

(ب) إذا كان : ٤ جا θ - ٣ = ٠ . أوجد : θ حيث θ ∋] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

٤ (أ) إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د (س) = − س^{٢} + ٨ س − ١٥

(١) ارسم منحنى الدالة فى الفترة [١ ، ٧]

(٢) عيِّن من الرسم إشارة هذه الدالة.

(ب) إذا كان : س = ٣ + ٢ ت ، ص = $\frac{٤ - ٢ ت}{١ - ت}$

فأوجد : س + ص فى صورة عدد مركب.

---

٥ (أ) أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : س^{٢} + ٣ س − ٤ ≥ ٠

(ب) إذا كان : طا θ = $\frac{٣}{٤}$ حيث ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

فأوجد قيمة : جا (٣٦٠° − θ) − جا (٩٠° − θ)

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(١) أبسط صورة للعدد التخيلى ت^{٤٣} = ...

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} − ٦ س + ل = ٠ حقيقيين متساويين فإن : ل = ...

(٣) إذا كان : ٠° < θ < ٩٠° وكان جا ٢ θ = جتا ٣ θ فإن : ق (∠ θ) = ...

(٤) مدى الدالة د حيث د (θ) = $\frac{٣}{٢}$ جا θ هو ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة : س^{٢} (س − ١) (س + ١) = ٠ من الدرجة ....

(أ) الأولى. (ب) الثانية. (جـ) الثالثة. (د) الرابعة.

(٢) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} + ٣ س − م = ٠ حقيقيين مختلفين فإن : م = ...

(أ) −٢ (ب) −٣ (جـ) −٤ (د) −٥

(٣) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى ١٨٠° (ن − ٢) حيث ن عدد الأضلاع فإن قياس زاوية المثمن المنتظم بالقياس الدائرى يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٤) إذا كان : ٢ جا θ = − $\sqrt{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{٣\pi}{٢}$ فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٦\pi}{٧}$ (جـ) $\frac{٤\pi}{٣}$ (د) $\frac{٧\pi}{٦}$

---

٣ (أ) **أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة : ٤ ك س^{٢} + ٧ س + ك^{٢} + ٤ = ٠**

هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

(ب) إذا كان : جا θ = جا ٧٥٠° جتا ٣٠٠° + جا (−٦٠°) ظتا ١٢٠° حيث : ٠° < θ < ٣٦٠°

فأوجد : ق (د θ)

---

٤ (أ) (١) **أوجد قيمتى أ ، ب اللتين تحققان المعادلة : ١٢ + ٣ أ ت = ٤ ب − ٢٧ ت**

(٢) **أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : س (س + ١) − ٢ ≤ ٠**

(ب) زاوية مركزية قياسها θ مرسومة فى دائرة طول نصف قطرها ١٨ سم وتحصر قوسًا طوله ٢٦ سم أوجد θ بالقياس الستينى.

---

٥ (أ) إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية (١ + ٢ + ٣ + ... + ن) يعطى بالعلاقة :

حـ = $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن) فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا ٢١٠ ؟

(ب) إذا كان : جا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث : ٩٠° < θ < ١٨٠°

فأوجد : جا (١٨٠° − θ) + ظا (٣٦٠° − θ) + ٢ جا (٢٧٠° − θ)

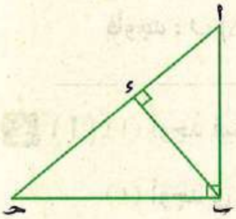
النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(١) المضلعان المشابهان لثالث يكونان ....

(٢) فى الشكل المقابل :



أولًا : $(\text{أب})^2$ = أء × ....

، $(\text{حـب})^2$ = حـأ × ....

ثانيًا : ءأ × ءحـ = ...

ثالثًا : أب × بحـ = ... × ....

---

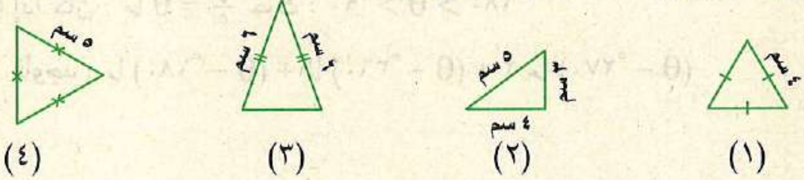
٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مستطيلان متشابهان الأول طوله ٥ سم والثانى طوله ١٠ سم

، فإن النسبة بين محيط الأول إلى محيط الثانى تساوى ....

(أ) ١ : ٥ (ب) ١ : ٣ (جـ) ١ : ٢ (د) ٢ : ١

(٢) أى مثلثين من المثلثات الآتية متشابهان ؟



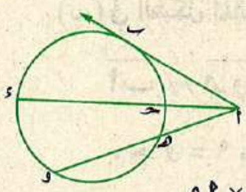
(١) (٢) (٣) (٤)

(أ) (١) ، (٤) (ب) (٢) ، (٤) (جـ) (١) ، (٣) (د) (٣) ، (٤)

(٣) إذا كانت النسبة بين محيطى مثلثين متشابهين ١ : ٤ فإن النسبة بين مساحتى سطحيهما تساوى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (جـ) ١ : ٨ (د) ١ : ١٦

(٤) في الشكل المقابل :



كل التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

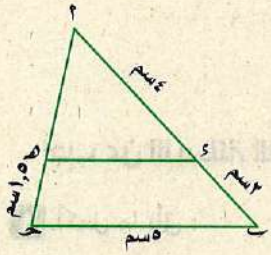
ما عدا العبارة ....

(أ) $(\text{أب})^2$ = أحـ × أء　　(ب) $(\text{أب})^2$ = أهـ × أو

(جـ) أحـ × أء = أهـ × أو　　(د) أحـ × حـء = أهـ × هـو

---

٣ (أ) في الشكل المقابل :



Δ أءهـ ~ Δ أبحـ أثبت أن : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$

وإذا كان : أء = ٤ سم ، ءب = ٢ سم

، هـحـ = ١,٥ سم ، بحـ = ٥ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{أهـ}}$ ، $\overline{\text{ءهـ}}$

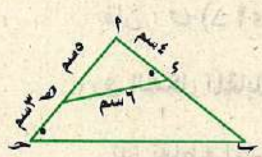
(ب) أبحـ مثلث ، ء $\in$ $\overline{\text{بحـ}}$ بحيث : بء = ٥ سم ، ءحـ = ٣ سم ، هـ $\in$ $\overline{\text{أحـ}}$

بحيث : أهـ = ٢ سم ، حـهـ = ٤ سم

أثبت أن : Δ ءهـحـ ~ Δ أبحـ ثم أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما.

---

٤ (أ) في الشكل المقابل :

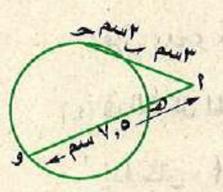


ق(∠أءهـ) = ق(∠حـ) ، أء = ٤ سم ، أهـ = ٥ سم

، ءهـ = ٦ سم ، هـحـ = ٣ سم

أوجد : طول كل من $\overline{\text{ءب}}$ ، $\overline{\text{بحـ}}$

(ب) في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{حـب}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{وهـ}}$ = {أ} ، أب = ٣ سم

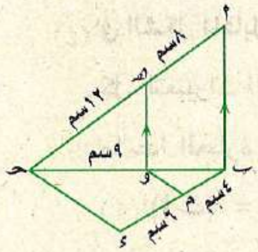
، بحـ = ٢ سم ، أو = ٧,٥ سم

أوجد : طول $\overline{\text{هـو}}$

---

٥ (أ) $\overline{\text{أء}}$ متوسط في المثلث أبحـ ، نصفت ∠أءب بمنصف قطع $\overline{\text{أب}}$ في هـ ، نصفت ∠أءحـ بمنصف قطع $\overline{\text{أحـ}}$ في و ، رسم $\overline{\text{هـو}}$ أثبت أن : $\overline{\text{هـو}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$

(ب) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب} // \overline{هـ و}$ ، أهـ = ٨ سم ، جـ هـ = ١٢ سم

، جـ و = ٩ سم ، ب م = ٤ سم ، د م = ٦ سم

(١) أوجد : طول $\overline{ب و}$

(٢) أثبت أن : $\overline{و م} // \overline{جـ د}$

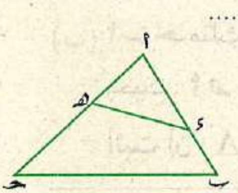
النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أكمل ما يأتى :

(١) أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان ....

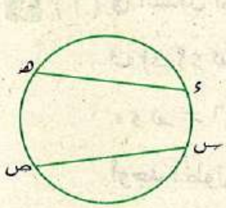
(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

فإن : ق (∠ أ د هـ) = ق (∠ ....)

(٣) فى الشكل المقابل :

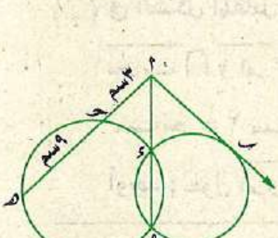


إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين

$\overline{د هـ}$ ، $\overline{س ص}$ فى نقطة ن

فإن : ن د × ن هـ = ...

(٤) فى الشكل المقابل :



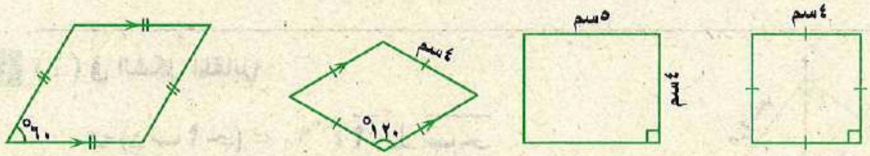
إذا كان : أ جـ = ٣ سم

، جـ هـ = ٩ سم

فإن : أ ب = ...

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى مضلعين من المضلعات الآتية متشابهان ؟



(١) (٢) (٣) (٤)

(أ) المضلعان (١) ، (٢) (ب) المضلعان (١) ، (٣)

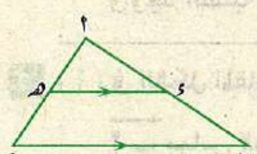
(جـ) المضلعان (٣) ، (٤) (د) المضلعان (٢) ، (٤)

(٢) إذا كانت النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ١٦ : ٢٥

فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما تساوى ....

(أ) ٢ : ٥ (ب) ٤ : ٥ (جـ) ١٦ : ٢٥ (د) ١٦ : ٤١

(٣) فى الشكل المقابل :



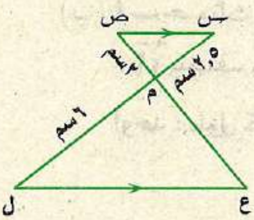
جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة

ما عدا التعبير ....

(أ) $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$ (ب) $\frac{\text{أد}}{\text{دب}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بحـ}}$

(جـ) $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أحـ}}$ (د) $\frac{\text{أب}}{\text{دب}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{هـحـ}}$

(٤) فى الشكل المقابل :



طول $\overline{\text{مع}}$ يساوى ....

(أ) ٣,٦ سم (ب) ٤ سم

(جـ) ٤,٢ سم (د) ٤,٨ سم

٣ (أ) فى الشكل المقابل :

Δ أبحـ ~ Δ أهـد

أثبت أن الشكل بحـهـد رباعى دائرى

وإذا كان : أد = ٣ سم ، بد = ٢ سم ، أهـ = ٢,٥ سم

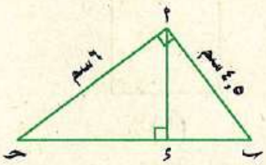
أوجد : طول $\overline{\text{هـحـ}}$

(ب) أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ ، رسم $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{حـ ب}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ فى و

، رسم $\overleftrightarrow{هـ م}$ // $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ويقطع $\overline{أ ء}$ فى م **أثبت أن :** $\overline{و م}$ // $\overline{ب ء}$

---

٤ **(أ) فى الشكل المقابل :**



ق (∠ ب أ حـ) = ٩٠° ، $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

، أ ب = ٤,٥ سم ، أ حـ = ٦ سم

أوجد : طول كل من $\overline{ب ء}$ ، $\overline{ء حـ}$ ، $\overline{أ ء}$

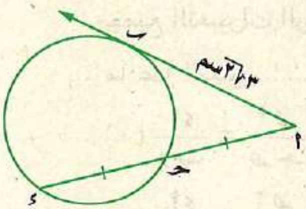
(ب) أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : ب حـ = ٢٧ سم ، أ ب = ١٢ سم ، أ ء = ٨ سم

، ء حـ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٨ سم **أثبت أن :** Δ ب أ حـ ~ Δ أ ء حـ

وأوجد النسبة بين مساحتى سطحيهما.

---

٥ **(أ) فى الشكل المقابل :**



$\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة ، حـ منتصف $\overline{أ ء}$

، أ ب = ٣√٢ سم

أوجد : طول $\overline{أ حـ}$

(ب) أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = ٨ سم ، أ حـ = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم

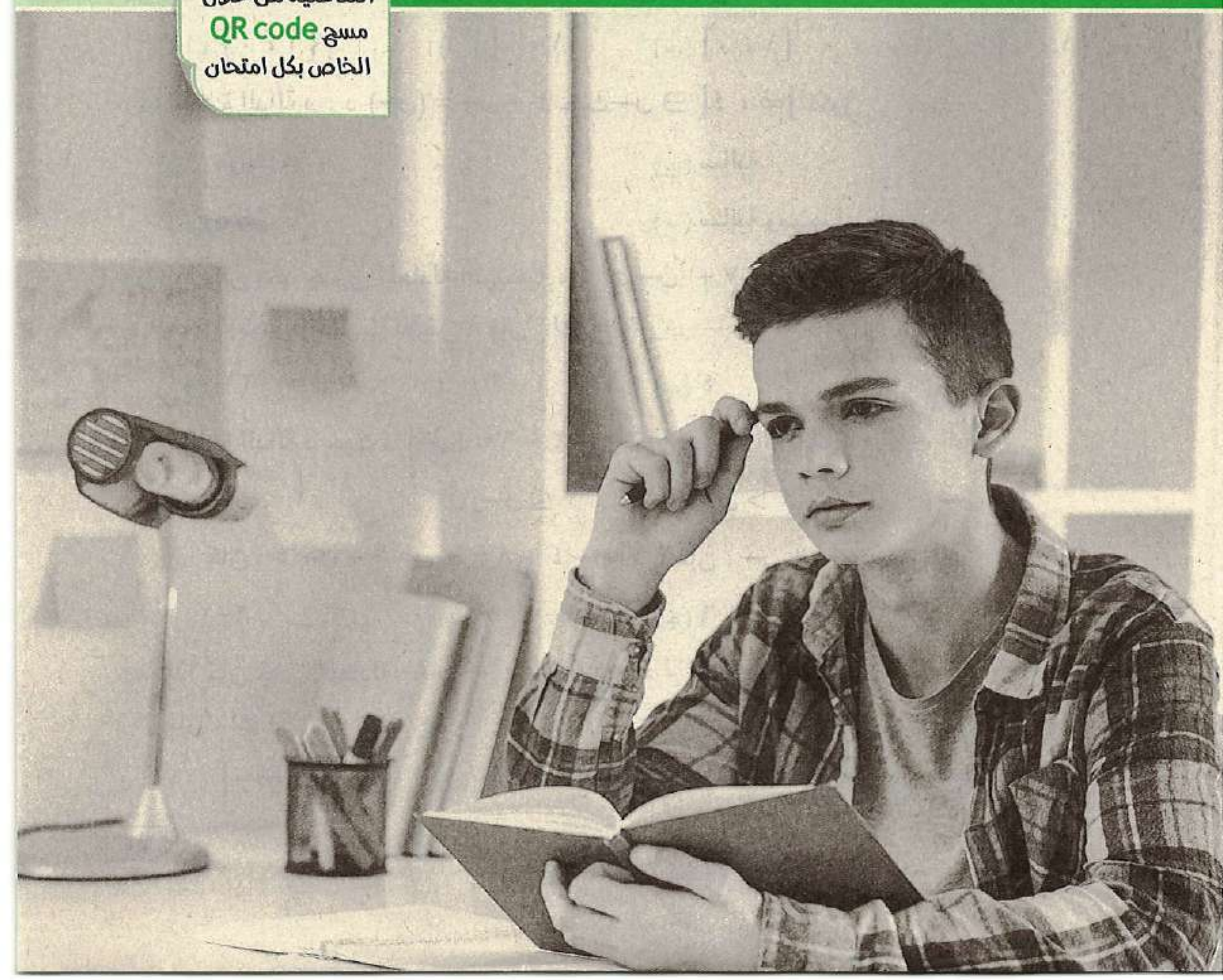
، $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف ∠ أ ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى ء ، رسم $\overleftrightarrow{ء هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب أ}$ ويقطع $\overline{أ حـ}$ فى هـ

أوجد : طول كل من $\overline{ب ء}$ ، $\overline{حـ هـ}$

الامتحانات النهائية

امتحانات بعض مدارس المحافظات

يمكنك حل
الامتحانات
التفاعلية من خلال
مسح QR code
الخاص بكل امتحان



١ محافظة القاهرة

إدارة حدائق القبة
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ①

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : سـ^{٢} + ٩ = ٠ فى ح هى ....

(أ) {−٣} (ب) {٣} (جـ) {−٣ت ، ٣ت} (د) $\varnothing$

(٢) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : سـ^{٢} + ٣ سـ − ٤ = صفر

فإن : ل م = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٤ (د) −٤

(٣) مجموعة حل المتباينة : سـ (سـ − ١) > ٠ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ١} (ب)]٠ ، ١[(جـ) [٠ ، ١] (د) ح − [٠ ، ١]

(٤) إشارة الدالة د : د (سـ) = سـ − ٤ حيث سـ ∋]٤ ، ∞[تكون ....

(أ) موجبة. (ب) سالبة.

(جـ) صفر. (د) سالبة وموجبة معاً.

(٥) إذا كان أحد جذرى المعادلة التربيعية : ٤ ك سـ^{٢} + ٧ سـ + ك^{٢} + ٤ = صفر

هو المعكوس الضربى للآخر فإن : ك = ...

(أ) ± ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢

(٦) إشارة الدالة د حيث د (سـ) = ٦ − ٢ سـ تكون موجبة إذا كانت ....

(أ) سـ > ٢ (ب) سـ ≥ ٣ (جـ) سـ < ٣ (د) سـ = ٣

(٧) إذا كان : ٤ سـ + ٢ ص ت = ٨ + ٤ سـ ت فإن : سـ + ص = ...

(أ) −٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٤

(٨) إذا كان جذرا المعادلة : سـ^{٢} + ٤ سـ + ك = ٠ حقيقيين مختلفين

فإن : ك ∋ ....

(أ)]−∞ ، ٤[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤] (د) {٤}

(٩) الزاوية التى قياسها $\frac{\pi ٣١}{٦}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (ج) الثالث. (د) الرابع.

(١٠) الزاوية التى قياسها ٥٨٥° تكافئ فى الوضع القياسى الزاوية التى قياسها ....

(أ) $\frac{١}{٤}\pi$ (ب) $\frac{٥}{٤}\pi$ (ج) $\frac{٣}{٤}\pi$ (د) $\frac{٧}{٤}\pi$

(١١) إذا كان القياس الستينى لزاوية هو ٤٨َ ٦٤ْ فإن قياسها الدائرى هو ....

(أ) ٠,١٨ ء (ب) ٠,٣٦ ء (ج) ١١,٣ ء (د) $\frac{٩}{٢٥}\pi$

(١٢) إذا كان : ٢ جا $\theta = -\sqrt{٣}$ ، $\pi < \theta < \frac{\pi ٣}{٢}$ فإن : $\theta =$ ....

(أ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi ٦}{٧}$ (ج) $\frac{\pi ٤}{٣}$ (د) $\frac{\pi ٧}{٦}$

(١٣) إذا كان : جا θ = جتا θ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : ظا ٢ θ = ...

(أ) ١ (ب) −١ (ج) غير معرف. (د) $\sqrt{٣}$

(١٤) مدى الدالة د : د (θ) = ٣ جا ٢ θ هو ....

(أ) [−٢ ، ٢] (ب)]−٢ ، ٢[(ج) [−٣ ، ٣] (د)]−٣ ، ٣[

(١٥) العبارة الصحيحة فيما يلى هى ....

(أ) جميع المثلثات المتساوية الساقين متشابهة.

(ب) جميع المثلثات القائمة الزاوية متشابهة

(ج) جميع المربعات متشابهة.

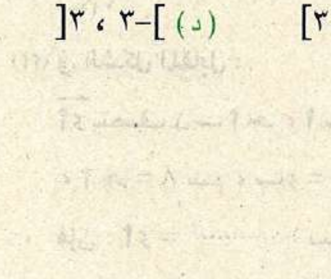
(د) جميع المضلعات المنتظمة متشابهة.

(١٦) إذا كان : Δ أب‌ح ~ Δ ءهـو ، أب = ٣ سم ، ءهـ = ٦ سم ، هـو = ٨ سم

فإن : ب‌ح = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (ج) ٢ (د) ١,٥

(١٧) فى الشكل المقابل :



أب = ٧ سم ، ب‌هـ = ٥ سم ، ءهـ = ٦ سم

فإن : طول $\overline{\text{حء}}$ = ... سم.

(أ) ٦ (ب) ٥

(ج) ٤ (د) ٣

(١٨) المضلعان المتشابهان يكونان متطابقين إذا كان معامل التشابه ك يحقق ....

(أ) ك = $\frac{١}{٢}$ (ب) ك = ١ (جـ) ك > ١ (د) ٠ < ك < ١

(١٩) المثلث الذى قياسا زاويتين فيه : ٥٠° ، ٧٠° يشابه المثلث الذى قياسا زاويتين فيه ٥٠° ، ....°

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٥٥ (د) ٤٠

(٢٠) إذا كانت النسبة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين ١٦ : ٢٥ فإن النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما تساوى ....

(أ) ٢ : ٥ (ب) ٤ : ٥ (جـ) ١٦ : ٢٥ (د) ١٦ : ٤١

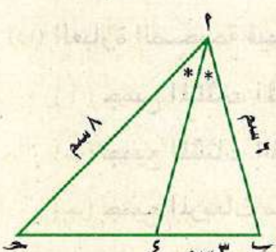
(٢١) فى الشكل المقابل :

س = ... سم.

(أ) ٣,٥ (ب) ١٤

(جـ) ٦ (د) ١٢

(٢٢) فى الشكل المقابل :



$\overrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، أ ب = ٦ سم

، أ جـ = ٨ سم ، ب د = ٣ سم

فإن : أ د = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥

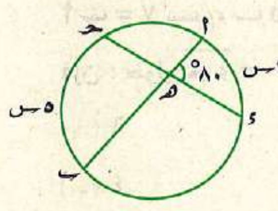
(جـ) ٦ (د) ٨

(٢٣) إذا كان : أ م = ١٢ سم ، نق = ٩ سم ، حيث أ نقطة خارج الدائرة م

فإن : $ق_م$ (أ) = ...

(أ) ٦٥ (ب) ٦٣ (جـ) ٤٩ (د) ٧

(٢٤) فى الشكل المقابل :

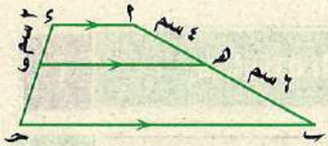


س = ...

(أ) ١٠° (ب) ٢٠°

(جـ) ٣٠° (د) ٤٠°

(٢٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أء // هـو // ب ح

، أهـ = ٤ سم ، هـ ب = ٦ سم

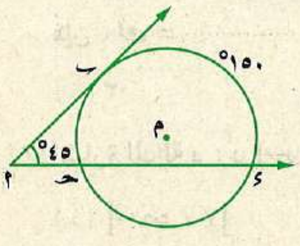
، ء و = ٢ سم فإن : طول ح و = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(٢٦) قياس الزاوية بين المنصفين الداخلى والخارجى لزاوية رأس المثلث يساوى ....

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{٣\pi}{٢}$

(٢٧) فى الشكل المقابل :



أب قطعة مماسة للدائرة عند ب

، أح يقطع الدائرة فى ح ، ء

، ق (∠ أ) = ٤٥° ، ق (ء ب⌒) = ١٥٠°

فإن : ق (ب ح⌒) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

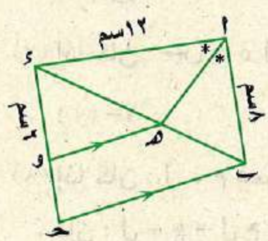
أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا عُلم أن جذرى المعادلة : $س^٢ - ٨ س + ٥ = ٠$ هما ل ، م

فكون المعادلة التى جذراها : $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

---

٢ فى الشكل المقابل :



أ ب ح ء شكل رباعى فيه : أب = ٨ سم ، أء = ١٢ سم

، أهـ ينصف ∠ أ ويقطع ب ء فى هـ

، هـ و // ب ح

ويقطع ء ح فى و ، فإذا كان : ء و = ٦ سم

أوجد : طول ء ح

٢ محافظة الجيزة

إدارة بولاق الدكرور
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ٢

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مرافق العدد ٣ ت − ٤ هو ....

(أ) ٣ ت + ٤ (ب) −٣ ت − ٤ (جـ) −٣ ت + ٤ (د) ٣ ت

(٢) إذا كان أحد جذرى المعادلة : سـ^{٢} + (ك − ٥) سـ − ٣ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٥ (د) −٥

(٣) اشارة الدالة د : د (سـ) = ٧ − سـ تكون سالبه فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ٧[(ب)]−∞ ، ∞[(جـ)]٧ ، ∞[(د)]−٧ ، ٧[

(٤) المعادلة التربيعية التى جذراها : ٣ ت ، −٣ ت هى ....

(أ) سـ^{٢} − ٩ = ٠ (ب) سـ^{٢} + ٦ سـ + ٩ = ٠
(جـ) سـ^{٢} + ٦ = ٠ (د) سـ^{٢} + ٩ = ٠

(٥) ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} = ...

(أ) ١ (ب) ت (جـ) صفر (د) −ت

(٦) مجموعة حل المتباينة : سـ^{٢} + ٤ < صفر فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) [−٢ ، ٢] (جـ)]−٢ ، ٢[(د) ح

(٧) إذا كان : سـ = ٥ أحد جذرى المعادلة : سـ^{٢} + م سـ = ٢ م + ٤ فإن : م = ...

(أ) −٧ (ب) ٧ (جـ) $\frac{٢٩}{٢}$ (د) −$\frac{٢٩}{٧}$

(٨) إذا كان : ل ، م هما جذرا المعادلة : سـ^{٢} − ٣ سـ − ٥ = ٠
فإن : ل + م + ل م = ...

(أ) ٣ (ب) −٥ (جـ) −١٥ (د) −٢

(٩) إذا كان جذرا المعادلة : س^{٢} − ١٠ س + ك = ٠ متساويان فإن : ك = ...

(أ) ٢٣ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٥ (د) ٢٦

(١٠) الزاوية التى قياسها (−١٢٠°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١١) إذا كان : θ قياس زاوية حادة وكان : جا ٢ θ = جتا θ فإن : θ = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

(١٢) إذا كان : جا θ = −١ ، جتا θ = صفر فإن : θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) π (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) ٢ π

(١٣) إذا كان : جا س = جتا ص ، حيث س ، ص زاويتان حادتان

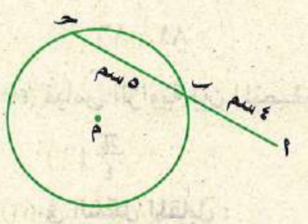
فإن : ظا (س + ص) = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) ١ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) غير معرف.

(١٤) مدى الدالة د (θ) = ٣ جا θ هو ....

(أ)]−٣ ، ٣] (ب) [−٣ ، ٣] (جـ) [−٣ ، ٣[(د)]−٣ ، ٣[

(١٥) فى الشكل المقابل :



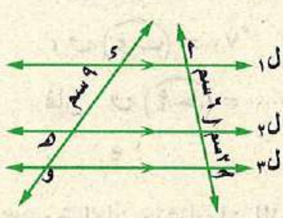
أ ب = ٤ سم

، ب ح = ٥ سم

فإن : ق$_{م}$ (أ) = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٦ (د) ٤٥

(١٦) فى الشكل المقابل :



ل$_{١}$ // ل$_{٢}$ // ل$_{٣}$

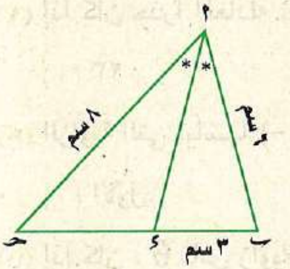
، أ ب = ٦ سم

، ب ح = ٢ سم ، ء هـ = ٩ سم

فإن : و ء = ...سم

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ٤ (د) ٣

(١٧) في الشكل المقابل :



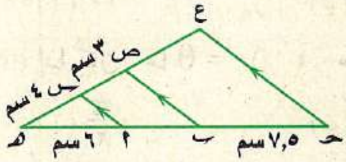
$\overrightarrow{أء}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

ء حـ = ...

(أ) ٦ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٨

(١٨) في الشكل المقابل :



$\overline{حـ ع}$ // $\overline{ب ص}$ // $\overline{أ س}$ ، حـ ب = ٧,٥ سم

، س ص = ٣ سم ، أ هـ = ٦ سم ، س هـ = ٤ سم

فإن : أ ب + ص ع = ...

(أ) ٥ (ب) ١٣ (جـ) ١١ (د) ٩,٥

(١٩) المثلث الذى قياسا زاويتين فيه : ٥٣° ، ٥٧° يشابه مثلثًا قياسًا زاويتين ٥٣° ، ....°

(أ) ٧٥ (ب) ٧٢ (جـ) ٧٠ (د) ٦٠

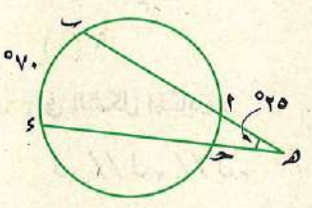
(٢٠) إذا كانت النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين هى ٤ : ٩ فإن النسبة بين محيطيهما هى ....

(أ) ١٦ : ٨١ (ب) ٣ : ٢ (جـ) ٨ : ١٨ (د) ٢ : ٣

(٢١) قياس الزاوية بين المنصفين الداخلى والخارجى لزاوية رأس المثلث = ...°

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٦}$ (جـ) $\frac{٣\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٢}$

(٢٢) في الشكل المقابل :



ق (∠ هـ) = ٢٥°

، ق $(\overset{\frown}{ء ب})$ = ٧٠°

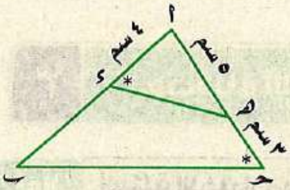
فإن : ق $(\overset{\frown}{أ حـ})$ = ...°

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٥٠ (د) ٤٠

(٢٣) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٤ : ٥ وكانت مساحة أكبرهما = ١٠٠ سم^{٢} فإن مساحة أصغرهما = ... سم^{٢}

(أ) ٣٦ (ب) ٤٨ (جـ) ٨٠ (د) ٦٤

(٢٤) فى الشكل المقابل :



ق (∠ حـ) = ق (∠ أ ء هـ)

أ هـ = ٥ سم ، أ ء = ٤ سم

، هـ حـ = ٣ سم فإن : ب ء = ... سم.

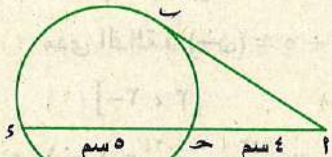
(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٧

(٢٥) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع ، وكان : ٣ أ ب = ٢ س ص

فإن : مساحة Δ أ ب حـ : مساحة Δ س ص ع = ...

(أ) ٤ : ٩ (ب) ٩ : ٤ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٣ : ٢

(٢٦) فى الشكل المقابل :



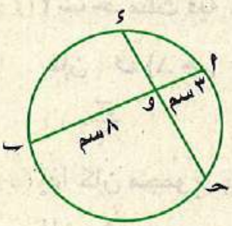
$\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مماسه للدائرة

إذا كان : أ حـ = ٤ سم ، حـ ء = ٥ سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٣٦

(٢٧) فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{حـ ء}} = \{\text{و}\}$

إذا كان : أ و = ٣ سم ، ب و = ٨ سم

، و حـ = (س + ١) سم

و ء = (س − ١) سم فإن : س = ...

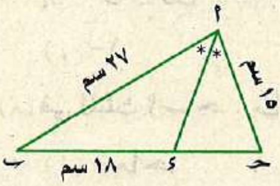
(أ) ٢٥ (ب) ٢٤ (جـ) ٥ (د) ٨

ثانيا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد مجموعة حل المتباينة : $\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٣ < \text{صفر}$ فى ح

٢ فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أ ء}}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

إذا كان : أ ب = ٢٧ سم ، أ حـ = ١٥ سم

، ب ء = ١٨ سم أوجد : طول $\overline{\text{أ ء}}$

٣ محافظة الإسكندرية

إدارة المنتزه ثان
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ③

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ١ = ٠$ فى مجموعة الأعداد المركبة هى ....

(أ) $\varnothing$　　(ب) $\{-ت ، ت\}$

(جـ) $\{-١ ، ١\}$　　(د) $\{(١ + ت) ، -(١ + ت)\}$

(٢) مدى الدالة د (س) = ٥ + ٢ جتا ٣ س ....

(أ) $[-٣ ، ٣]$　(ب) $[-٢ ، ٢]$　(جـ) $[٣ ، ٧]$　(د) $[-٣ ، ٧]$

(٣) $١ - ٢ ت^{٢٠٢٤ ن + ٢٠٢٣}$ = ... حيث ن عدد طبيعى.

(أ) ١ + ٢ ت　(ب) ١ − ٢ ت　(جـ) −١　(د) ٣

(٤) ا ب جـ مثلث فيه : ق (∠ ا) + ق (∠ ب) + ٢ ق (∠ جـ) = ٢٧٠°

فإن : ق (∠ جـ) = ... راديان.

(أ) $\frac{\pi}{٦}$　(ب) $\frac{\pi}{٥}$　(جـ) $\frac{\pi}{٤}$　(د) $\frac{\pi}{٢}$

(٥) إذا كان مجموع جذرى المعادلة : $س^٢ - ٣ س + هـ س - ٢٥ = ٠$ يساوى ٩

فإن : هـ = ...

(أ) −٩　(ب) −٦　(جـ) ٦　(د) ١٢

(٦) إذا كانت دائرة الوحدة تقطع الجزء الموجب من محور الصادات فى النقطة

(٢ ك − م ، ك)　فإن : ك + م = ...

(أ) −٢　(ب) −١　(جـ) ٢　(د) ٣

(٧) إذا كان جذرى المعادلة : $ب س^٢ - ٤ س + ٤ = ٠$ متساويين　فإن : ب = ...

(أ) −١　(ب) ١　(جـ) ± ١　(د) ٤

(٨) فى المثلث ا ب جـ : جتا (ا + ب) = ...

(أ) − جا جـ　(ب) جا جـ　(جـ) − جتا جـ　(د) جتا جـ

(٩) إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $س^2 - ٩ س + ٨ = ٠$

فإن المعادلة التى جذريها $\sqrt[3]{ل}$ ، $\sqrt[3]{م}$ هى .... حيث ل > م

(أ) س (س - ٣) = ٢ (ب) س (١ - ٣ س) = -٢

(جـ) س (٣ - س) = ٢ (د) س (٣ س - ١) = -٢

(١٠) مثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب إذا كانت : أ ب : ب حـ = ٣ : ٤

فإن : ظتا (٩٠° - أ) + ظا (١٨٠° + حـ) = ...

(أ) $\frac{-٢٥}{١٢}$ (ب) $\frac{-٧}{١٢}$ (جـ) $\frac{٧}{١٢}$ (د) $\frac{٢٥}{١٢}$

(١١) الدالة د (س) = $س^2 - ٤ س + ٣$ تكون غير سالبة عندما س ∈ ....

(أ) ح -]١ ، ٣[(ب) ح - {١ ، ٣}

(جـ) ح - [١ ، ٣] (د) [١ ، ٣]

(١٢) الحل العام للمعادلة : جا ٣ س = جتا س هو ....

(أ) {٢٢,٥° + ١٨٠° ن ، ٤٥° + ٩٠° ن}

(ب) {٢٢,٥° + ٣٦٠° ن ، ٤٥° + ٣٦٠° ن}

(جـ) {٢٢,٥° + ٩٠° ن ، ٤٥° + ٢٧٠° ن}

(د) {٢٢,٥° + ٩٠° ن ، ٤٥° + ١٨٠° ن}

(١٣) إذا كان ك ، م جذرى المعادلة : $س^2 - ك س + ١٠ = ٠$

وكان : $\frac{١}{م} + \frac{١}{ك} = \frac{٣}{٥}$ فإن : ك = ...

(أ) -٣ (ب) -٦ (جـ) ٦ (د) ٣

(١٤) إذا كانت : د (س) = ٣ - س ، ر (س) = ١ + س

فإن : د (س) × ر (س) > ٠ فى الفترة ....

(أ)]-١ ، ٣[(ب)]٣ ، ∞[

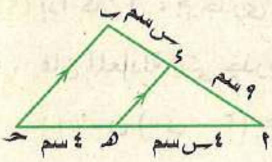
(جـ)]-∞ ، -١[(د) ح -]-١ ، ٣[

(١٥) إذا كان معامل التشابه بين مضلعين متشابهين $\frac{٣}{٥}$ وكان مساحة سطح أكبرهما ١٠٠ $سم^2$

فإن مجموع مساحتى سطحيهما = ... $سم^2$

(أ) ١٦٠ (ب) ١٣٦ (جـ) ١١٢ (د) ١٠٩

(١٦) في الشكل المقابل :



$\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$ ، أء = ٩ سم

، حـهـ = ٤ سم فإن : س = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٤

(جـ) ٣ (د) ٦

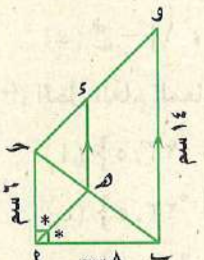
(١٧) دائرتان م ، ن متماستان وكانت النقطة أ تقع على المماس المشترك لهما

، $ق_م$ (أ) = $ك^٢$ + ٢ ك + ١ فإن طول المماس المرسوم من النقطة أ للدائرة ن = ...

وحدة طول حيث ك عدد حقيقي موجب.

(أ) $ك^٢$ + ١ (ب) ك + ١ (جـ) ٢ ك + ١ (د) $ك^٢$ + ٢ ك + ١

(١٨) في الشكل المقابل :



$\overline{ءهـ} \parallel \overline{وب}$

، أب = ٨ سم ، أحـ = ٦ سم

، وب = ١٤ سم ، $\overline{أهـ}$ ينصف ∠ أ

فإن : ءهـ = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ٦

(١٩) في الشكل المقابل :

$ق_م$ (أ) = −٢٥ ، م ب = ١٣ سم

فإن : م أ = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ١٢

(جـ) ١١ (د) ١٣

(٢٠) في الشكل المقابل :

ء منتصف $\overset{\frown}{بحـ}$

، أب = ١٥ سم

، أحـ = ١٠ سم

فإن : ب و = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٦

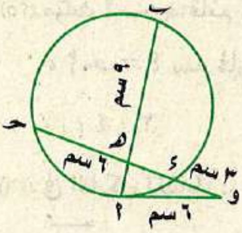
(٢١) في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أو}}$ تمس الدائرة عند أ

، أو = هـ حـ = ٦ سم

، ب هـ = ٩ سم ، ء و = ٣ سم

فإن : أ ب = ... سم.



(أ) ١٨ (ب) ١١ (جـ) ١٧ (د) ٩

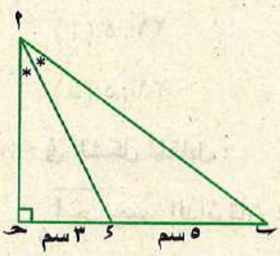
(٢٢) في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ

، ء حـ = ٣ سم

، ء ب = ٥ سم

فإن : أ ء = ...



(أ) ٣ $\sqrt{٥}$ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢ $\sqrt{٥}$ (د) ٥ $\sqrt{٢}$

(٢٣) في الشكل المقابل :

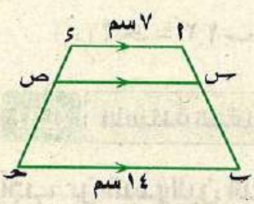
$\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

، أ ء = ٧ سم

، ب حـ = ١٤ سم

، أ س : س ب = ٣ : ٤

فإن : س ص = ... سم



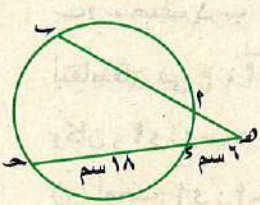
(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١٠,٥ (د) ١١

(٢٤) في الشكل المقابل :

ء هـ = ٦ سم ، ء حـ = ١٨ سم

، هـ أ : أ ب = ٤ : ٥

فإن : هـ ب = ... سم



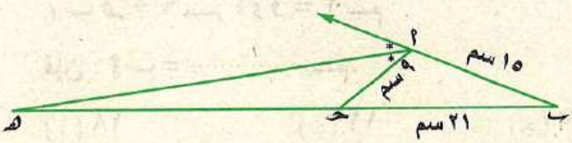
(أ) ٨ (ب) ١٨

(جـ) ١٠ (د) ٢٠

(٢٥) مثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى أ رسم من أ عمود $\overline{أ ء}$ على $\overline{ب حـ}$ ، إذا كان : أ ب = ٣ سم ، أ حـ = ٤ سم فإن محيط المثلث أ ء ب : محيط المثلث أ حـ ء = ...

(أ) ٤ : ٣ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ٣ : ٥ (د) ٤ : ٥

(٢٦) فى الشكل المقابل :



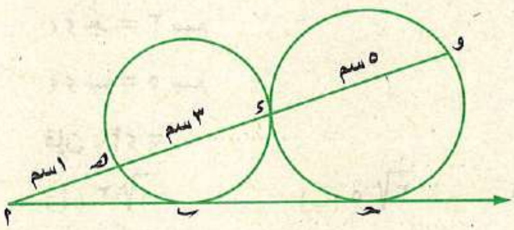
$\overleftrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ أ من الخارج

فإن : هـ حـ = ... سم

(أ) ٢١,٥ (ب) ٥٢,٥

(جـ) ٣١,٥ (د) ٦٣

(٢٧) فى الشكل المقابل :



$\overrightarrow{أ حـ}$ يمس الدائرتان عند ب ، حـ

حيث أ هـ = ١ سم ، ء هـ = ٣ سم

، و ء = ٥ سم فإن : ....

(أ) أ حـ = ٢ أ ب (ب) أ حـ = ٤ أ ب

(جـ) أ حـ = ٣ أ ب (د) أ حـ = ٥ أ ب

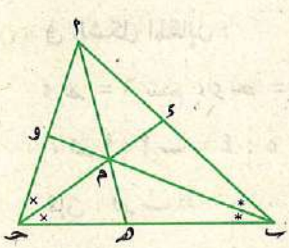
ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ حل المتباينة : س (٢ − س) > ٨ فى ح

---

٢ فى الشكل المقابل :



$\overrightarrow{ب و}$ ينصف ∠ ب ، $\overrightarrow{حـ ء}$ ينصف ∠ حـ

يتقاطعان فى م ، $\overleftrightarrow{أ م} \cap \overline{ب حـ} = \{هـ\}$

وكان : أ ء : ء ب = ٥ : ٤ ، حـ هـ : ب حـ = ١ : ٢

(١) أوجد : أ و : أ حـ

(٢) برهن أن : $\overline{ء و} // \overline{ب حـ}$

إدارة القناطر الخيرية
توجيه الرياضيات

٤ محافظة القليوبية

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختبار تفاعلي ④

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان أحد جذري المعادلة : $س^٢ + (م - ٣) س = ٤$ معكوسًا جمعيًا للجذر الأخر فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) ٤

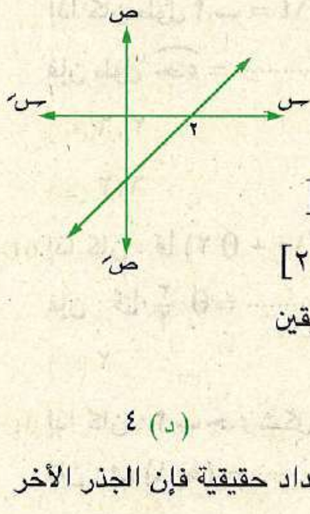
(٢) أبسط صورة للعدد التخيلي $ت^{٣١}$ هو ....

(أ) ت (ب) − ت (جـ) ١ (د) −١

(٣) مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - ٣ س \geq ٠$ هي ....

(أ) {٠ ، ٣} (ب) [−٣ ، ٣] (جـ) [٠ ، ٣] (د) [−٣ ، ٠]

(٤) الشكل المقابل يمثل الرسم البياني لدالة من الدرجة الأولى فإنها تكون غير سالبة في ....



(أ)]٢ ، ∞[(ب) [٢ ، ∞[(جـ)]− ∞ ، ٢[(د)]− ∞ ، ٢]

(٥) إذا كان جذرا المعادلة : $٣ س^٢ - ٦ س + ك = ٠$ غير حقيقين فإن : ك يمكن أن تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) −٣ (د) ٤

(٦) إذا كان (ت − ٣) أحد جذور معادلة درجة ثانية معاملاتها أعداد حقيقية فإن الجذر الأخر هو ....

(أ) ٣ − ت (ب) ت + ٣ (جـ) −٣ − ت (د) −٣ + ت

(٧) إذا كان ل أحد جذري المعادلة : $س^٢ + ٦ س + ١١ = ٠$ فإن : $(ل + ٣)^٢ =$ ....

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) −٥ (د) −٢

(٨) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : أ س^٢ + (أ + ٤) س + أ = ٦ يساوى −٢
فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٥

(٩) إذا كان : جا θ > ٠ ، طا θ < ٠ فإن : θ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٠) إذا كانت : د (س) = ك جا م س مداها [−٣ ، ٣] ودورتها (π)
فإن : ك^٢ + م^٢ = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ١٣

(١١) إذا كان : ٣ قتا θ + ٥ = صفر حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة
فإن : طا (١٨٠° − θ) = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) −$\frac{٣}{٥}$ (جـ) −$\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(١٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان طول $\overset{\frown}{أب}$ = ١٤ سم
فإن طول $\overset{\frown}{جـء}$ = ... سم

(أ) ٣,٦ (ب) ٨,٤
(جـ) ٦,٣ (د) ٧,٢

(١٣) إذا كان : قا (٣ θ + ١٥) = قتا (٣٥ − θ) حيث θ زاوية حادة
فإن : قتا $\frac{٣}{٢}$ θ = ...

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

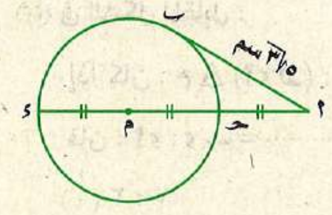
(١٤) إذا كان : أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى فيه : ق (∠ أ) = ١,٩٢^ء
فإن : ق (∠ جـ) ≃ ....°

(أ) ٧٠ (ب) ٦٤ (جـ) ٩٥ (د) ١٠٥

(١٥) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٩ تكون النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ....

(أ) ٢ : ٣ (ب) ١٦ : ٨١ (جـ) ٤ : ٩ (د) ٩ : ٤

(١٦) فى الشكل المقابل : ....



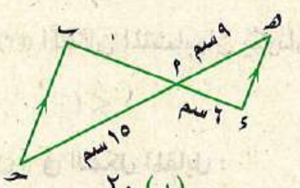
إذا كان $\overline{\text{أب}}$ مماس للدائرة م

فإن طول قطرها = ...

(أ) ٥ (ب) ٣√٣

(جـ) ١٠ (د) ٦

(١٧) فى الشكل المقابل :

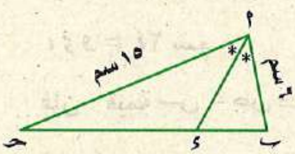


إذا كان : $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{حـب}}$

فإن : أب = ... سم.

(أ) ١٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

(١٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overrightarrow{\text{أء}}$ منصف ∠ أ

، مساحة (Δ أبء) = ٢٠ سم^2

فإن : مساحة (Δ أبحـ) = ... سم^2

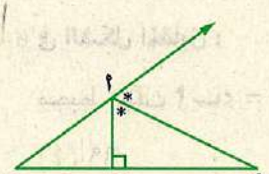
(أ) ٥٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٦٥ (د) ٧٠

(١٩) م دائرة مساحتها ٣٦ π سم^2 ، أ نقطة فى مستويها حيث م أ = ٥ سم

فإن : قم (أ) = ...

(أ) ١١ (ب) −١١ (جـ) −٤ (د) صفر

(٢٠) فى الشكل المقابل :



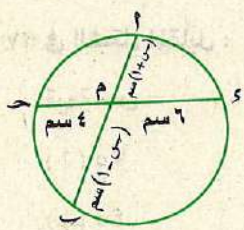
أحـ × بء = ٤٠ سم^2

فإن مساحة Δ (أءحـ) = ... سم^2

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٨٠ (د) ٦٠

(٢١) فى الشكل المقابل :

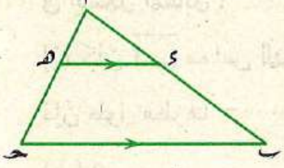


قيمة س = ...

(أ) ٤ (ب) ٥

(جـ) ٦ (د) ١٠

(٢٢) في الشكل المقابل :



إذا كان : م Δ (أ ء هـ) : م Δ (أ ب حـ) = ٩ : ٤٩

فإن : أ ء : ء ب = ...

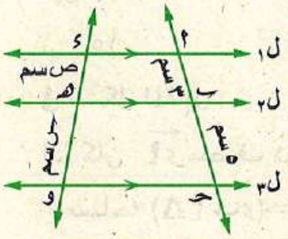
(أ) ٣ : ٧ (ب) ٧ : ٣

(جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٤

(٢٣) المثلثان المتشابهان يكونان متطابقان إذا كان معامل التشابه لهما ....

(أ) < ١ (ب) $= ١$ (جـ) > ١ (د) $\neq ١$

(٢٤) في الشكل المقابل :



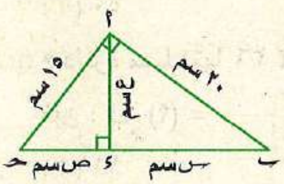
ل١ // ل٢ // ل٣

، ء و = ٢٤ سم

فإن : قيمة س − ص = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٥) في الشكل المقابل :



س + ص + ع = ... سم

(أ) ٤٤ (ب) ٣٧

(جـ) ٢٨ (د) ٥٢

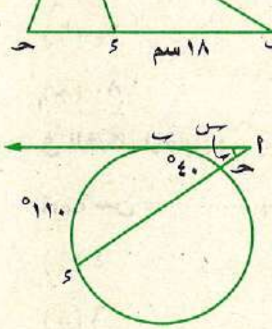
(٢٦) في الشكل المقابل :

محيط المثلث أ ب ء = ... سم

(أ) ٦٩ (ب) ٧٥

(جـ) ٥٥ (د) ٦٠

(٢٧) في الشكل المقابل :



قيمة س = ...°

(أ) ٧٥ (ب) ٣٥

(جـ) ٤٥ (د) ٧٠

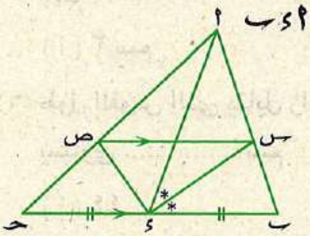
ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كان ل ، م هما جذرى المعادلة : $س^٢ - ٢ س + ٣ = ٠$ كون معادلة الدرجة الثانية التى جذراها $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

---

٢ أ ب حـ مثلث فيه ء منتصف $\overline{ب حـ}$ ، رسم $\overleftarrow{ء س}$ ينصف ∠ أ ء ب ويقطع $\overline{أ ب}$ فى س ثم رسم $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$ ويقطع $\overline{أ حـ}$ فى ص



(١) أثبت أن : $\overleftarrow{ء ص}$ ينصف ∠ أ ء حـ

(٢) إذا كان : ء س = ٤ سم ، ء ص = ٣ سم أوجد : طول $\overline{س ص}$

٥ محافظة الشرقية

إدارة العاشر من رمضان
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ⑤

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

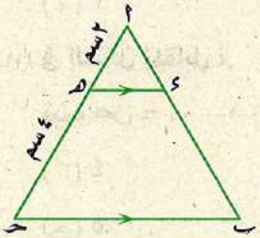
(١) الزاوية التى قياسها (-١٠٠°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٢) إذا كانت : س = ٣ جذرا للمعادلة : $س^٢ + ك س = ١٥$ فإن : ك = ...

(أ) -٢ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) -٨

(٣) فى الشكل المقابل :



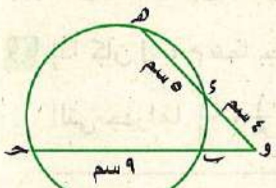
مساحة Δ أ ب حـ = ... مساحة Δ أ ء هـ

(أ) ٣ (ب) ٦
(جـ) ٩ (د) ٤

(٤) إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة : س^{٢} = ٧ س − ك يساوى ٣ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −١٠ (جـ) ١٠ (د) −٢

(٥) فى الشكل المقابل :



وء = ٤ سم ، ءهـ = ٥ سم

، ب جـ = ٩ سم

فإن : و ب = ...

(أ) ٣ سم (ب) ٦ سم (جـ) ٥ سم (د) ٤ سم

(٦) طول القوس الذى يقابل زاويه مركزيه قياسها = ١٢٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٢١ سم يساوى .... سم

(أ) ٤٤ (ب) ٢٢ (جـ) ٦٦ (د) ٥٥

(٧) إذا كانت : س + ص ت = (١ + ت)^{٤} فإن : س + ص = ...

(أ) −٤ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) −٢

(٨) إذا كانت : د (س) = ٣ جا ٢ س فإن القيمة العظمى للدالة ....

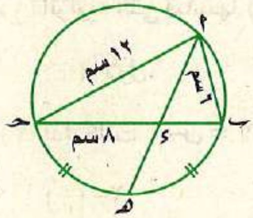
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٢

(٩) إذا كانت المعادلة : س^{٢} + ١٠ س + جـ = ٣ لها جذرين حقيقين متساويين

فإن : جـ = ...

(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) −٥ (د) −٢٢

(١٠) فى الشكل المقابل :



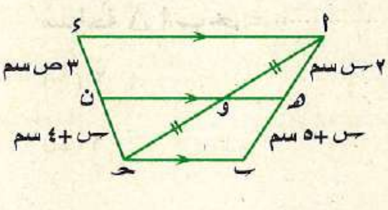
أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ١٢ سم

، هـ منتصف القوس ب جـ

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١١) فى الشكل المقابل :



قيمة ص = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣

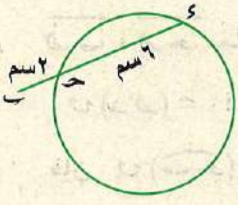
(جـ) ٥ (د) ٢

(١٢) إذا كانت : جا (٢ س − ٢٥) = جتا (س + ٢٥) حيث س زاوية حادة

فإن : س = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

(١٣) في الشكل المقابل :



جـ ء = ٦ سم

، ب جـ = ٢ سم

فإن : $ق_{م}$ (ب) = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٤ (جـ) −١٦ (د) ١٦

(١٤) إذا كانت : θ = ظا$^{-1}$ (١) حيث θ زاويه حادة فإن : θ = ...

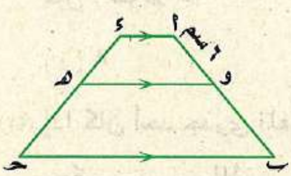
(أ) ٣٠ (ب) ١٣٥ (جـ) ٢٢٥ (د) ٤٥

(١٥) مجموعة حل المتباينة : (س + ٢) (٣ − س) > صفر هي الفترة ....

(أ)]−٣ ، ٢[(ب)]−∞ ، ٣[

(جـ) ح −]−٢ ، ٣[(د)]−٢ ، ٣[

(١٦) في الشكل المقابل :



٣ ء هـ = ٢ هـ جـ ، أ و = ٦ سم

فإن : ب و = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٦

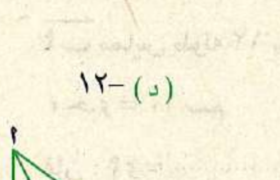
(جـ) ١٢ (د) ٩

(١٧) إذا كانت ل ، م جذري المعادلة : س^{٢} − ٣ س + ٧ = صفر

فإن قيمة المقدار ٢ ل^{٢} − ٦ ل + ١٩ = ...

(أ) −٥ (ب) ٥ (جـ) ١٢ (د) −١٢

(١٨) في الشكل المقابل :



$\overleftarrow{أء}$ منصف داخلي لزاوية (ب أ جـ)

فإن : أ جـ = ... سم

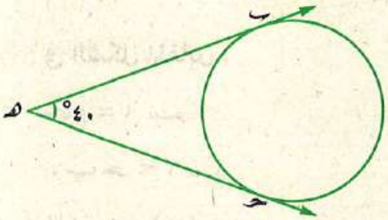
(أ) ٢٥ (ب) ٢٠

(جـ) ١٢ (د) ١٥

(١٩) $\text{ق}_{\text{م}}$ (ب) = ٦٤ ، م ب = ١٠ سم فإن : محيط الدائرة م = ... π سم

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ٣٦ (د) ٦.

(٢٠) في الشكل المقابل :



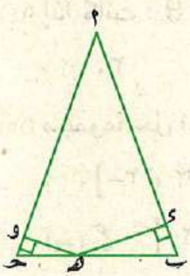
$\overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ حـ}}$ مماسان

، ق (∠ هـ) = ٤٠°

فإن : ق ($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) الأكبر = ...°

(أ) ١٤٠ (ب) ٢٢٠ (جـ) ٢٦٠ (د) ٢٤٠

(٢١) في الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ

، ب حـ = ٤٠ سم

فإذا كانت : ء هـ : هـ و = ٥ : ٣

فإن : ب هـ = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ٢٥

(٢٢) إذا كان أحد جذري المعادلة : ٩ $\text{س}^{٢}$ − ١٥ س + $\text{ك}^{٢}$ = صفر

معكوس ضربي للآخر فإن : ك = ...

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) −٣ (د) ±٣

(٢٣) في الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس طوله ١٢ سم

، حـ ء = ١٠ سم

فإن : أ ء = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٨

(٢٤) إذا كان : جا س = صفر ، جتا س = −١ فإن : س = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢٥) أشارة الدالة د (س) = ٢ س + ٦ غير سالبه فى الفترة ....

(أ) [−٣ ، ∞[(ب)]−٣ ، ∞[

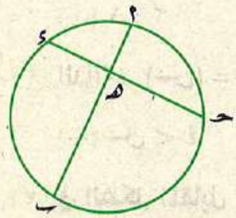
(جـ)]− ∞ ، −٣] (د)]− ∞ ، −٣]

(٢٦) مضلعان متشابهان النسبة بين ضلعين متناظرين كنسبة ٣ : ٤

والفرق بين مساحتيهما = ٥٦ سم^{٢} فإن مساحة الأصغر = ... سم^{٢}

(أ) ٧٢ (ب) ١٢٨ (جـ) ٢٤ (د) ٣٢

(٢٧) فى الشكل المقابل :



أهـ = ٣ سم ، هـ ء = ٤ سم

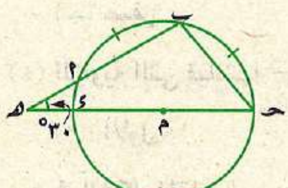
، هـ حـ = ٦ سم فإن : هـ ب = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٢

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ فى الشكل المقابل :



ق (∠ هـ) = ٣٠°

أوجد : ق (∠ ب)

---

٢ إذا كانت ل ، م هما جذرى المعادلة : س^{٢} − ٧ س + ٦ = صفر

أوجد : المعادلة التى جذراها ل م ، ل + م

٦ محافظة الغربية

إدارة شرق المحلة
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ٦

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

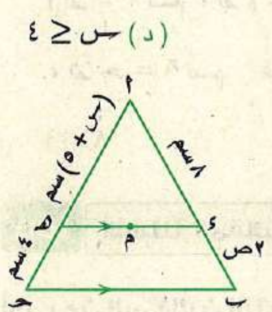
(١) مستطيلان متشابهان الأول طوله ٦ سم والثانى طوله ١٢ سم
فإن : مساحة الأول : مساحة الثانى تساوى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٢ : ٣ (د) ٢ : ١

(٢) الدالة د (س) = ٨ − ٢ س تكون غير موجبة عندما ....

(أ) س > ٤ (ب) س < ٤ (جـ) س ≥ ٤ (د) س ≤ ٤

(٣) فى الشكل المقابل :



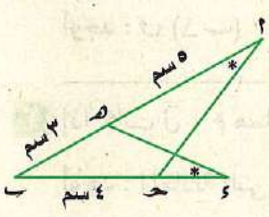
إذا كانت م هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ
فإن : قيمة المقدار س − ص = ...

(أ) ١ (ب) −١
(جـ) صفر (د) ٥

(٤) الزاوية التى قياسها $\frac{-\pi}{٣}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ أ) = ق (∠ د)
، جـ ب = ٤ سم ، ب هـ = ٣ سم
، أ هـ = ٥ سم فإن : جـ د = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

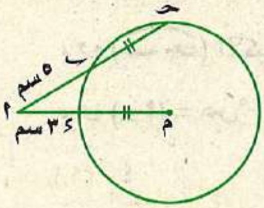
(٦) مرافق العدد (ت − ت^{٢}) هو ....

(أ) ١ + ت (ب) ١ − ت (جـ) − ت − ١ (د) ت − ١

(٧) $حتا \frac{\pi}{٢}$ حتا ٠° + $حا \frac{٣\pi}{٢}$ $حا \frac{\pi}{٢}$ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) صفر

(٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان : م ء = ب حـ

فإن : مساحة الدائرة م = ... سم^٢

(أ) ١٦ π (ب) ٢٥٦ π

(جـ) ٣٢ π (د) ٦٤ π

(٩) إذا كان جذرا المعادلة : أ س^٢ − ٢ س + ب = ٠ حقيقيان متساويان

فإن : أ ب = ...

(أ) ت (ب) − ت (جـ) −١ (د) ١

(١٠) إذا كانت : ك معامل تشابه المضلع م$_١$ للمضلع م$_٢$ وكان المضلع م$_١$ تصغير للمضلع م$_٢$

فإن : ك يمكن أن تساوى ....

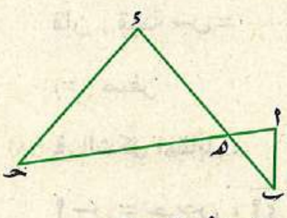
(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ١ (د) صفر

(١١) إذا كان ٣ ، ٤ هما جذرا المعادلة : أ س^٢ + ب س + حـ = ٠

فإن : $\frac{ب + حـ}{أ}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

(١٢) فى الشكل المقابل :



النقاط أ ، ب ، حـ ، ء

تقع على دائرة واحدة إذا كان ....

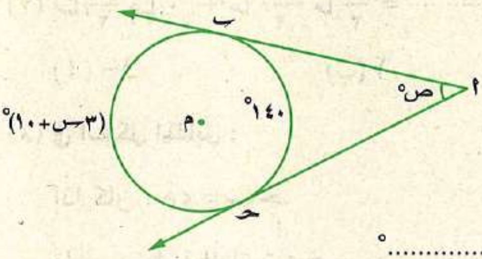
(أ) أ ب × أ حـ = ء ب × ء حـ (ب) أ هـ × أ حـ = ب هـ × ب ء

(جـ) ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) (د) أ هـ × هـ حـ = ب هـ × هـ ء

(١٣) أبسط صورة للمقدار : طا (٩٠° − θ) + طا (٩٠° + θ) = ...

(أ) ٢ طتا θ (ب) صفر (جـ) ٢ طا θ (د) طا θ + طتا θ

(١٤) فى الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م

ق $(\widehat{ب حـ})$ الأصغر = ١٤٠°

، ق $(\widehat{ب حـ})$ الأكبر = (٣س + ١٠)°

، ق (∠ أ) = ص° فإن : س + ص = ...°

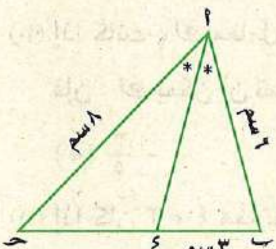
(أ) ٤٠ (ب) ٧٠ (جـ) ١١٠ (د) ١٥٠

(١٥) إذا كان ل ، م جذرا المعادلة : $س^٢ - ٤ س + ٥ = ٠$ فإن المعادلة التربيعية التى جذراها $ل^٢$ ، $م^٢$ هى ....

(أ) $س^٢ - ٦ س + ٢٥ = ٠$ (ب) $س^٢ - ٦ س = ٢٥$

(جـ) $س^٢ - ٢٥ س + ٦ = ٠$ (د) $٦ س^٢ - ٢٥ س + ١ = ٠$

(١٦) فى الشكل المقابل :



من الأبعاد الموجودة على الرسم

فإن : طول $\overline{أء}$ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٨

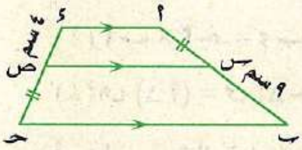
(جـ) ٦ (د) ٢١

(١٧) إذا كان مدى الدالة د حيث د (θ) = ٣ س جا θ هو الفترة [-٩ ، ٩]

فإن : قيمة س = ...

(أ) صفر (ب) -٣ (جـ) ٣ (د) ± ٣

(١٨) فى الشكل المقابل :



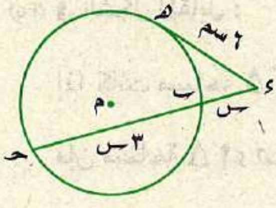
أس = حـ ص ، $\overline{أء}$ // $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

، ب س = ٩ سم ، ء ص = ٤ سم

فإن : ص حـ = ... سم

(أ) ٣٦ (ب) ١٣ (جـ) ٦ (د) ٥

(١٩) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftarrow{\text{ءهـ}}$ مماسًا للدائرة م ، ءب = س سم

، ب حـ = ٣ س سم ، ء هـ = ٦ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٢ $\sqrt{3}$

(٢٠) إذا كان : ٩ + ٢ أ ت = ٣ ب - ٤ ت فإن : ب - أ = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٥

(٢١) إذا كان طول نصف قطر دائرة م يساوى ٤ سم ، أ نقطة على الدائرة

فإن : ق$_{م}$ (أ) = ...

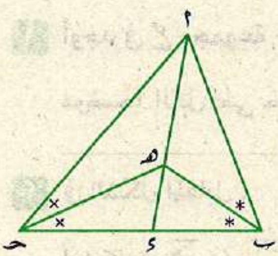
(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) صفر (د) ٨

(٢٢) القوس الذى طوله ٣ π فى دائرة طول قطرها ١٢ سم يقابل زاوية مركزية

قياسها = ...°

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

(٢٣) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف (∠ أ ب ء)

، $\overleftarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف (∠ أ حـ ء)

فإن : ....

(أ) ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ (ب) هـ منتصف $\overline{\text{أ ء}}$

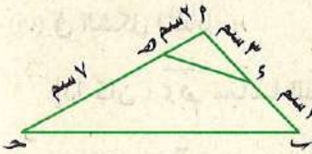
(جـ) هـ تقسم $\overline{\text{أ ء}}$ بنسبة ٢ : ١ من جهة أ (د) $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

(٢٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : ٢ م س^{٢} + ٣ س + ٢ م + م^{٢} - ١ = ٠

معكوسًا ضربيًا للآخر فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) -١ (جـ) ± ١ (د) -٢

(٢٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت مساحة Δ أ ب حـ = ٤٥ سم^{٢}

فإن مساحة Δ أ ء هـ = ... سم^{٢}

(أ) ٥ (ب) ٩٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٢,٥

(٢٦) إذا كانت الدالة د : د (س) = أ س^{٢} − ٤ دالة ثابتة. فإن الدالة تكون سالبة فى الفترة ....

(أ)]− ∞ ، ٤[فقط. (ب)]− ∞ ، ∞[

(جـ)]− ٤ ، ٤[فقط. (د)]− ٢ ، ٢[فقط.

(٢٧) إذا كانت : θ زاوية حادة موجبة وكان : $\frac{\text{جا}(\theta + ٣٠)}{\text{جتا } ٢\theta} = ١$ فإن : θ = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٣٥ (جـ) ٥ (د) ٢٠

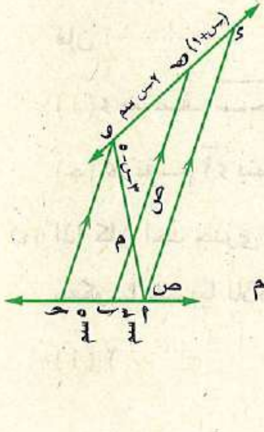
ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد فى ح مجموعة حل المتباينة : س^{٢} + ٣ س − ٤ $\leq$ صفر

موضحًا الحل على خط الأعداد.

٢ فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{\text{أء}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ // $\overline{\text{حـ و}}$

، أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم

، ء هـ = (س + ١) سم

، هـ و = ٢ س سم ، أ م = ص سم ، م و = (٣ س − ٥) سم

فأوجد : قيمة المقدار س + ص

٧ محافظة الدقهلية

إدارة شربين
توجيه الرياضيات

اختبار تفاعلى ⑦

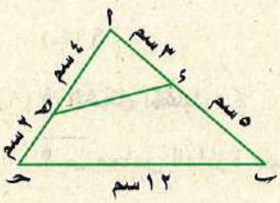
أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مستطيلان متشابهان بعدا الأول ١٢ سم ، ٨ سم ومحيط الثانى ٦٠ سم فإن طول المستطيل الثانى .... سم.

(أ) ٢٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٢٧ (د) ١٨

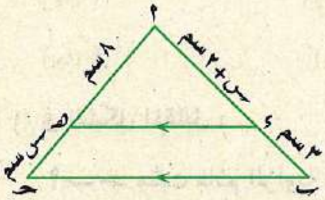
(٢) فى الشكل المقابل :



ء هـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥
(جـ) ٦ (د) ٨

(٣) فى الشكل المقابل :



س = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٥
(جـ) ٤ (د) ٢

(٤) إذا كان : Δ أ ب حـ ~ Δ س ص ع وكان : ٣ أ ب = س ص

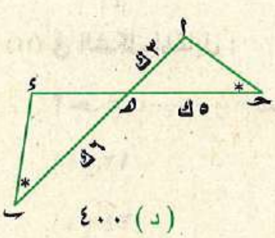
فإن مساحة سطح Δ (أ ب حـ) : مساحة سطح Δ (س ص ع) = ...

(أ) ٩ (ب) ١ : ٩ (جـ) ٣ (د) ١ : ٣

(٥) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٢ ومجموع مساحتى سطحيهما ١٣٠ سم^2 فإن مساحة سطح المضلع الأكبر = ... سم^2

(أ) ٩٠ (ب) ٤٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٢٦٠

(٦) فى الشكل المقابل :

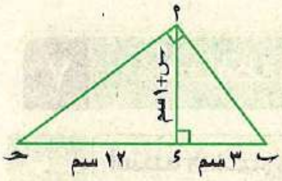


$\overline{أ ب} \cap \overline{حـ ء} = \{هـ\}$ ، م (Δ أ حـ هـ) = ١٠٠ سم^2

فإن : م (Δ ء ب هـ) = ... سم^2

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٤٤ (د) ٤٠٠

(٧) في الشكل المقابل :

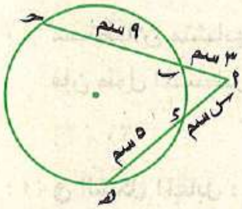


س = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

(٨) في الشكل المقابل :

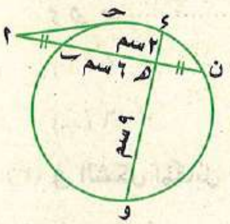


$\overleftrightarrow{حـ ب} \cap \overleftrightarrow{هـ ء} = \{أ\}$ ، س = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦

(جـ) ٩ (د) ١٠

(٩) في الشكل المقابل :

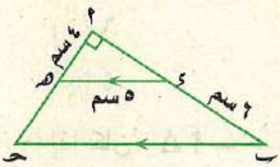


$\overline{أحـ}$ مماس للدائرة عند حـ فإن : أحـ = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٦

(جـ) ٤ (د) ٨

(١٠) في الشكل المقابل :

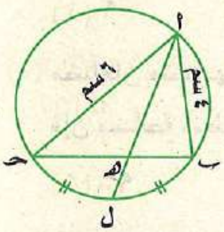


أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{ءهـ} \parallel \overline{ب حـ}$

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٥

(١١) في الشكل المقابل :

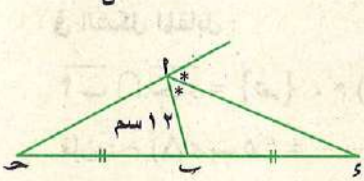


$\frac{ب هـ}{حـ ب} =$ ....

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{2}{5}$

(جـ) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{5}$

(١٢) في الشكل المقابل :



أحـ = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٦

(جـ) ٢٤ (د) ٨

(١٣) إذا كانت : $ق_م$ (أ) = نق فإن النقطة أ تقع .... الدائرة.

(أ) خارج (ب) على (جـ) داخل (د) على مركز

(١٤) مجموعة حل المعادلة : ٢٥ س^٢ + ٩ = ٠ فى ك هى ....

(أ) $\{\frac{٣}{٥}$ ت$\}$ (ب) $\{-\frac{٣}{٥}$ ت$\}$

(جـ) $\{\frac{٣}{٥}$ ت ، $-\frac{٣}{٥}$ ت$\}$ (د) $\{\frac{٣}{٥}$ ، $-\frac{٣}{٥}\}$

(١٥) (١ + ت)^{١٠} = ...

(أ) −٣٢ (ب) −٣٢ ت (جـ) ٣٢ (د) ٣٢ ت

(١٦) مرافق العدد المركب $\frac{٤ + ت}{ت}$ هو ....

(أ) ١ + ٤ ت (ب) ١ − ٤ ت (جـ) −١ + ٤ ت (د) −١ − ٤ ت

(١٧) إذا كان جذرا المعادلة : س^٢ + ٦ س + ك = ٠ مركبان غير حقيقيين

فإن : ك ∈ ....

(أ)]٣ ، ∞[(ب)]٩ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٣[(د)]−∞ ، ٩[

(١٨) المعادلة التربيعية التى أحد جذراها ٢ ت هى ....

(أ) س^٢ − ٤ س − ٥ = ٠ (ب) س^٢ + ٤ = ٠

(جـ) س^٢ − ٤ = ٠ (د) س^٢ + ٤ س − ٥ = ٠

(١٩) إذا كان ل أحد جذرى المعادلة : س^٢ − ٦ س + ٣ = ٠

فإن : ل ٢ − ٦ ل + ٥ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) −٣

(٢٠) الدالة د : د (س) = ٤ − ٢ س تكون موجبة فى الفترة ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]−∞ ، ٢[(جـ)]−٢ ، ∞[(د)]−∞ ، −٢[

(٢١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^٢ − (ك − ٧) س − ك − ٣ = ٠

وكان : ل < صفر < م ، |ل| > |م| فإن : ك ∈ ....

(أ)]−٣ ، ٧[(ب) [−٣ ، ٧] (جـ)]−٣ ، ∞[(د)]−∞ ، ٧[

(٢٢) إذا قطع الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها θ فى وضعها القياسى دائرة الوحدة فى النقطة (٠,٦ ، ص) حيث ص > ٠ فإن : قتا θ + ظا θ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٥٩}{٢٤}$ (د) $\frac{٣٢}{١٥}$

(٢٣) مجموعة حل المعادلة : جا θ − جتا θ = صفر حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ هى ....

(أ) {٣٠°} (ب) {٤٥°} (جـ) {٦٠°} (د) {٧٥°}

(٢٤) إذا كان : د (س) = ٢ جا س + ١ حيث س $\in$ [٠ ، π[فإن مدى الدالة هو ....

(أ) [١ ، ٣] (ب) [−٢ ، ٢] (جـ) [−١ ، ١] (د)]١ ، ٣[

(٢٥) الزاوية المحيطية التى قياسها ٣٠° فى دائرة طول قطرها ٢٤ سم يقابلها قوسًا طوله يساوى .... سم.

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) $\frac{١}{٢}$ π (د) ٤ π

(٢٦) إذا كان : جا α = جتا β فإن : ظا $(\alpha + \beta)$ = ... حيث α ، β قياسا زاويتين حادتين.

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٠ (د) غير معرف.

(٢٧) إذا كانت : $\theta \in]٠ ، ٩٠[$ ، جا $\theta = \frac{٣}{٥}$ فإن : جا θ قتا θ + جتا θ = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٩}{٥}$ (جـ) $\frac{٥}{٩}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أوجد مجموعة حل المتباينة : س² − ٥ س + ٦ ≤ ٠ فى ح مستعينا بخط الأعداد.

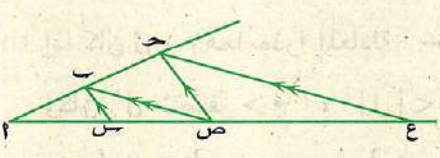
---

٢ فى الشكل المقابل :

$\overline{بس} \parallel \overline{حص}$

، $\overline{بص} \parallel \overline{حع}$

أثبت أن : (أ ص)² = أ س × أ ع



٨ محافظة دمياط

مديرية التربية والتعليم
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختبار تفاعلى ⑧

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ٤ س + ١ = ٠$

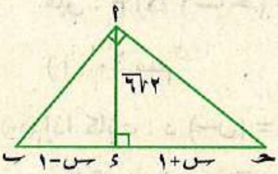
فإن : ل + م = ...

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) ٥ (د) -٥

(٢) إذا كانت : جتا θ > ٠ ، جا θ < ٠ فإن : θ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(٣) فى الشكل المقابل :



باستخدام المعطيات الموجودة على الرسم

فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٢,٥

(٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $٢ ك س^{٢} + ٣ س + ك^{٢} + ١ = ٠$ معكوس ضربى للآخر

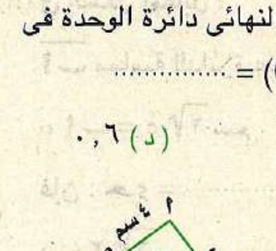
فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) ٢ (د) -٢

(٥) إذا كانت : θ قياس زاوية فى وضعها القياسى ويقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة : ب $\left(س ، \frac{٣}{٥}\right)$ حيث س < ٠ فإن : جا (٩٠° + θ) = ...

(أ) ٠,٨ (ب) -٠,٦ (جـ) -٠,٨ (د) ٠,٦

(٦) فى الشكل المقابل :



$\frac{د هـ}{ب جـ}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$

(جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

(٧) مجموعة حل المعادلة : $س^{٢} + ٤ = ٠$ فى الأعداد المركبة هى ....

(أ) {٢} (ب) {-٢}

(جـ) ∅ (د) {٢ ت ، -٢ ت}

(٨) طول القوس فى الدائرة التى طول نصف قطرها ٦ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{٢}$ هو ....

(أ) $\frac{٣ \pi}{٢}$ سم (ب) ٣ π سم (جـ) $\frac{٥ \pi}{٢}$ سم (د) ٢ π سم

(٩) فى الشكل المقابل :

$\overline{ءب} \cap \overline{هـحـ} = \{أ\}$ ، أهـ = ٩ سم ، أب = ١٠ سم

، أحـ = ١٥ سم ، ءأ = ٦ سم ، م (Δ أءهـ) = ٣٦ سم^{٢}

فإن : م (Δ أبحـ) = ...

(أ) ٦٠ سم^{٢} (ب) ٧٥ سم^{٢} (جـ) ١٠٠ سم^{٢} (د) ٢٢٥ سم^{٢}

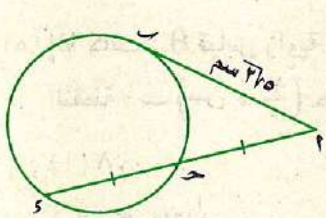
(١٠) إذا كانت : د (س) = س + ٣ ، س ∈]-٥ ، ٦[فإن : د (س) تكون سالبة عندما س ∈ ....

(أ)]-٥ ، -٣[(ب)]-∞ ، -٣[(جـ)]-٣ ، ∞[(د)]-٣ ، ٦[

(١١) مدى الدالة د (θ) = ٣ جا ٢ θ هو ....

(أ) [-٢ ، ٢] (ب)]-٢ ، ٢[(جـ) [-٣ ، ٣] (د)]-٣ ، ٣[

(١٢) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ مماسة للدائرة عند ب ، حـ منتصف $\overline{أء}$

، أب = ٥ $\sqrt{٢}$ سم

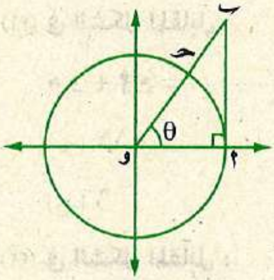
فإن : حـء = ... سم

(أ) ٢ $\sqrt{٦}$ (ب) ٥ $\sqrt{٦}$ (جـ) ٥ (د) ٢,٥ $\sqrt{٦}$

(١٣) إذا كان : ٤ س + ٢ ص ت = ٨ + ٤ س ت فإن : س + ص = ...

(أ) -٢ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٤) فى الشكل المقابل :



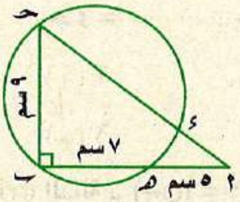
$\overline{\text{أب}}$ قطعة مماسة لدائرة الوحدة

فإن : وب = ...

(أ) حا θ (ب) قا θ

(جـ) قتا θ (د) حتا θ

(١٥) فى الشكل المقابل :



ءحـ = ... سم.

(أ) ٩ (ب) ١٠

(جـ) ١١ (د) ١٢

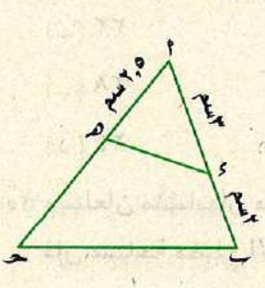
(١٦) المعادلة التى جذراها : ٣ ت ، −٣ ت هى ....

(أ) $\text{س}^{٢}$ + ٩ = ٠ (ب) $\text{س}^{٢}$ = ٩ (جـ) $\text{س}^{٢}$ + ٣ = ٠ (د) $\text{س}^{٢}$ = ٣

(١٧) أبسط صورة للمقدار : حا (١٨٠° + θ) × قا (٢٧٠° + θ) = ...

(أ) ٢ حا θ (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٢ قا θ

(١٨) فى الشكل المقابل :



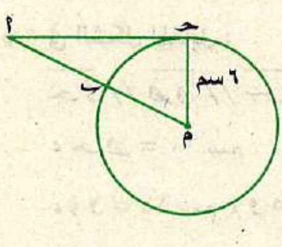
Δ أبحـ ~ Δ أهـء ، أء = ٣ سم ، بء = ٢ سم

، أهـ = ٢,٥ سم فإن : هـحـ = ... سم

(أ) ٢,٥ (ب) ٣

(جـ) ٤,٥ (د) ٣,٥

(١٩) فى الشكل المقابل :



$\overline{\text{أحـ}}$ تمس الدائرة م فى حـ ، م حـ = ٦ سم

، $\text{ق}_{\text{م}}$ (أ) = ٦٤ فإن : أب = ... سم

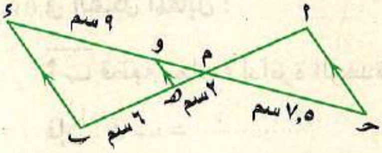
(أ) ٣ (ب) ٤

(جـ) ٥ (د) ٦

(٢٠) مرافق العدد $(٢ + \text{ت})^{-١}$ هو ....

(أ) ٢ + ت (ب) ٢ − ت (جـ) $\frac{٢ - \text{ت}}{٥}$ (د) $\frac{٢ + \text{ت}}{٥}$

(٢١) فى الشكل المقابل :

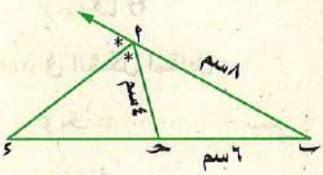


م و + أ م = ...

(أ) ١١ (ب) ٧,٥

(جـ) ٦ (د) ٨

(٢٢) فى الشكل المقابل :



حـ ء = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٨

(٢٣) الدالة د (س) = ٢ س موجبة فى ....

(أ) ع (ب) $ع^+$ (جـ) $ع^-$ (د) ع − {٠}

(٢٤) فى الشكل المقابل :

محيط المثلث أ ب حـ = ... سم

(أ) ٣٦

(ب) ٣٢

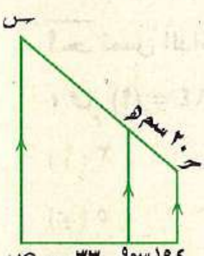
(جـ) ٢٨

(د) ٢٤

(٢٥) مضلعان متشابهان مجموع مساحتى سطحيهما ٢٢٥ $سم^٢$ والنسبة بين محيطيهما ٤ : ٣ فإن مساحة مضلع الأكبر = ... $سم^٢$

(أ) ٨١ (ب) ١٤٤ (جـ) ١٢٨ (د) ٦٩

(٢٦) فى الشكل المقابل :



$\overline{حـ ء}$ // $\overline{هـ و}$ // $\overline{س ص}$

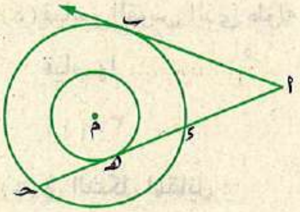
، حـ هـ = ٢٠ سم

، ء و = ١٥ سم ، و ص = ٣٣ سم

فإن : حـ س = ... سم

(أ) ٤٨ (ب) ٦٤ (جـ) ٤٤ (د) ٢١

(٢٧) فى الشكل المقابل :



دائرتان متحدتا المركز م ، $\overrightarrow{أهـ}$ مماس للدائرة الصغرى

، أء = ٢ سم ، ءهـ = ٣ سم

فإن : أب = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أ ب حـ مثلث فيه : $\overrightarrow{أء}$ ينصف الزاوية الداخلة للمثلث ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى ء فإذا كان : أ حـ = ١٥ سم ، أ ب = ٢٧ سم ، ب ء = ١٨ سم

احسب : طول كل من $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{أ ء}$

---

٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٧ = ٠$

فأوجد : المعادلة التى جذراها $ل^٢$ ، $م^٢$

٩ محافظة كفر الشيخ

إدارة فوه
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلى ⑨

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٥٩}$ هى ....

(أ) ت (ب) −١ (جـ) − ت (د) ١

(٢) الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ زاوية قياسها ....°

(أ) ١٢٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٤٢٠

(٣) إذا كانت النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين ٤ : ٩ وكان محيط المثلث الأكبر = ٩٠ سم فإن محيط الأصغر = ... سم

(أ) ٣٠ (ب) ١٣٥ (جـ) ١٨٠ (د) ٦٠

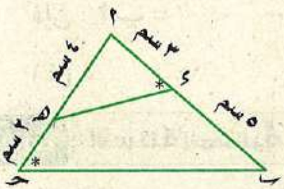
(٤) إذا كان جذرى المعادلة : $س^٢ + ٤ س + ك = ٠$ حقيقيين فإن : ....

(أ) ك = ٠ (ب) ك > ٤ (جـ) ك ≥ ٠ (د) ك ≤ ٤

(٥) قياس القوس الذى طوله ٥ π فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يكافئ زاوية مركزية قياسها ....°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٨٠

(٦) فى الشكل المقابل :



إذا كان محيط المثلث ا ء هـ = ١٣ سم

فإن : ب جـ = ... سم

(أ) ١٥ (ب) ١٦

(جـ) ١٧ (د) ١٢

(٧) إذا كان أحد جذرى المعادلة : س^{٢} − ٣ س + جـ = ٠ ضعف الجذر الآخر

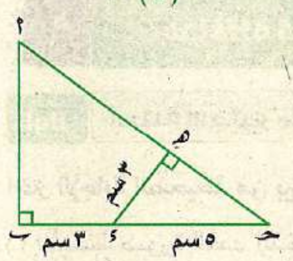
فإن : جـ = ...

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٤

(٨) إذا كان : قتا θ = ٢ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن : قياس θ = ...°

(أ) ١٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٥ (د) ٦٠

(٩) فى الشكل المقابل :



ء هـ = ء ب = ٣ سم ، ء جـ = ٥ سم

، ق (∠ ب) = ق (∠ ء هـ جـ) = ٩٠°

فإن : ا هـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(١٠) المعادلة التربيعية التى جذراها : ٢ ت ، −٢ ت هى ....

(أ) س^{٢} = ٤ ت (ب) س^{٢} + ٤ = ٠

(جـ) س^{٢} − ٤ = ٠ (د) ت س^{٢} + ٤ = ٠

(١١) القيمة العظمى للدالة د : د (س) = ٥ جا θ هى ....

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) −٥ (د) ∞

(١٢) المضلعان المتشابهان يكونان متطابقان إذا كان معامل التشابه ك يحقق ....

(أ) ك = $\frac{١}{٢}$ (ب) ك = ١ (جـ) ك > ١ (د) ٠ < ك < ١

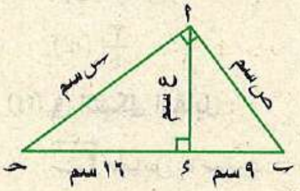
(١٣) إشارة الدالة د : د (س) = ٦ − ٢ س تكون موجبة عندما ....

(أ) س < ٣ (ب) س ≥ ٣ (جـ) س > ٣ (د) س ≤ ٣

(١٤) الحل العام للمعادلة : طا ٢ θ = ظتا θ هو .... حيث ن ∈ ص

(أ) $\frac{\pi}{٢} + \pi$ ن (ب) $\frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{٣}$ ن (جـ) $\frac{\pi}{٦} + ٢\pi$ ن (د) $\frac{\pi}{٦} + \pi$ ن

(١٥) في الشكل المقابل :



س + ص + ع = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٥

(جـ) ٢٠ (د) ٤٧

(١٦) إذا كان : س = −١ أحد جذرى المعادلة : $س^٢$ − ٥ س + ك = ٠

فإن : $ك^٢$ = ...

(أ) ٦ (ب) −٣٦ (جـ) −٦ (د) ٣٦

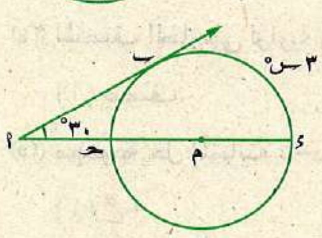
(١٧) في الشكل المقابل :

ق$_م$ (أ) = ...

(أ) ٩ (ب) ٢٠

(جـ) ٣٦ (د) ٤٥

(١٨) في الشكل المقابل :



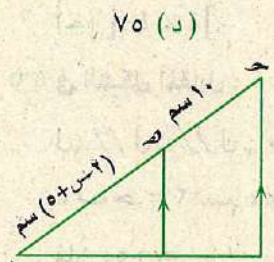
$\overleftarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة عند ب

ق ($\overset{\frown}{\text{بء}}$) = ٣ س° ، ق (∠ أ) = ٣٠°

فإن : س = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٧٥

(١٩) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{بحـ}}$ ، ب ء = ٨ سم ، حـ هـ = ١٠ سم

، ء أ = ١٢ سم ، هـ أ = (٢ س + ٥) سم

فإن : س = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١٢

(٢٠) إذا كان أحد جذرى المعادلة : سٍ^{٢} − (ب − ٣) سٍ + ٥ = ٠ معكوسًا جمعيًا للآخر

فإن : ب = ...

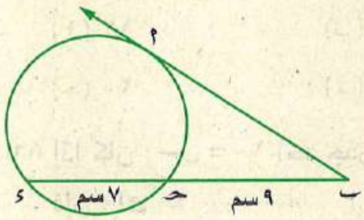
(أ) −٥ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٥

(٢١) إذا كانت زاوية θ فى وضعها القياسى ، جا $\theta = \frac{٣}{٥}$ حيث $\theta \in \left[\frac{\pi}{٢} ، \pi\right]$

فإن : ظا (٩٠° + θ) = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) $-\frac{٣}{٤}$ (د) $-\frac{٤}{٣}$

(٢٢) فى الشكل المقابل :



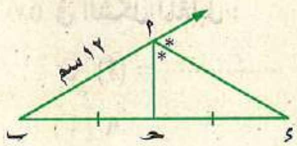
ب أ مماس ، ب جـ = ٩ سم ، جـ د = ٧ سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٦٣ (ب) ١٤٤

(جـ) ١٢ (د) $\frac{٩}{١٦}$

(٢٣) فى الشكل المقابل :



أ د منصف خارجى لزاوية (∠ أ)

جـ ب = جـ د فإن : أ جـ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٤) المنصف الخارجى لزاوية رأس المثلث المتساوى الساقين .... القاعدة.

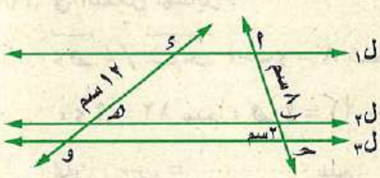
(أ) ينصف. (ب) ينطبق على. (جـ) يوازى. (د) عمودى على.

(٢٥) مجموعة حل المتباينة : سٍ^{٢} + ١٦ > ٨ سٍ فى ح هى ....

(أ) ح (ب) ح − {٤}

(جـ)]−٤ ، ٤[(د) ح − [−٤ ، ٤]

(٢٦) فى الشكل المقابل :



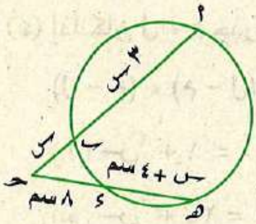
ل$_١$ // ل$_٢$ // ل$_٣$ ، أ ب = ٨ سم

، ب جـ = ٢ سم ، د هـ = ١٢ سم

فإن : د و = ...

(أ) ٣ (ب) ١٢ (جـ) ٤ (د) ١٥

(٢٧) في الشكل المقابل :



أب = ٣ س سم ، ب ح = س سم

، ء هـ = (س + ٤) سم

ء ح = ٨ سم فإن : س = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٣ (د) ٩

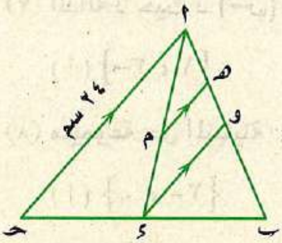
ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كان ل ، م جذري المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٧ =$ صفر أوجد : قيمة $ل^٢ + م^٢$

---

٢ في الشكل المقابل :



أ ب ح مثلث فيه م نقطة تقاطع المتوسطات

، $\overline{ءو}$ // $\overline{مهـ}$ // $\overline{حأ}$

، أ ح = ٢٤ سم

أوجد : طول $\overline{هـم}$

١٠ محافظة البحيرة

إدارة بندر دمنهور
توجيه الرياضيات

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختبار تفاعلي (١٠)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أبسط صورة للعدد التخيلي $ت^{-٤٣}$ هي ....

(أ) ت (ب) −ت (جـ) ١ (د) −١

(٢) إذا كان جذري المعادلة : $م س^٢ - ٥ س = -٢$ معكوس ضربي لبعضهما البعض فإن : م = ...

(أ) −٥ (ب) −٢ (جـ) ٢ (د) ٥

(٣) إذا كان جذري المعادلة : $س^٢ - ٤ س + ك = ٠$ حقيقيان فإن : ك ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٤[(ب)]٤ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٤] (د) [٤ ، ∞[

(٤) إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $س^2 - 5 س + 6 = 0$ فإن المعادلة التى جذراها (ل − م) ، (م − ل) هى ....

(أ) $س^2 + 1 = 0$ (ب) $س^2 - 1 = 0$

(جـ) $س^2 + 25 = 0$ (د) $س^2 - س = 0$

(٥) إذا كان : أ + ب ت = $\frac{2 + ت}{2 - ت}$ فإن : $أ^2 + ب^2$ = ...

(أ) −ت (ب) −1 (جـ) 2 (د) 1

(٦) مجموعة حل المعادلة : $س^2 = 5 س$ فى ح هى ....

(أ) {0 ، 5} (ب) {0} (جـ) {5} (د) {1 ، 5}

(٧) الدالة د حيث د (س) = (س − 1) (س + 3) تكون سالبة عند ....

(أ) [−3 ، 1] (ب)]−1 ، 3[(جـ) [−3 ، 0] (د)]−3 ، 1[

(٨) مجموعة حل المتباينة : − س (س + 3) ≤ 0 فى ح هى ....

(أ) {0 ، −3} (ب)]−3 ، 0[(جـ) [−3 ، 0] (د) [−3 ، 0]

(٩) الزاوية التى قياسها (−850°) تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٠) فى الدائرة التى طول قطرها ٢٤ سم ، يكون طول القوس المقابل للزاوية المحيطية التى قياسها 30° = ... سم

(أ) π (ب) 2π (جـ) 3π (د) 4π

(١١) إذا كان : جا (2 θ) = جتا (3 θ) فإن : 0° < θ < 90° فإن : θ = ...°

(أ) 15 (ب) 18 (جـ) 30 (د) 45

(١٢) أبسط صورة للمقدار : جتا (180° − θ) + جا (90° + θ) = ...

(أ) صفر (ب) 2 (جـ) 2 جتا θ (د) 2 جا θ

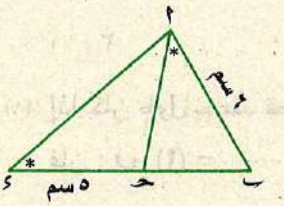
(١٣) إذا كان : θ = $جتا^{-1}$ (−6 , 0) حيث θ أصغر قياس زاوية موجبة فإن : θ = ...

(أ) 52َ 36° (ب) 36َ 52° (جـ) 52َ 126° (د) 15َ 40°

(١٤) إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة θ فى وضعها القياسى تقطع دائرة الوحدة فى النقطة (− س ، س) حيث س > ٠ فإن : ظا س = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ (د) −١

(١٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق (∠ب أ حـ) = ق (∠ء)

، أ ب = ٦ سم ، ء حـ = ٥ سم

فإن : ب حـ = ... سم

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٠

(١٦) إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

فإن : أ ب × ع ل = س ص × ....

(أ) ع ل (ب) أ حـ (جـ) ب حـ (د) حـ ء

(١٧) فى الشكل المقابل :

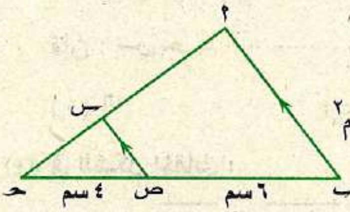
إذا كان : $\overline{أ ب} \cap \overline{حـ ء} = \{ك\}$

، أ ك = ٣ سم ، حـ ك = ٢ سم ، ب ك = ٦ سم

فإن : ء ك = ... سم

(أ) ٩ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٦

(١٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{س ص}$ // $\overline{أ ب}$ ، ب ص = ٦ سم

، حـ ص = ٤ سم مساحة المضلع أ ب ص س = ٤٢ سم^{٢}

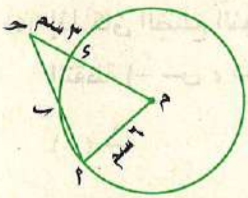
فإن : مساحة Δ حـ س ص = ... سم^{٢}

(أ) ١٦ (ب) ١٠ (جـ) ٨ (د) ٢٠

(١٩) إذا كانت النسبة بين محيطى مثلثين متشابهين هى ١ : ٤ فإن النسبة بين مساحتيهما = ...

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (جـ) ١ : ٨ (د) ١ : ١٦

(٢٠) في الشكل المقابل :



إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ٦ سم

، حـ ء = ٣ سم ، أ م = ٦ سم ، ق (∠ أ) = ق (∠ م)

فإن : ب حـ = ... سم

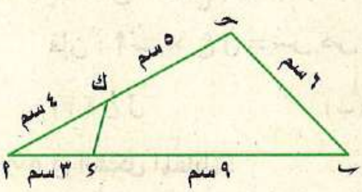
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢١) إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ٣ سم أ نقطة فى نفس المستوى حيث أ م = ٥ سم

فإن : $ق_م$ (أ) = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٦

(٢٢) في الشكل المقابل :



ك ∈ أحـ ، ء ∈ أب حيث أء = ٣ سم

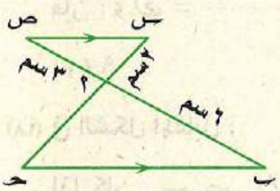
، ء ب = ٩ سم ، ب حـ = ٦ سم

، ك حـ = ٥ سم ، أ ك = ٤ سم

فإن : ء ك = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ٦

(٢٣) في الشكل المقابل :



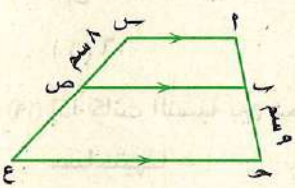
إذا كان : س ص // حـ ب ، س حـ ∩ ب ص = {أ}

، أ ص = ٣ سم ، أ ب = ٦ سم ، أ س = ٢ سم

فإن : س حـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٥

(٢٤) في الشكل المقابل :



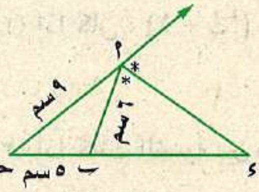
إذا كان : أ س // ب ص // حـ ع ، ص ع = ٢ أ ب

، ب حـ = ٩ سم ، س ص = ٨ سم

فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ٤

(٢٥) **في الشكل المقابل :**



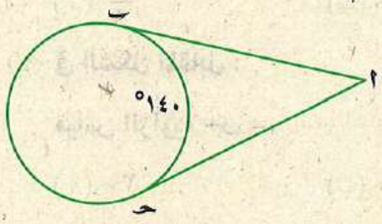
إذا كان : ب جـ = ٥ سم ، جـ أ = ٩ سم ، أ ب = ٦ سم

$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ٦ (د) ٧

(٢٦) **في الشكل المقابل :**



إذا كان : $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ قطعتان مماستان للدائرة

، ق ($\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$) = ١٤٠°

فإن : ق (∠ أ) = ...°

(أ) ٢٢٠ (ب) ١١٠ (جـ) ٤٠ (د) ٥٥

(٢٧) إذا كانت المسافة بين النقطة أ ومركز الدائرة م = ١٠ سم وكانت قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة تساوى ٦٤ سم فإن طول نصف قطر الدائرة = ... سم

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٩

ثانيًا | الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ إذا كان : أ ب جـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم ، جـ ء = ٦ سم ، أ ء = ٤ سم ، $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ أ ، و يقطع $\overline{\text{ب ء}}$ عند س

إثبت أن : $\overleftarrow{\text{جـ س}}$ ينصف ∠ ب جـ ء

٢ حدد الفترة التى تكون فيها الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ٣ س − ١٠ موجبة.

١١ محافظة الفيوم

مديرية التربية والتعليم
توجيه الرياضيات

أولًا | أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : Δ أ ب جـ ~ Δ ء هـ و ، وكان : أ ب = س سم ، ء هـ = (س + ١) سم ، مساحة Δ أ ب جـ = (س + ٢) سم^{٢} ، مساحة Δ ء هـ و = (س + ٧) سم^{٢}

فإن : س = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

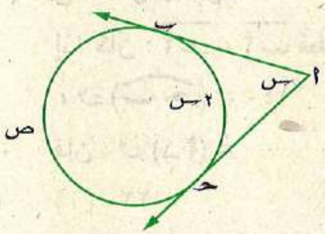
(٢) إذا كان : $(١ + ت^٤)(١ - ت^٣)$ = س + ت ص فإن : س + ص = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعى هى ٥ : ٤ : ٩ : ٦ فإن قياس أصغر زواياه يساوى ....°

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{٥\pi}{١٢}$ (د) $\frac{٢\pi}{٣}$

(٤) فى الشكل المقابل :



قياس الزاوية س = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥

(جـ) ٥٠ (د) ٦٠

(٥) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٣ : ٥ ، ومجموع مساحتيهما ١٣٦ سم^٢ فإن مساحة المضلع الأكبر .... سم^٢

(أ) ٢٥ (ب) ٣٦ (جـ) ١٠٠ (د) ١٣٦

(٦) إذا كانت مجموعة حل المتباينة : س^٢ - ب س > ١٠ هى ح - [-٢ ، ٥]

فإن : ب = ...

(أ) -١٠ (ب) -٢ (جـ) ٣ (د) ٥

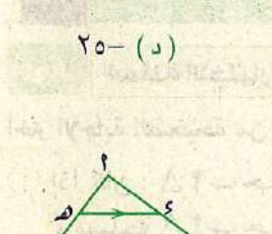
(٧) إذا كان : جا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث θ ∈]٠° ، ٩٠°[فإن : ظا (١٨٠° + θ) = ...

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{-٤}{٣}$

(٨) إذا كان طول نصف قطر الدائرة م يساوى ٣ سم ، وكانت النقطة أ تقع فى مستوى الدائرة حيث م أ = ٤ سم فإن : $ق_م$ (أ) = ...

(أ) ٧ (ب) -٧ (جـ) ٢٥ (د) -٢٥

(٩) فى الشكل المقابل :



جميع العلاقات التالية صحيحة ماعدا ....

(أ) $\frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$ (ب) $\frac{أء}{ءب} = \frac{ءهـ}{بجـ}$

(جـ) $\frac{أجـ}{أب} = \frac{أهـ}{أء}$ (د) $\frac{جـهـ}{أجـ} = \frac{بء}{أب}$

(١٠) إذا كان : جا² θ = $\frac{٩}{٢٥}$ حيث θ ∈]١٨٠° ، ٢٧٠°[

فإن قيمة المقدار : $\frac{٣ \text{ طا } (٩٠ - \theta) + ٥ \text{ جا } (١٨٠ - \theta)}{٤ \text{ قتا } (٢٧٠ - \theta)}$ = ...

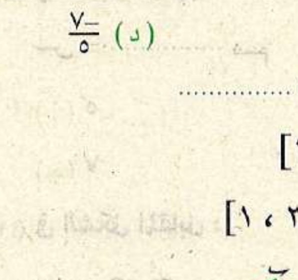
(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٧}{٥}$ (جـ) $\frac{-١}{٥}$ (د) $\frac{-٧}{٥}$

(١١) الدالة د (س) = ٣ − ٢ س − س² تكون موجبة فى الفترة ....

(أ)]−٣ ، ١[(ب) [−٣ ، ١]

(جـ) ح −]−٣ ، ١[(د) ح − [−٣ ، ١]

(١٢) فى الشكل المقابل :

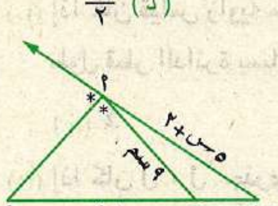


Δ أ ب جـ ~ Δ أ ء هـ

فإن : س = ... سم

(أ) $\frac{٧}{٢}$ (ب) $\frac{٩}{٢}$ (جـ) $\frac{١١}{٢}$ (د) $\frac{١٣}{٢}$

(١٣) فى الشكل المقابل :



س = ... سم

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

(١٤) إذا كان : س = ٥ أحد جذرى المعادلة : س² + ب س = ٢ ب + ٤

فإن : ب = ...

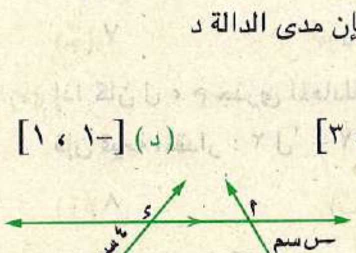
(أ) ٧ (ب) −٧ (جـ) $\frac{٢٩}{٣}$ (د) $\frac{-٢٩}{٣}$

(١٥) إذا كانت د (θ) = ٣ جتا θ حيث : صفر < θ < ٢ π فإن مدى الدالة د

هو ....

(أ) [−٣ ، ٣] (ب) [−٣ ، ٠] (جـ) [٠ ، ٣] (د) [−١ ، ١]

(١٦) فى الشكل المقابل :



س ص = ... سم²

(أ) ٩ (ب) ١٦

(جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(١٧) إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $س^٢ + ١ =$ صفر ، فإن : $ل^{٢٠٢٢} + م^{٢٠٢٢} =$ ....

(أ) صفر　(ب) ٢　(جـ) −٢　(د) ٢ ت

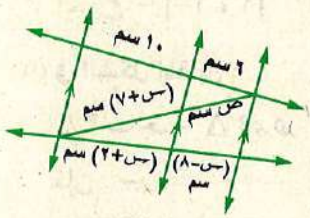
(١٨) فى الشكل المقابل :

س = ... سم

(أ) ٥　(ب) ٦

(جـ) ٧　(د) ٨

(١٩) فى الشكل المقابل :



س − ص = ... سم

(أ) ٤　(ب) ٥

(جـ) ٦　(د) ٧

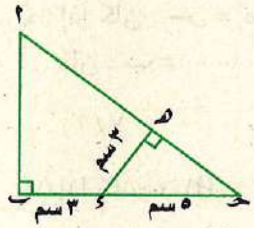
(٢٠) إذا كان قياس زاوية مركزية فى دائرة يساوى ١٠٥° ، وتحصر قوسًا طوله $\frac{٧}{٣}\pi$ سم فإن طول قطر الدائرة يساوى .... سم

(أ) ٤　(ب) ٦　(جـ) ٨　(د) ١٠

(٢١) إذا كان ل ، $ل^٢$ جذرى المعادلة : $س^٢ +$ ب $س + ٨ = ٠$　فإن : ب = ...

(أ) ٦　(ب) −٦　(جـ) ٢　(د) −٢

(٢٢) فى الشكل المقابل :



أهـ = ... سم

(أ) ٥　(ب) ٦

(جـ) ٧　(د) ٨

(٢٣) إذا كان ل ، م جذرى المعادلة : $س^٢ - ١١ س + ٩ = ٠$

فإن قيمة المقدار : $٢ ل^٢ - ٢٢ ل + ٢٩$ تساوى ....

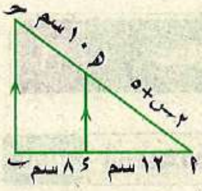
(أ) ٨　(ب) ١٠　(جـ) ١١　(د) ٦

(٢٤) إذا كان : ٢ جا θ + ١ = صفر حيث θ قياس أكبر زاوية موجبة ، θ ∈] ٠ ، ٢π [

فإن : θ = ...°

(أ) ٦٠　(ب) ١٢٠　(جـ) ٢٤٠　(د) ٣٠٠

(٢٥) في الشكل المقابل :



$\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

فإن : س = ... سم

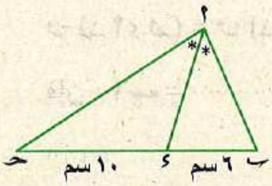
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٦) الدالة د (س) = ٨ − ٢ س تكون سالبة في الفترة ....

(أ)]٤ ، ∞[(ب)]−٤ ، ∞[

(جـ)]−∞ ، −٤[(د)]−∞ ، ٤[

(٢٧) في الشكل المقابل :



أحـ − أب = ٦ سم

فإن : أحـ = ... سم

(أ) ١٣ (ب) ١٤

(جـ) ١٥ (د) ١٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ س ص ع مثلث فيه : س ص = ١٢ سم ، س ع = ١٥ سم ، ل ∈ $\overline{\text{س ص}}$

بحيث س ل = ٥ سم ، م ∈ $\overline{\text{س ع}}$ بحيث س م = ٤ سم

، إثبت أن : △ س م ل ~ △ س ص ع ، ثم أوجد النسبة بين مساحة سطح

△ س م ل إلى مساحة سطح الشكل الرباعي ل ص ع م

---

٢ إذا كان ل ، م جذري المعادلة : ٢ $\text{س}^{٢}$ − ٧ س + ٦ = صفر

فأوجد المعادلة التربيعية التي جذراها ل − ٤ ، ٤ − م

١٢ محافظة بنى سويف

إدارة ببا
توجيه الرياضيات

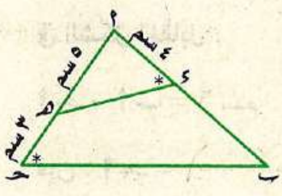
أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إشارة د (س) = ٦ س تكون سالبة فى الفترة ....

(أ)]−∞ ، ٦[(ب)]٦ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٠[(د)]٠ ، ∞[

(٢) فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ د هـ) = ق (∠ جـ)

فإن : أ ب = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ٨

(جـ) ١٠ (د) ٦

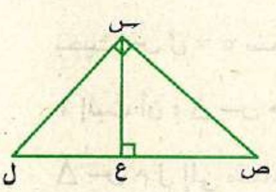
(٣) إذا كانت : θ قياس زاوية ربعية فى الوضع القياسى ، ١٨٠° < θ < ٣٦٠°

فإن الضلع النهائى يقع ....

(أ) فى الربع الأول. (ب) على محور الصادات.

(جـ) فى الربع الثانى. (د) على محور السينات.

(٤) فى الشكل المقابل :



ص ع = ٥ سم ، ع ل = ٤ سم

فإن : س ل = ...

(أ) ٦ (ب) ٣٦

(جـ) ٥ (د) ٢٠

(٥) أشارة الدالة د (س) = س^{٢} − ٦ س + ٩ موجبة لكل س ....

(أ) ح (ب) ح − {٣} (جـ) ح − {٦} (د) ح − {٩}

(٦) دائرتان النسبة بين طولى نصفى قطريهما ٣ : ٥ ومساحة سطح الصغرى = ٢٧ سم^2

فإن مساحة سطح الكبرى = ... سم^2

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٧٥ (د) ٥٠

(٧) ٣٢ س + ت ص = ت^{35} + ٦٤ حيث ت^2 = −١ فإن : س − ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٥ ت (د) ٣ + ٢ ت

(٨) فى الشكل المقابل :

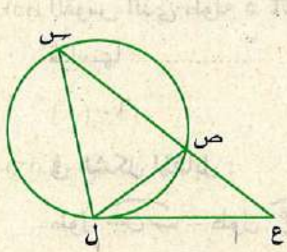
أ ل = ٤ سم ، ل ع = ٦ سم

، أ ع = ٨ سم

فإن : س = ... سم

(أ) ٩ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ٦

(٩) فى الشكل المقابل :



ع ل مماسة للدائرة عند ل فإن ....

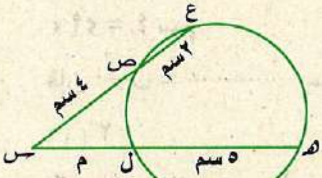
(أ) Δ ع ص ل ~ Δ ع ل س

(ب) Δ ع ص ل ~ Δ ع س ل

(جـ) Δ ع ص ل ~ Δ س ص ل

(د) Δ ع ص ل ~ Δ س ل ص

(١٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان : س ص = ٤ سم ، ص ع = ٢ سم

، هـ ل = ٥ سم ، ل س = م

فإن : م = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٥

(١١) إذا كان العدد التخيلى ت حيث ت^2 = −١ فإن ....

(أ) المعكوس الجمعى للعدد ت هو − ت فقط.

(ب) المعكوس الضرب للعدد ت هو − ت فقط.

(جـ) العدد المرافق للعدد ت هو − ت فقط.

(د) كل ما سبق صحيح.

(١٢) القياس الدائرى لزاوية مركزية تحصر قوسا طوله ٦ سم فى دائرة محيطها ٤ π سم هو ....ء

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) ٢٤ (د) ١٢

(١٣) كل مما يلى صحيحًا ماعدا ....

(أ) جميع المربعات متشابهة فيما بينها.

(ب) جميع المضلعات المتطابقة متشابهه فيما بينها.

(جـ) جميع المستطيلات متشابهه فيما بينها.

(د) جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهه فيما بينها.

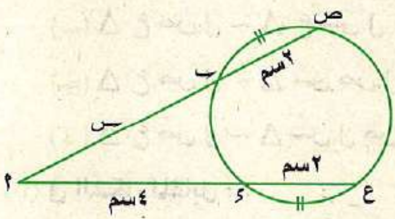
(١٤) الزاوية التى قياسها $\frac{٣١ \pi}{٦}$ تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١٥) القوس الذى طوله ٥ π سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها ....°

(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٨٠

(١٦) فى الشكل المقابل :



طول $\overset{\frown}{\text{ص ب}}$ = طول $\overset{\frown}{\text{ء ع}}$

، ص ب = ٢ سم

، أ ء = ٤ سم

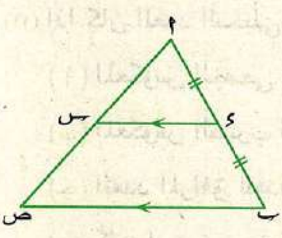
فإن : س = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(١٧) يكون للمعادلة : ٢ س^٢ − ٤ س + م = ٠ جذرين حقيقيين مختلفين إذا كانت ....

(أ) م = ٨ (ب) م > ٢ (جـ) م < ٢ (د) م = ٢

(١٨) فى الشكل المقابل :



إذا كان مساحة : Δ أ ء س = ١٥ سم^٢

فإن مساحة الشكل ء ب ص س = ... سم^٢

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٦٠ (د) ٤٥

(١٩) إذا كان م جذر المعادلة : $س^٢ - ٥ س + ٧ = ٠$

فإن قيمة المقدار : $م^٢ - ٥ م + ٧ = $ ....

(أ) صفر (ب) −١٠ (جـ) ٧ (د) ٥

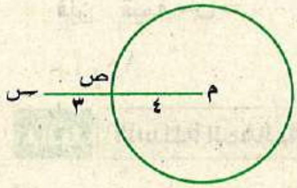
(٢٠) إذا كان المضلعان المتشابهان متطابقين فإن معامل التشابه بينهما = ...

(أ) صفر (ب) ٥٠ ٪ (جـ) ١٠٠ ٪ (د) ١٢٥ ٪

(٢١) قيمة : $\frac{١ + ٢ ت}{١ - ت} + \frac{٣}{١ + ت}$ فى ابسط صورة ....

(أ) −١ (ب) ت (جـ) ١ − ت (د) ١

(٢٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان : س ص = ٣ سم

، ص م = ٤ سم

فإن : $ق_م$ (س) = ...

(أ) ٣٣ (ب) ١٦ (جـ) ٦٥ (د) ٤٩

(٢٣) إذا كان : جا θ = جا (٩٠ − θ) حيث زاوية θ حادة فإن : θ = ...°

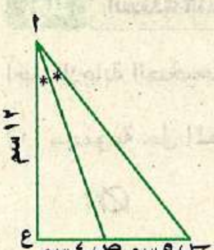
(أ) ٢٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٣٠ (د) ٩٠

(٢٤) إذا كان أحد جذرى المعادلة : $(س - ل)^٢ + ٤ س = ٠$ معكوس جمعى للآخر

فإن : ل = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

(٢٥) فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftarrow{أص}$ ينصف ∠ (س أ ع)

، س ص = ٥ سم ، أ ع = ١٢ سم ، ع ص = ٤ سم

فإن : أ س = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ١٢

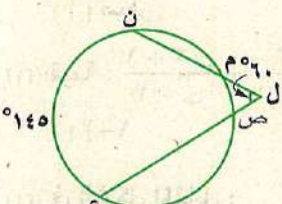
(جـ) ١٣ (د) ١٥

(٢٦) إذا كانت : جتا س = $\frac{٣}{٥}$ حيث س أكبر زاوية موجبة

فإن : جا (١٨٠° + س) + جا ١٥٠° = ...

(أ) $\frac{-٣}{١٠}$ (ب) $\frac{-١}{١٠}$ (جـ) $\frac{١١}{١٠}$ (د) $\frac{١٣}{١٠}$

(٢٧) فى الشكل المقابل :



إذا كان : ق $(\overset{\frown}{نع})$ = ١٤٥°

، ق $(\overset{\frown}{مص})$ = ٢ س − ٥

، ق (∠ ل) = ٦٠°

فإن : قيمة س = ...°

(أ) ١٥ (ب) ٧٠ (جـ) ٣٠ (د) ٢٠٥

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ أ ب جـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ ، رسم $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{جـ ب}$ ويقطع $\overline{أ ب}$ فى و ، رسم $\overleftrightarrow{هـ م}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ويقطع أء فى م أثبت أن : $\overline{و م}$ // $\overline{ب ء}$

---

٢ كون المعادلة التربيعية التى جذراها : ٥ + ت ، ٥ − ت حيث $ت^٢$ = −١

١٣	**محافظة المنيا**	إدارة ملوى مديرية التربية والتعليم

أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد**

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مجموعة حل المعادلة : $س^٢$ + ٣ = ٠ فى ح هى ....

(أ) ∅ (ب) {−٣} (جـ) {$\sqrt{٣}$} (د) {−$\sqrt{٣}$}

(٢) أبسط صورة للعدد التخيلى $ت^{٤٥}$ هى ....

(أ) − ت (ب) ت (جـ) ١ (د) −١

(٣) مرافق العدد المركب (٣ ت − ٤) هو ....

(أ) ٣ ت + ٤ (ب) ٧ − ٧ ت (جـ) −٤ − ٣ ت (د) −٣ ت + ٤

(٤) قيمة (٢ + ٣ ت) (٢ − ٣ ت) = ...

(أ) ١٢ (ب) ١١ (جـ) ١٤ (د) ١٣

(٥) جذرى المعادلة : $س^٢$ + ٢ س + م = ٠ يكونان حقيقين مختلفين إذا كانت ....

(أ) م > −١ (ب) م > ١ (جـ) م < −١ (د) م < ١

(٦) إذا كان أحد جذرى المعادلة التربيعية : $س^٢$ − (ك + ٥) س + ٣ = ٠

هو معكوس جمعى للآخر فإن : قيمة ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) −٥ (د) −٣

(٧) مجموع جذرى المعادلة التربيعية : ٢ س (س − ٢) = ٧ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) −٤ (د) −٢

(٨) الدالة التربيعية د (س) = $س^٢$ − ٧ س + ١٢ تكون سالبة فى الفترة ....

(أ)]٣ ، ٤[(ب) ح −]٣ ، ٤[

(جـ) [٣ ، ٤] (د) ح − [٣ ، ٤]

(٩) طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٤٥° فى دائرة طول نصف

قطرها ١٦ سم = ...

(أ) ٤ π سم (ب) ٨ π سم (جـ) ٦ π سم (د) ٢٤ π سم

(١٠) الزاوية التى قياسها ٨٨٠° تقع فى الربع ....

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

(١١) إذا كان الضلع النهائى لزاوية قياسها θ والمرسومة فى الوضع القياسى يقطع دائرة

الوحدة فى النقطة $\left(\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$ فإن : قيمة ظا θ = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(١٢) إذا كان : س جا ٤٥° جتا ٤٥° = جا ٩٠° فإن : قيمة س = ...

(أ) ١ (ب) −٢ (جـ) −١ (د) ٢

(١٣) طا ١٧° = ...

(أ) ظتا ٧٣°　　(ب) قتا ٧٣°　　(جـ) قا ٧٣°　　(د) حتا ٧٣°

(١٤) مدى الدالة د (س) = حا ٥ س هو ....

(أ) [−١ ، ١]　　(ب) [−٥ ، ٥]　　(جـ) [−١ ، ٥]　　(د) [−٥ ، ١]

(١٥) إذا كان : ك معامل تشابه المضلع س إلى المضلع ص فإن المضلع س هو تكبير للمضلع ص إذا كانت : قيمة ك = ...

(أ) ١,٧　　(ب) ١　　(جـ) ٠,٧　　(د) صفر

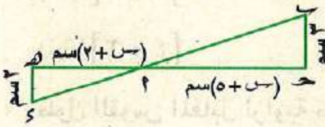
(١٦) إذا كان المضلع ل م ن هـ ~ المضلع س ص ع ل وكان : م ن = ٨ ، ص ع = ٦ سم وكان محيط المضلع ل م ن هـ = ٤٨ سم فإن محيط المضلع س ص ع ل = ...

(أ) ٣٦　　(ب) ١٢　　(جـ) ٢٤　　(د) ١٨

(١٧) مثلثان متشابهان النسبة بين طولى ارتفاعين متناظرين فيهما ٧ : ١١ فإن النسبة بين مساحتيهما = ... : ....

(أ) ٧ : ١١　　(ب) ٤٩ : ١٢١　　(جـ) ١١ : ٧　　(د) ١٢١ : ٤٩

(١٨) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ ~ Δ أ ء هـ

قيمة : س = ...

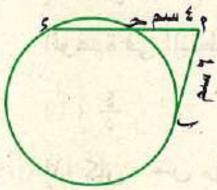
(أ) ٥　　(ب) ٤　　(جـ) ٣　　(د) ٢

(١٩) إذا كان المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

فإن : أ ب × ع ل = حـ ء × ....

(أ) س ع　　(ب) س ص　　(جـ) س ل　　(د) ص ع

(٢٠) فى الشكل المقابل :



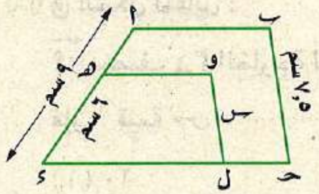
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة

إذا كان : أ ب = ٦ سم ، أ حـ = ٤ سم

أوجد : حـ ء = ... سم

(أ) ٢٠　　(ب) ١٠　　(جـ) ٥　　(د) ٨

(٢١) في الشكل المقابل :



المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع هـ و ل ء

ب حـ = ٧,٥ سم ، أ ء = ٩ سم

، هـ ء = ٦ سم

فإن : قيمة س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

(٢٢) في الشكل المقابل :

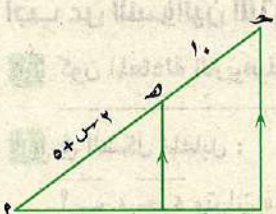
إذا كان : أء // هـو // ب حـ

أ هـ = ٤ سم ، هـ ب = ٦ سم ، ء و = ٢ سم

فإن : حـ و = ...

(أ) ٢ (ب) ٢,٥ (جـ) ٣ (د) ٣,٥

(٢٣) في الشكل المقابل :



ء هـ // ب حـ

فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٦

(جـ) ٥ (د) ٧

(٢٤) في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث فيه أء منصف زاوية ∠ أ

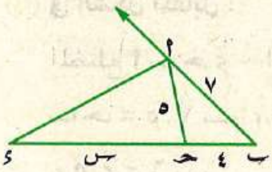
فإن : طول ء حـ = ...

(أ) ٨ سم (ب) ٩ سم (جـ) ١٠ سم (د) ١١ سم

(٢٥) دائرة م طول نصف قطرها ١٢ سم ، أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة ١٣ سم

فإن : $ق_م$ (أ) = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) -٢٥ (د) ٢٥



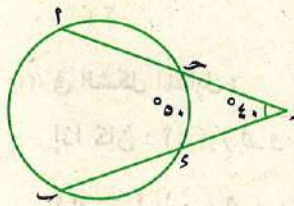
(٢٦) في الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{أء}}$ منصف ∠ أ الخارجة للمثلث أ ب حـ

فإن : قيمة س = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٥

(جـ) ١٢ (د) ١٠



(٢٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ هـ) = ٤٠°

، ق $(\overset{\frown}{\text{ء حـ}})$ = ٥٠°

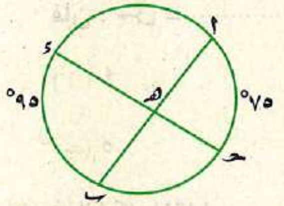
فإن : قياس القوس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١١٠° (د) ١٣٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ كون المعادلة التربيعية التي جذريها : $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$



٢ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران في الدائرة بحيث

$\overline{\text{أ ب}} \cap \overline{\text{حـ ء}}$ = {هـ} ، ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ = ٧٥°

، ق $(\overset{\frown}{\text{ء ب}})$ = ٩٥° أوجد : ق (∠ أ هـ حـ)

١٤ محافظة أسيوط

مديرية التربية والتعليم
إدارة أبو تيج

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مضلعان متشابهان النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٤ فإذا كان محيط المضلع الأصغر ١٥ سم فإن محيط المضلع الأكبر = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) $\frac{٨٠}{٣}$ (جـ) ٢٧ (د) $\frac{٤٥}{٤}$

(٢) المعادلة التربيعية التى جذراها ٥ ت ، −٥ ت هى ....

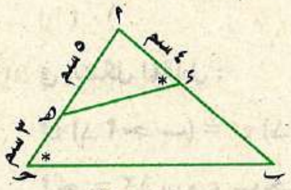
(أ) $س^٢ = ٥$ ت　　　(ب) $س^٢ - ٢٥ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ٢٥ = ٠$　　　(د) $س^٢ - ١٠$ ت $س + ٢٥ = ٠$

(٣) قياس الزاوية الربعية إحدى مضاعفات الزاوية التى قياسها ....°

(أ) ٣٦٠　　(ب) ١٨٠　　(جـ) ٩٠　　(د) ٦٠

(٤) فى الشكل المقابل :



ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ جـ) ، أ ء = ٤ سم ، أ هـ = ٥ سم

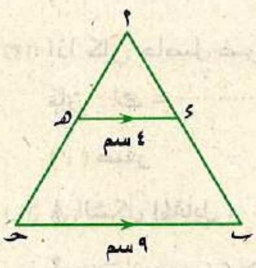
، هـ جـ = ٣ سم　　فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٥　　(ب) ٦　　(جـ) ٤　　(د) ٧

(٥) مرافق العدد (−٨) هو ....

(أ) ٨ ت　　(ب) −٨ ت　　(جـ) −٨　　(د) ٨

(٦) فى الشكل المقابل :



$\overline{ءهـ} // \overline{بجـ}$

$\frac{م \Delta أءهـ}{م \Delta أبجـ} =$ ....

(أ) $\frac{١٦}{٨١}$　　(ب) $\frac{١٦}{٦٥}$

(جـ) $\frac{٨١}{١٦}$　　(د) $\frac{٦٥}{١٦}$

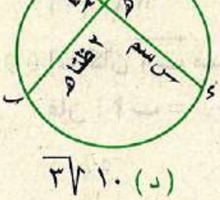
(٧) إذا كان : جا $\theta = \frac{٣}{٥}$　　فإن : جتا $(٢٧٠ - \theta) =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$　　(ب) $\frac{-٣}{٥}$　　(جـ) $\frac{٤}{٥}$　　(د) $\frac{-٤}{٥}$

(٨) ٣ + ٣ ت + ٣ $ت^٢$ + ٣ $ت^٣$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ٣　　(جـ) ١٢　　(د) ١٢ ت

(٩) فى الشكل المقابل :



$\overline{أب} \cap \overline{جـء} = \{و\}$

أ و = ٥ ظا هـ ، و ب = ٢ ظا هـ ، و جـ = ٢ سم

و ء = س سم　　فإن : س = ... سم

(أ) ٥　　(ب) ١٠　　(جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$　　(د) $١٠\sqrt{٣}$

(١٠) إذا كان الضلع النهائى للزاوية θ (فى وضعها القياسى) يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{-٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ فإن : طتا θ = ...

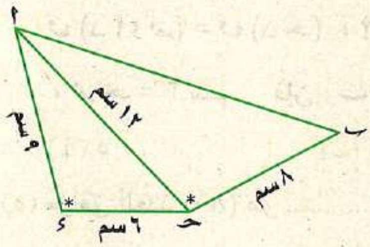
(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{-٥}{٣}$ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) -٠,٧٥

(١١) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢$ - ك س + ٢٥ = ٠ حقيقيان متساويان

فإن : ك = ...

(أ) ١٠ (ب) -١٠ (جـ) ± ١٠ (د) ± ١٠٠

(١٢) فى الشكل المقابل :



ق (د أ جـ ب) = ق (د أ ء جـ)

أ جـ = ١٢ سم ، ب جـ = ٨ سم

، جـ ء = ٦ سم ، أ ء = ٩ سم

فإن : أ ب = ... سم

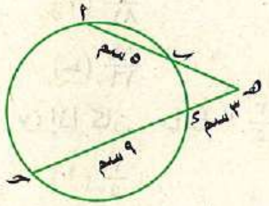
(أ) ١٢ (ب) ١٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

(١٣) إذا كان حاصل ضرب جذرى المعادلة : (ك - ٢) $س^٢$ - ٦ س + ١٢ = ٠ يساوى ٣

فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣

(١٤) فى الشكل المقابل :



أ ب = ٥ سم ، ء جـ = ٩ سم

هـ ء = ٣ سم فإن : هـ ب = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٥

(جـ) ٤ (د) ٣

(١٥) إذا كان (٣ س - ٥)° أصغر قياس موجب ، (٣ ص - ٥)° أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين فى الوضع القياسى فإن : س - ص = ...°

(أ) ٣٦٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٩٠

(١٦) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند نقطة ب وكانت : $ق_م$ (أ) = ٢٥ سم

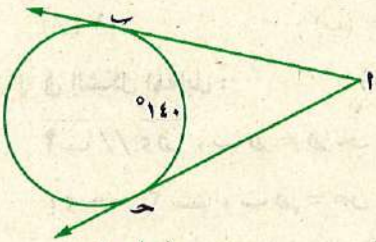
فإن : أ ب = ... سم

(أ) ٥ (ب) -٥ (جـ) ١٥ (د) ٢٥

(١٧) الدالة د : د (س) = ٢ س − ٤ تكون غير سالبة عندما س ∈ ....

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞] (جـ)]−∞ ، ٢] (د)]−∞ ، ٢]

(١٨) في الشكل المقابل :



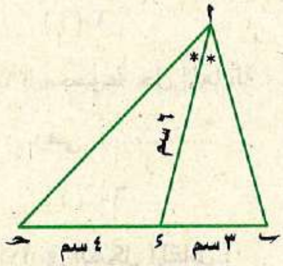
ا ب ، ا حـ مماسان للدائرة من نقطة ا

ق (ب حـ⌒) الأصغر = ١٤٠°

فإن : ق (∠ ا) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٨٠

(١٩) في الشكل المقابل :



ا ء⃖ ينصف ∠ ا ، ا ء = ٦ سم ، ب ء = ٣ سم

، ء حـ = ٤ سم فإن : ا حـ = ... سم

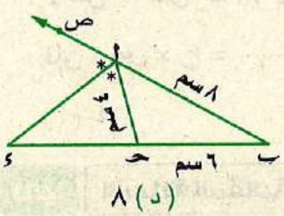
(أ) ١٢ (ب) ١٠

(جـ) ٩ (د) ٨

(٢٠) مجموعة حل المتباينة : س (س − ١) > ٠ في ح هي ....

(أ) ح −]٠ ، ١[(ب)]٠ ، ١[(جـ) [٠ ، ١] (د) ح − [٠ ، ١]

(٢١) في الشكل المقابل :



ا ء⃖ ينصف ∠ ص ا حـ ، ا ب = ٨ سم ، ا حـ = ٤ سم

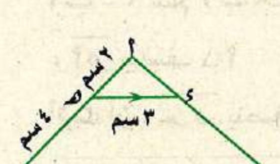
، ب حـ = ٦ سم فإن : حـ ء = ...

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٨

(٢٢) إذا كان عدد مرات تقاطع منحنى الدالة د مع محور السينات حيث د (س) = جا ا س يساوى ٩ مرات في الفترة [٠ ، ٢ π] فإن : ا = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٤

(٢٣) في الشكل المقابل :



ء هـ // ب حـ ، ء هـ = ٣ سم ، ا هـ = ٢ سم

، هـ حـ = ٤ سم ، ب حـ = س + ٢ سم

فإن : س = ...

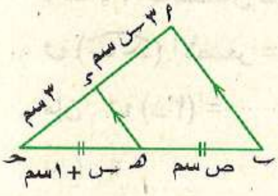
(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(٢٤) إذا كان ل ، ٢ – ل هما جذرا المعادلة : س^{٢} + ك س + ٦ = ٠

فإن : ك = ...

(أ) ١ (ب) –٢ (جـ) –٣ (د) ٥

(٢٥) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$ ، ب هـ = هـ جـ ، أء = ٣ – س سم

، ء جـ = ٣ سم ، ب هـ = ص سم ، هـ جـ = س + ١ سم

فإن : س + ص = ...

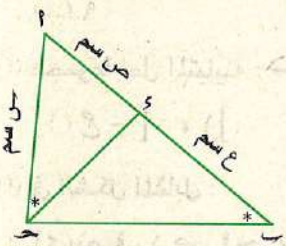
(أ) ١ (ب) ٨ (جـ) ٢ (د) ٣

(٢٦) مجموعة حل المعادلة : جا θ + جا (٢٧٠ – ٢ θ) = صفر حيث θ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

هي ....°

(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٥ (د) ٩٠

(٢٧) في الشكل المقابل :



ق (∠ أ جـ ء) = ق (∠ ب)

، س^{٢} – ص^{٢} = ١٦ سم^{٢}

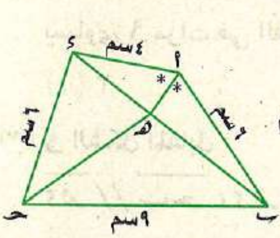
فإن : ص × ع = ... سم^{٢}

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٥ (د) ١٦

ثانيًا | الأسئلة المقالية

أجب عن السؤالين الآتيين :

١ في الشكل المقابل :



أب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم ، جـ ء = ٦ سم ، أء = ٤ سم

، $\overline{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ أ

أثبت أن : $\overline{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ ب جـ ء

٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : س^{٢} – ٧ س + ١٢ = ٠

كون معادلة الدرجة الثانية التي جذراها ل^{٢} ، م^{٢}

١٥ محافظة سوهاج

مديرية التربية والتعليم
إدارة طهطا

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان جذرا المعادلة : $س^٢ - (ك + ٨) س - ٩ = ٠$ كل منهما معكوس جمعي للآخر

فإن : ك = ...

(أ) ٨ (ب) ‎-٩ (جـ) ‎-٨ (د) ٩

(٢) إذا كان : $(٣ + ت^{١٦}) (ت + \sqrt{-٩}) =$ ....

(أ) ١٦ (ب) ١٦ ت (جـ) ‎-١٢ + ٤ ت (د) ‎-١٦ ت

(٣) إذا كان : $ل^٢$ ، ل هما جذرا المعادلة : $س^٢ + ب س + ٢٧ = ٠$ فإن : ب = ...

(أ) ‎-١٢ (ب) ١٢ (جـ) ٩ (د) ٦

(٤) أشارة الدالة د (س) = ٣ - س تكون سالبة عندما س ∈ ....

(أ)]٣ ، ∞[(ب)]-∞ ، ٣] (جـ)]-∞ ، ٣[(د) [٣ ، ∞[

(٥) إذا جذرا المعادلة : $س^٢ - ك س + ٢٥ = ٠$ هما م ، م فإن : ك = ...

(أ) ‎-١٠ (ب) ± ١٠ (جـ) ١٠ (د) ± ٥

(٦) إذا كان : $أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$ ، أ ∈ ح* ، ب ، جـ ∈ ح

وكان الجذران مترافقان فإن : ....

(أ) $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$ (ب) $ب^٢ - ٤ أ جـ \geq ٠$

(جـ) $ب^٢ - ٤ أ جـ \leq ٠$ (د) $ب^٢ - ٤ أ جـ > ٠$

(٧) مجموعة حل المتباينة : $س^٢ - ٩ < ٠$ فى ح هى ....

(أ) ح - [-٣ ، ٣] (ب)]-٣ ، ٣[(جـ)]-∞ ، -٩[(د)]-∞ ، -٣[

(٨) إذا كان : $\frac{أ^٢ + ب^٢}{أ + ب ت} = ٤ - ٣ ت$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٧ (ب) ‎-٧ (جـ) ٧ ت (د) ٢٥

(٩) أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها ٥٣٠° ....

(أ) -١٧٠ (ب) ١٠ (جـ) ١٩٠ (د) ١٧٠

(١٠) الحل العام للمعادلة : طا ٤ θ = طتا ٢ θ هو ....

(أ) ١٥ + ٦٠ ن (ب) ١٥ - ٣٠ ن (جـ) ١٥ + ٣٠ ن (د) ٩٠ + ٦٠ ن

(١١) دائرة م طول قطرها ١٢ سم ، ق (∠ أ حـ ب) المحيطية = ٦٠°

فإن طول القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = ...

(أ) ٦ π (ب) ٤ π (جـ) ٢ π (د) ٨ π

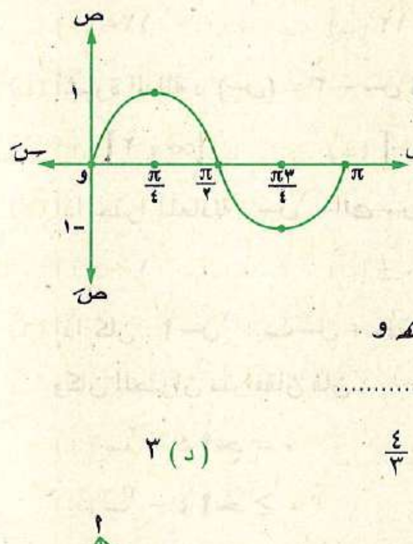
(١٢) إذا كان : جا θ = $\frac{٣}{٥}$ حيث $\frac{\pi}{٢} < \theta < \pi$ فإن : جتا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $-\frac{٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $-\frac{٤}{٥}$

(١٣) قيمة المقدار : قا (٣٠٠°) جا (٢٧٠° − θ) + طا (−٤٥°) جتا (٣٦٠° − θ) هى ....

(أ) −٣ جا θ (ب) −٣ جتا θ (جـ) ٣ جتا θ (د) صفر

(١٤) فى الشكل المقابل :



يمثل دورة واحدة لمنحنى دالة مثلثية ص = د (س)

فإن : د (س) = ...

(أ) جا ٢ س (ب) ٢ جا س

(جـ) جا $\frac{١}{٢}$ س (د) $\frac{١}{٢}$ جا س

(١٥) إذا كان : △ أ ب حـ ~ △ ء هـ و ، ٣ ب حـ = ٤ هـ و

فإن معامل التشابه △ أ ب حـ إلى △ ء هـ و = ...

(أ) ٤ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) ٣

(١٦) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ق (∠ ء) = ق (∠ حـ أ ب)

فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٤

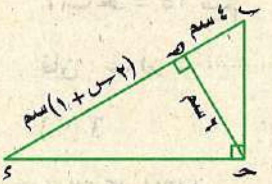
(جـ) ٨ (د) ٦

(١٧) إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ١ : ٤ ومساحة المضلع الأول ٢٥ سم^{٢}

فإن مساحة المضلع الثانى = ... سم^{٢}

(أ) ٤٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٥٠

(١٨) فى الشكل المقابل :



قيمة : س = ...

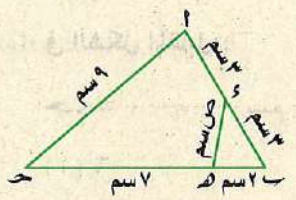
(أ) ٥ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٩

(١٩) إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوى ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة يساوى ٤٠٠ فإن طول نصف قطر هذه الدائرة = ... سم

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٥ (د) ١٥

(٢٠) فى الشكل المقابل :

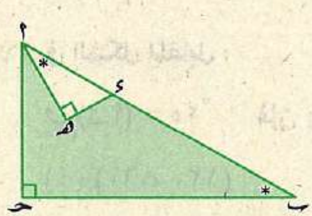


قيمة ص = ...

(أ) ٢ (ب) ٤,٥

(جـ) ٣ (د) ٥

(٢١) فى الشكل المقابل :



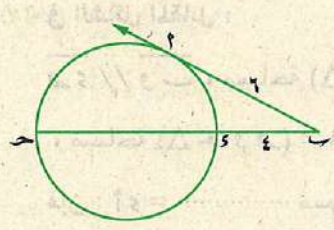
إذا كان : أ ب = ٣ أ ء

، مساحة (△ أ ء هـ) = ١٢ سم^{٢}

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم^{٢}

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) ٤٨ (د) ٩٦

(٢٢) فى الشكل المقابل :



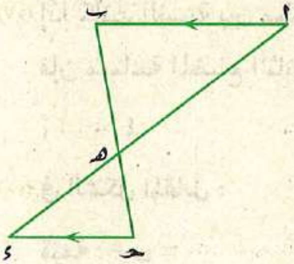
$\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ مماس للدائرة عند أ

فإن : طول $\overline{\text{حـ ء}}$ = ... سم^{٢}

(أ) ٥ (ب) ٩

(جـ) ٧ (د) ١٠

(٢٣) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{أب}} // \overline{\text{حـ ء}}$

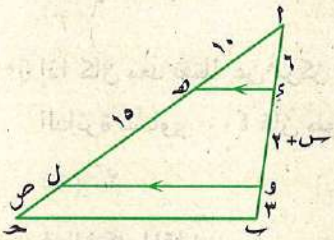
٢ أ هـ = ٣ هـ ء

، ب حـ = ١٥ سم

فإن : ب هـ = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٧,٥ (جـ) ١٠ (د) ٩

(٢٤) في الشكل المقابل :

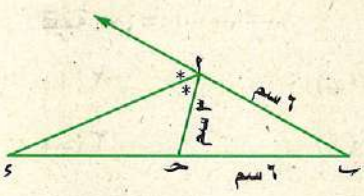


س + ص = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٢

(جـ) ١٤ (د) ٧

(٢٥) في الشكل المقابل :

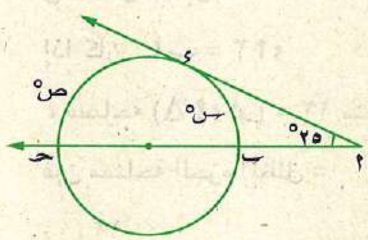


حـ ء = ... سم

(أ) ٦ (ب) $٣\sqrt{٦}$

(جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) ٣

(٢٦) في الشكل المقابل :

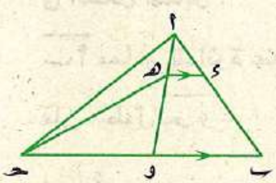


ق (∠ أ) = ٢٥° فإن : (س ، ص) = ...

(أ) (٦٠ ، ١٢٠) (ب) (١٢٠ ، ٦٠)

(جـ) (٦٥ ، ١١٥) (د) (١١٥ ، ٦٥)

(٢٧) في الشكل المقابل :



$\overline{\text{هـ ء}} // \overline{\text{و ب}}$ ، مساحة (△ أ هـ حـ) = ٤ سم^{٢}

، مساحة (△ حـ و هـ) = ٩ سم^{٢} ، ء ب = ٤,٥ سم

فإن : أ ء = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) ٦

ثانيًا الأسئلة المقالية

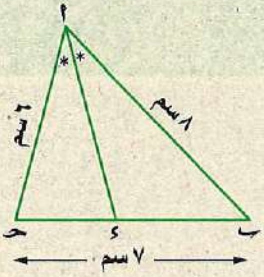
أجب عن السؤالين الآتيين :

1 إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة : $س^2 - 5 س + 3 = 0$

كون المعادلة التى جذراها : 2 ل ، 2 م

---

2 فى الشكل المقابل :



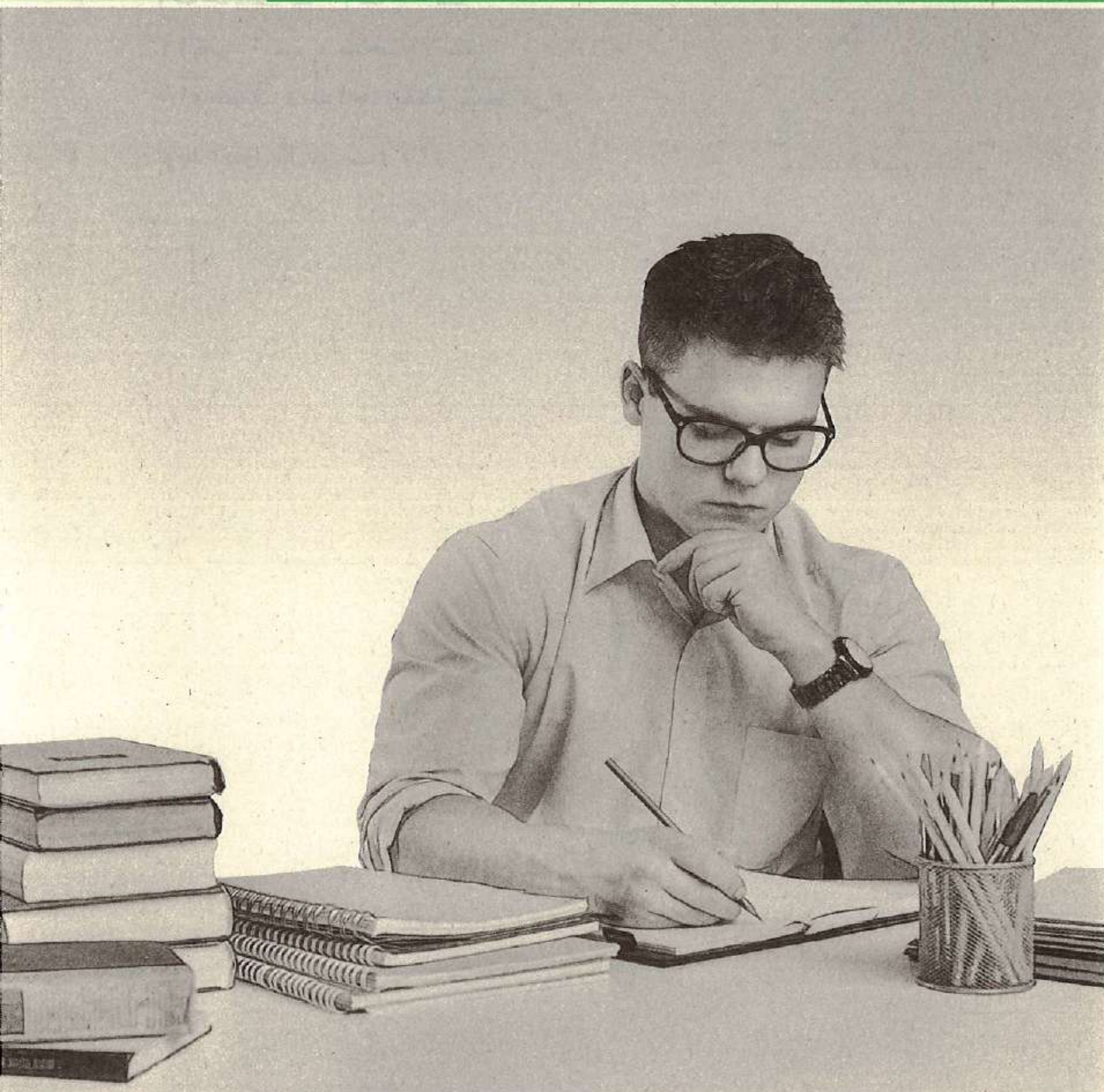
أ ب حـ مثلث فيه : أ ب = 8 سم

، أ حـ = 6 سم ، ب حـ = 7 سم

، $\overleftarrow{أء}$ ينصف ∠ ب أ حـ ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى ء

أوجد : طول كل من $\overline{ب ء}$ ، $\overline{أ ء}$

الإجابات



إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الجبر

الاختبار الأول

١ (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (جـ)
(٤) (د) (٥) (ب) (٦) (د)

٢ (أ) {١ + √٣ ت ، ١ − √٣ ت}
(ب) $\frac{١٥}{١٣}$ ، $-\frac{١٠}{١٣}$

الاختبار الثانى

١ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د)
(٤) (أ) (٥) (د) (٦) (د)

الاختبار الثالث

١ (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (د)
(٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (أ)

٢ (أ) أثبت بنفسك ،
مجموعة الحل = $\left\{\frac{٣}{٢} + \frac{\sqrt{١١}}{٢}ت ، \frac{٣}{٢} - \frac{\sqrt{١١}}{٢}ت\right\}$
(ب) ك ∈]١ ، ∞[

٢ (أ) ٤ (ب) ٢

الاختبار الرابع

١ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (ب)
(٤) (أ) (٥) (د) (٦) (جـ)

٢ (أ) ٣ $س^٢$ + ٤ س + ٨ = ٠
(ب) ٢٩ − ٢٦ ت

الاختبار الخامس

١ (١) (د) (٢) (أ) (٣) (أ)
(٤) (جـ) (٥) (أ) (٦) (د)

٢ (١) ارسم بنفسك ، ومن الرسم نجد أن :
• د موجبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، ١]
• د سالبة عندما س ∈]−٢ ، ١[
• د(س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، ١}
(٢) ارسم بنفسك ، ومن الرسم نجد أن :
• د سالبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ٣]
• د موجبة عندما س ∈]−٣ ، ٣[
• د(س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٣}

الاختبار السادس

١ (١) (جـ) (٢) (د) (٣) (جـ)
(٤) (ب) (٥) (ب) (٦) (جـ)

٢ (أ) ١ − ت ، ٢
(ب) • د موجبة عندما س ∈ ح − [−٥ ، ١ $\frac{١}{٢}$]
• د سالبة عندما س ∈]−٥ ، ١ $\frac{١}{٢}$[
• د(س) = ٠ عندما س ∈ {−٥ ، ١ $\frac{١}{٢}$}
• مجموعة الحل = [−٥ ، ١ $\frac{١}{٢}$]

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى حساب المثلثات

الاختبار الأول

١ (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (د)
(٤) (د) (٥) (د) (٦) (ب)

٢ (أ) (١) الرابع. (٢) الثالث. (٣) الأول.
(ب) (١) ٢٢٨° ، −٤٩٢° (٢) ٤٣٠° ، −٢٩٠°
(٣) ٣٥٠° ، −١٠°

الاختبار الثانى

١ (١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (ب)
(٤) (ب) (٥) (جـ) (٦) (جـ)

٢ (أ) ٢١ سم (ب) $\frac{٥\pi}{١٨}$

الاختبار الثالث

١ (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (د)
(٤) (ب) (٥) (جـ) (٦) (ب)

٢ (أ) $-\frac{١١}{٨}$
(ب) جا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، ظا θ = $-\frac{٣}{٤}$
، قا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = $-\frac{٤}{٣}$

الاختبار الرابع

١ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (د)
(٤) (جـ) (٥) (د) (٦) (د)

٢ (أ) $\frac{٢٨}{١٥}$
(ب) θ = ٤٥° + ١٢٠° ن ، أ θ = ٧٥° + ٣٦٠° ن
، ن ∈ ص
θ = ٤٥° ، أ ٧٥°

الاختبار الخامس

١ (١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (ب)
(٤) (ب) (٥) (د) (٦) (د)

٢ (أ) ١٥° + ٣٠° ن ، ن ∈ ص
(ب) (١)]−∞ ، ∞[(٢) [−١ ، ١] (٣) ٢π

الاختبار السادس

١ (١) (ب) (٢) (أ) (٣) (جـ)
(٤) (جـ) (٥) (ب) (٦) (جـ)

٢ (أ) ٢٨ َ٥٦ ١٢٩° ، ٣٢ َ٣ ٢٣٠°
(ب) ١٥٠°

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة

الاختبار الأول

١ (١)(د) (٢)(جـ) (٣)(د)
(٤)(جـ) (٥)(د) (٦)(د)

٢ (١) $\frac{٣}{٢}$ (٢) ٦ ، ٤

الاختبار الثانى

١ (١)(ب) (٢)(أ) (٣)(جـ)
(٤)(ب) (٥)(ب) (٦)(جـ)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار الثالث

١ (١)(جـ) (٢)(د) (٣)(ب)
(٤)(د) (٥)(جـ) (٦)(أ)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار الرابع

١ (١)(د) (٢)(جـ) (٣)(ب)
(٤)(د) (٥)(د) (٦)(د)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار الخامس

١ (١)(جـ) (٢)(ب) (٣)(ب)
(٤)(جـ) (٥)(جـ) (٦)(ب)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار السادس

١ (١)(د) (٢)(جـ) (٣)(ب)
(٤)(جـ) (٥)(د) (٦)(جـ)

٢ ٦ سم ، ٢١ سم

الاختبار السابع

١ (١)(جـ) (٢)(جـ) (٣)(جـ)
(٤)(د) (٥)(ب) (٦)(ب)

٢ أثبت بنفسك ، ٣,٦ سم

الاختبار الثامن

١ (١)(د) (٢)(جـ) (٣)(أ)
(٤)(جـ) (٥)(ب) (٦)(د)

٢ أثبت بنفسك.

الاختبار التاسع

١ (١)(ب) (٢)(أ) (٣)(أ)
(٤)(د) (٥)(ب) (٦)(جـ)

٢ (١) $٨\sqrt{٢}$ سم (٢) $\sqrt{١٧}$ سم

إجابات اختبارات شهر أكتوبر

اختبار ١

١ (١)(ب) (٢)(جـ) (٣)(د) (٤)(ب)
(٥)(أ) (٦)(أ) (٧)(أ) (٨)(د)
(٩)(أ) (١٠)(جـ) (١١)(د) (١٢)(ب)

٢

(١) $\because \frac{(ت+٢)(ت-٢)}{٤+٣ت} = \frac{٤-ت^٢}{٤+٣ت}$

$= \frac{٥}{٤+٣ت} \times \frac{٤-٣ت}{٤-٣ت}$

$= \frac{٥(٤-٣ت)}{١٦-٩ت^٢}$

$= \frac{٥(٤-٣ت)}{٢٥}$

$= \frac{٤}{٥} - \frac{٣}{٥}ت$

$\therefore$ س + ت ص $= \frac{٤}{٥} - \frac{٣}{٥}ت$

$\therefore$ س $= \frac{٤}{٥}$ ، ص $= \frac{-٣}{٥}$

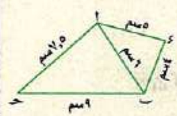
(٢) $\because ٣٠^\circ + (٤ن - ١) \times ٩٠^\circ = ٣٠^\circ + ٣٦٠^\circ ن - ٩٠^\circ$

$= -٦٠^\circ + ٣٦٠^\circ$ ن (بوضع ن = ١)

$\therefore$ أصغر قياس موجب $= -٦٠^\circ + ٣٦٠^\circ \times ١$

$= ٣٠٠^\circ$

$\therefore$ الزاوية تقع فى الربع الرابع.

(٣) 

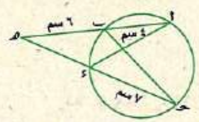
$\because \frac{أب}{بء} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{بحـ}{أب} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{أحـ}{أء} = \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore \frac{أب}{بء} = \frac{بحـ}{أب} = \frac{أحـ}{أء}$

$\therefore \Delta$ أبحـ $\sim \Delta$ ءبأ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق(∠ءأب) = ق(∠أحـب)

$\therefore \overleftrightarrow{بأ}$ ينصف ∠ءبحـ (المطلوب ثانيًا)

(٤) 

$\because$ ∠أ ، ∠حـ زاويتان محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{بء}$

$\therefore$ ق(∠أ) = ق(∠حـ)

، $\because$ ∠هـ مشتركة

$\therefore \Delta$ هـأء $\sim \Delta$ هـحـب (المطلوب أولاً)

$\therefore \frac{ءهـ}{بهـ} = \frac{أهـ}{حـهـ}$ $\therefore \frac{ءهـ}{٦} = \frac{١٠}{٧+ءهـ}$

$\therefore ٧(ءهـ) + (ءهـ)^٢ = ٦٠$

$\therefore (ءهـ)^٢ + ٧(ءهـ) - ٦٠ = ٠$

$\therefore (ءهـ + ١٢)(ءهـ - ٥) = ٠$

$\therefore$ ءهـ = ٥ سم

$\therefore$ حـهـ = ١٢ سم (المطلوب ثانيًا)

اختبار ٢

١ (١)(د) (٢)(ب) (٣)(د) (٤)(جـ)
(٥)(جـ) (٦)(جـ) (٧)(د) (٨)(ب)
(٩)(جـ) (١٠)(ب) (١١)(د) (١٢)(أ)

٢

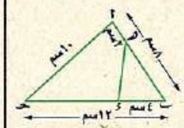
(١) $\because$ س $= \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤\times١\times٥}}{١\times٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$

$= \frac{٤ \pm ٢ت}{٢} = ٢ \pm ت$

(٢) أصغر زاوية بقياس موجب $= -١٣٥^\circ + ٣٦٠^\circ = ٢٢٥^\circ$

، زاوية بقياس سالب $= -١٣٥^\circ - ٣٦٠^\circ = -٤٩٥^\circ$

(٣) ∵ ΔΔ ب ء هـ ، ب أ حـ فيهما :



$\frac{\text{بء}}{\text{بأ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{\text{بهـ}}{\text{بحـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{بأ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{بحـ}}$

، ∵ ∠ب مشتركة

∴ Δ ب ء هـ ~ Δ ب أ حـ ، $\frac{\text{ءهـ}}{\text{أحـ}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ءهـ}}{١٠} = \frac{١}{٢}$

∴ ء هـ = ٥ سم (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن : ق(∠ب ء هـ) = ق(∠ب أ حـ)

∴ الشكل أ حـ ء هـ رباعى دائرى (المطلوب ثانيًا)

(٤) ∵ $\frac{\text{مساحة المثلث الأول}}{\text{مساحة المثلث الثانى}} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٩}{٤}$

وبفرض أن مساحة المثلث الأول = ٩ س

، مساحة المثلث الثانى = ٤ س

∴ ٩ س + ٤ س = ١٣٠

∴ ١٣ س = ١٣٠

∴ س = ١٠

∴ مساحة المثلث الأول = ٩٠ سم^٢

، مساحة المثلث الثانى = ٤٠ سم^٢

(وهو المطلوب)

إجابات اختبارات شهر نوفمبر

اختبار ١

١

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (ب)	(٤) (ب)
(٥) (ب)	(٦) (جـ)	(٧) (ب)	(٨) (د)
(٩) (جـ)	(١٠) (د)	(١١) (أ)	(١٢) (أ)

٢

(١) ببحث إشارة المميز :

ب^٢ − ٤ أ حـ = (−١١)^٢ − ٤ (٧) (٥)

= ١٢١ − ١٤٠ = −١٩

∴ جذرى المعادلة مركبان غير حقيقيين

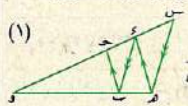
∴ س = $\frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{٢ (٧)} = \frac{١١ \pm \sqrt{١٩}\ \text{ت}}{١٤}$

(٢) ∵ جا س = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا س = $\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$

∴ س = ٩٠°

(٣) ∵ $\overline{\text{بحـ}} // \overline{\text{هـء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وء}}$ قاطعان لهما



∴ $\frac{\text{وب}}{\text{وهـ}} = \frac{\text{وحـ}}{\text{وء}}$ (١)

، ∵ $\overline{\text{بء}} // \overline{\text{هـس}}$

، $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وس}}$ قاطعان لهما

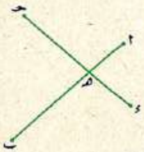
∴ $\frac{\text{وب}}{\text{وهـ}} = \frac{\text{وء}}{\text{وس}}$ (٢)

وبضرب (١) فى (٢) :

∴ $\left(\frac{\text{وب}}{\text{وهـ}}\right)^٢ = \frac{\text{وحـ}}{\text{وء}} \times \frac{\text{وء}}{\text{وس}} = \frac{\text{وحـ}}{\text{وس}}$

(وهو المطلوب)

(٤) ∵ أ هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ ، ب هـ = ٦ سم



∴ أ هـ = ٢,٥ سم

، ∵ ء هـ = $\frac{٣}{٥}$ حـ هـ

، حـ هـ = ٥ سم

∴ ء هـ = ٣ سم

∵ أ هـ × ب هـ = ٢,٥ × ٦ = ١٥

، ء هـ × هـ حـ = ٣ × ٥ = ١٥

∴ أ هـ × ب هـ = ء هـ × هـ حـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

(وهو المطلوب)

اختبار ٢

١

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (أ)	(٤) (ب)
(٥) (د)	(٦) (جـ)	(٧) (أ)	(٨) (أ)
(٩) (د)	(١٠) (جـ)	(١١) (ب)	(١٢) (جـ)

٢

(١) ∵ ل + م = $\frac{٣}{٢}$ ، ل م = $\frac{-١}{٢}$

وبفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ ، و = $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$

∴ هـ + و = $\frac{\text{ل}}{\text{م}} + \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}^٢ + \text{م}^٢}{\text{ل م}}$

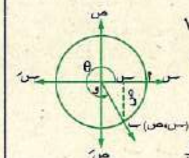
= $\frac{(\text{ل} + \text{م})^٢ - ٢\ \text{ل م}}{\text{ل م}} = \frac{\left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ - ٢ \times \frac{-١}{٢}}{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١٣}{٢}$

، هـ و = $\frac{\text{ل}}{\text{م}} \times \frac{\text{م}}{\text{ل}} = ١$

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^٢ + $\frac{١٣}{٢}$ س + ١ = ٠

أى ٢ س^٢ + ١٣ س + ٢ = ٠

(٢) ∵ ص = جا θ = $\frac{-٢٤}{٢٥}$ ، س = جتا θ ، س > ٠



، ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ س^{٢} + $\frac{٥٧٦}{٦٢٥}$ = ١

∴ س^{٢} = $\frac{٤٩}{٦٢٥}$

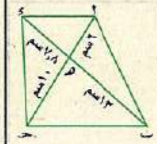
∴ س = جتا θ = $\frac{٧}{٢٥}$

∴ ب $\left(\frac{٧}{٢٥} ، \frac{-٢٤}{٢٥}\right)$

∴ جتا θ − قتا θ ظا θ = $\frac{٧}{٢٥}$ − $\left(-\frac{٢٥}{٢٤}\right)$ × $\frac{-٢٤}{٧}$

= $\frac{-٥٧٦}{١٧٥}$

(٣) ∵ $\frac{أهـ}{هـ جـ}$ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$



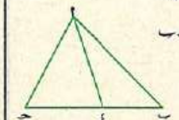
، $\frac{د هـ}{هـ ب}$ = $\frac{٧,٨}{١٣}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{أهـ}{هـ جـ}$ = $\frac{د هـ}{هـ ب}$

∴ $\overline{أد}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف (وهو المطلوب)

(٤) فى ΔΔ أ جـ د ، ب جـ أ :



∵ (أ جـ)^{٢} = جـ د × جـ ب

∴ $\frac{أ جـ}{ب جـ}$ = $\frac{جـ د}{جـ أ}$

، ∠ جـ مشتركة

∴ Δ أ جـ د ~ Δ ب جـ أ

إجابات نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الجبر وحساب المثلثات

النموذج الأول

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (جـ)

٢ (١)]−٢ ، ١[(٢) الثالث

(٣) ٣٠٠° (٤) س^{٢} − ٨ س + ١٠ = ٠

٣ (أ) − ت (ب) ٢٥° ٣٥َ ٤٨ً

٤ (أ) (١) ارسم بنفسك.

(٢) ● د سالبة عندما س ∈ ع − [٣ ، ٥]

● د موجبة عندما س ∈]٣ ، ٥[

● د (س) = ٠ عندما س ∈ {٣ ، ٥}

(ب) ٦ + ٣ ت

٥ (أ) [−٤ ، ١] (ب) $\frac{-١}{٥}$

النموذج الثانى

١ (١) − ت (٢) ٩

(٣) ١٨° (٤) $\left[-\frac{٣}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right]$

٢ (١) (د) (٢) (أ) (٣) (جـ) (٤) (د)

٣ (أ) ٢

(ب) ٢٥° ٣٥َ ٤٨ً ، أ ٣٥° ٢٤َ ١٣١ً

٤ (أ) (١) أ = −٩ ، ب = ٢

(٢) [−٢ ، ١]

(ب) ٤٨° ٤٥َ ٨٢ً

٥ (أ) ٢٠ عددًا (ب) $\frac{١٠}{٣}$

إجابات نماذج امتحانات الكتاب المدرسى فى الهندسة

النموذج الأول

1 (1) متشابهين

(2) أولاً : أ حـ ، حـ ء   ثانيًا : $(ب ء)^2$

ثالثًا : ب ء × أ حـ

2 (1) (جـ) (2) (أ) (3) (د) (4) (د)

3 (أ) ٢ سم ، $\frac{١٠}{٣}$ سم

(ب) أثبت بنفسك ، ١ : ٤

4 (أ) ٦ سم ، ١٢ سم

(ب) ٥,٥ سم

5 (أ) أثبت بنفسك.

(ب) (1) ٦ سم   (2) أثبت بنفسك.

النموذج الثانى

1 (1) متشابهين.   (2) أ حـ ب

(3) ىد س × ىد ص   (4) ٦ سم

2 (1) (جـ) (2) (ب) (3) (ب) (4) (د)

3 (أ) أثبت بنفسك ، ٣,٥ سم

(ب) أثبت بنفسك .

4 (أ) ٢,٧ سم ، ٤,٨ سم ، ٣,٦ سم

(ب) أثبت بنفسك ، ٩ : ٤

5 (أ) ٣ سم

(ب) ٦ سم ، ٧,٢ سم

إجابات امتحانات مدارس المحافظات

1 محافظة القاهرة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

1 (د)	2 (د)	3 (د)	4 (أ)
5 (د)	6 (جـ)	7 (جـ)	8 (أ)
9 (جـ)	10 (ب)	11 (د)	12 (د)
13 (جـ)	14 (جـ)	15 (جـ)	16 (أ)
17 (جـ)	18 (ب)	19 (أ)	20 (ب)
21 (ب)	22 (جـ)	23 (ب)	24 (ب)
25 (ب)	26 (جـ)	27 (جـ)	

ثانيًا الأسئلة المقالية

1

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ ل + م = ٨ ، ل م = ٥

∵ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ مجموع الجذرين = $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م} = \frac{٨}{٥}$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م} = \frac{١}{٥}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : $س^2 - \frac{٨}{٥} س + \frac{١}{٥} = ٠$

أى $٥ س^2 - ٨ س + ١ = ٠$

2

فى المثلث أ ب ء

∵ $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف (∠ أ) ويقطع $\overline{ب ء}$ فى هـ

∴ $\frac{ب هـ}{هـ ء} = \frac{أ ب}{أ ء} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$ (1)

فى Δ ء ب حـ : ∵ $\overline{هـ و}$ // $\overline{ب حـ}$

∴ $\frac{ء هـ}{هـ ب} = \frac{ء و}{و حـ}$ ∴ $\frac{٣}{٢} = \frac{٦}{و حـ}$

∴ و حـ = $\frac{٢ \times ٦}{٣}$ = ٤ سم

∴ طول $\overline{ء حـ}$ = ٦ + ٤ = ١٠ سم

2 محافظة الجيزة

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

1 (ب)	2 (جـ)	3 (جـ)	4 (د)
5 (جـ)	6 (أ)	7 (أ)	8 (د)
9 (جـ)	10 (جـ)	11 (أ)	12 (جـ)
13 (د)	14 (ب)	15 (جـ)	16 (أ)
17 (جـ)	18 (د)	19 (جـ)	20 (د)
21 (د)	22 (أ)	23 (د)	24 (ب)
25 (أ)	26 (جـ)	27 (جـ)	

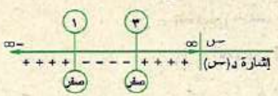
ثانيًا الأسئلة المقالية

1

بوضع $س^2 - ٤ س + ٣ = ٠$

∴ (س − ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ١



مجموعة حل المتباينة =]١ ، ٣[

2

فى Δ أ ب حـ :

∵ $\overrightarrow{أ ء}$ ينصف (∠ ب أ حـ)

∴ $\frac{حـ ء}{ب ء} = \frac{حـ أ}{ب أ}$ ∴ $\frac{حـ ء}{١٨} = \frac{١٥}{٢٧}$

∴ حـ ء = $\frac{١٨ \times ١٥}{٢٧}$ = ١٠

طول $\overline{أ ء} = \sqrt{أ حـ \times أ ب - حـ ء \times ء ب}$

$= \sqrt{١٥ \times ٢٧ - ١٠ \times ١٨}$ = ١٥ سم

٣ محافظة الإسكندرية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)	٢ (جـ)	٣ (أ)	٤ (د)
٥ (ب)	٦ (د)	٧ (ب)	٨ (جـ)
٩ (جـ)	١٠ (د)	١١ (أ)	١٢ (د)
١٣ (جـ)	١٤ (أ)	١٥ (ب)	١٦ (جـ)
١٧ (ب)	١٨ (د)	١٩ (ب)	٢٠ (أ)
٢١ (ب)	٢٢ (أ)	٢٣ (ب)	٢٤ (ب)
٢٥ (ب)	٢٦ (جـ)	٢٧ (جـ)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

س (٢ − س) > ٨

−س^2 + ٢س − ٨ > ٠

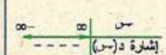
ويفرض أن: د(س) = −س^2 + ٢س − ٨

وبوضع د(س) = ٠

∴ −س^2 + ٢س − ٨ = ٠

ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ < ٠



∴ مجموعة حل المتباينة −س^2 + ٢س − ٨ > ٠

تساوي ∅

٢

∵ حـ ء ينصف ∠ حـ ، ب و ينصف ∠ ب

∴ أ هـ ينصف ∠ أ

، ∵ حـ هـ : حـ ب = ١ : ٢ ∴ هـ منتصف ب حـ

∴ Δ أ ب حـ متساوي الساقين فيه أ ب = أ حـ

، ∵ حـ ء ينصف ∠ حـ

∴ $\frac{حـ أ}{حـ ب} = \frac{أ ء}{ء ب} = \frac{٥}{٤}$ (١)

، ∵ ب و ينصف ∠ ب

∴ $\frac{ب أ}{ب حـ} = \frac{أ و}{و حـ}$ ∴ $\frac{حـ أ}{حـ ب} = \frac{أ و}{و حـ}$ (٢)

من (١) ، (٢) يستنتج أن: $\frac{أ و}{و حـ} = \frac{٥}{٤}$

∴ $\frac{أ ء}{أ ب} = \frac{٥}{٩}$ (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ و}{و حـ} = \frac{٥}{٤}$

∴ ء و // ب حـ (المطلوب ثانياً)

٤ محافظة القليوبية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)	٢ (ب)	٣ (جـ)	٤ (ب)
٥ (د)	٦ (جـ)	٧ (د)	٨ (جـ)
٩ (ب)	١٠ (د)	١١ (جـ)	١٢ (ب)
١٣ (أ)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)	١٦ (جـ)
١٧ (جـ)	١٨ (د)	١٩ (ب)	٢٠ (أ)
٢١ (ب)	٢٢ (د)	٢٣ (ب)	٢٤ (جـ)
٢٥ (ب)	٢٦ (د)	٢٧ (ب)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ ل ، م هما جذرى المعادلة: س^2 − ٢س + ٣ = ٠

∴ ل + م = ٢ ، ل م = ٣

∵ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرى المعادلة المطلوبة.

∴ $\frac{١}{ل} + \frac{١}{م} = \frac{ل + م}{ل م} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{ل} \times \frac{١}{م} = \frac{١}{ل م} = \frac{١}{٣}$

∴ المعادلة المطلوبة هى: س^2 − $\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{١}{٣}$ = ٠

∴ ٣س^2 − ٢س + ١ = ٠

٢

∵ فى Δ أ ء ب:

∵ ء س ينصف ∠ أ ء ب

∴ $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ س}{س ب}$ (١)

، فى Δ أ ب حـ : ∵ س ص // ب حـ

∴ $\frac{أ س}{س ب} = \frac{أ ص}{ص حـ}$ (٢)

من (١) ، (٢): $\frac{أ ء}{ء ب} = \frac{أ ص}{ص حـ}$

، ∵ ء ب = ء حـ ∴ $\frac{أ ء}{ء حـ} = \frac{أ ص}{ص حـ}$

∴ ء ص ينصف ∠ أ ء حـ (المطلوب أولاً)

∴ ء س ينصف (∠ أ ء ب) ، ء ص ينصف (∠ أ ء حـ)

، ء ∈ ب حـ ∴ ق(∠ س ء ص) = ٩٠°

فى Δ س ء ص: س ص = $\sqrt{٤^2 + ٣^2}$

∴ س ص = ٥ سم (المطلوب ثانياً)

٥ محافظة الشرقية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (جـ)	٣ (جـ)	٤ (جـ)
٥ (أ)	٦ (أ)	٧ (أ)	٨ (أ)
٩ (ب)	١٠ (ب)	١١ (ب)	١٢ (د)
١٣ (د)	١٤ (د)	١٥ (د)	١٦ (د)
١٧ (ب)	١٨ (ب)	١٩ (ب)	٢٠ (ب)
٢١ (د)	٢٢ (د)	٢٣ (جـ)	٢٤ (جـ)
٢٥ (أ)	٢٦ (أ)	٢٧ (أ)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

نفرض أن: ق(ب حـ) = س°

، ق(أ ء) = ص° ∴ ق(أ ب) = س°

∵ حـ ء قطر فى الدائرة

∴ ٢س + ص = ١٨٠° (١)

∵ ق(∠ هـ) = ٣٠° ∴ س − ص = ٦٠° (٢)

بجمع (١) ، (٢): ٣س = ٢٤٠°

∴ س = ٨٠°

بالتعويض فى (١):

∴ ص = ٢٠° ∴ ق(أ ء) = ٢٠°

∴ ق(∠ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(أ ء حـ) = $\frac{١}{٢}$ (١٨٠° + ٢٠°)

= ١٠٠°

٢

∵ ل ، م هما جذرى المعادلة

س^2 − ٧س + ٦ = ٠

∴ ل + م = ٧ ، ل م = ٦

∴ المعادلة المطلوبة جذراها ل م ، ل + م

أى ٦ ، ٧

مجموع الجذرين = ١٣

حاصل ضرب الجذرين = ٤٢

∴ المعادلة هى: س^2 − ١٣س + ٤٢ = ٠

٦ محافظة الغربية

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ب)	٢ (جـ)	٣ (أ)	٤ (د)
٥ (جـ)	٦ (ب)	٧ (أ)	٨ (ب)
٩ (د)	١٠ (أ)	١١ (ب)	١٢ (د)
١٣ (ب)	١٤ (جـ)	١٥ (أ)	١٦ (جـ)
١٧ (د)	١٨ (جـ)	١٩ (أ)	٢٠ (د)
٢١ (جـ)	٢٢ (ب)	٢٣ (د)	٢٤ (جـ)
٢٥ (أ)	٢٦ (ب)	٢٧ (د)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

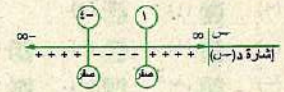
بفرض أن: د(س) = س^2 + ٣س − ٤ (١)

وبوضع د(س) = ٠ (٢)

∴ س^2 + ٣س − ٤ = ٠

(س + ٤)(س − ١) = ٠

$س = -٤$ ، $س = ١$



مجموعة حل المتباينة: $س^٢ + ٣س - ٤ \leq ٠$

$= ح -]-٤ ، ١[$

٢

∵ $\overline{أد} // \overline{بهـ} // \overline{حو}$

∴ $\frac{أب}{بحـ} = \frac{أم}{مو} = \frac{دهـ}{هـو}$

∴ $\frac{٢}{٥} = \frac{ص}{٣س - ٥} = \frac{س + ١}{٢س}$

∴ $٣(٢س) = ٥(س + ١)$

$٦س = ٥س + ٥$

∴ $س = ٥$

، $٣(٣س - ٥) = ٥ص$

∴ $٣(٣ \times ٥ - ٥) = ٥ص$

∴ $٣٠ = ٥ص$

∴ $ص = ٦$

∴ $س + ص = ٥ + ٦ = ١١$

٧ محافظة الدقهلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (د)	٢ (جـ)	٣ (جـ)	٤ (ب)
٥ (أ)	٦ (جـ)	٧ (د)	٨ (أ)
٩ (ب)	١٠ (د)	١١ (ب)	١٢ (جـ)
١٣ (أ)	١٤ (جـ)	١٥ (د)	١٦ (ب)
١٧ (ب)	١٨ (ب)	١٩ (أ)	٢٠ (ب)
٢١ (أ)	٢٢ (ب)	٢٣ (ب)	٢٤ (أ)
٢٥ (ب)	٢٦ (د)	٢٧ (ب)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

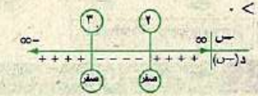
بفرض أن $د(س) = س^٢ - ٥س + ٦$

وبوضع $د(س) = ٠$

∴ $س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

∴ $س = ٢$ ، $س = ٣$

، ∵ $أ > ٠$



∵ $د(س) \leq ٠$ عند $س \in ح -]٢ ، ٣[$

∴ مجموعة حل المتباينة هي $ح -]٢ ، ٣[$

٢

في Δ أحـص: ∵ $\overleftrightarrow{بس} // \overleftrightarrow{حـص}$

∴ $\frac{أب}{أحـ} = \frac{أس}{أص}$ (١)

في Δ أحـع: ∵ $\overline{بص} // \overline{حـع}$

∴ $\frac{أب}{أحـ} = \frac{أص}{أع}$ (٢)

من (١) ، (٢): $\frac{أس}{أص} = \frac{أص}{أع}$

∴ $(أص)^٢ = أس \times أع$

٨ محافظة دمياط

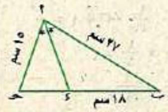
أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (د)	٣ (أ)	٤ (أ)
٥ (جـ)	٦ (جـ)	٧ (د)	٨ (ب)
٩ (جـ)	١٠ (أ)	١١ (جـ)	١٢ (جـ)
١٣ (د)	١٤ (ب)	١٥ (جـ)	١٦ (أ)
١٧ (جـ)	١٨ (د)	١٩ (ب)	٢٠ (د)
٢١ (د)	٢٢ (جـ)	٢٣ (ب)	٢٤ (أ)
٢٥ (ب)	٢٦ (ب)	٢٧ (أ)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

في Δ أبحـ:



∵ $\overrightarrow{أد}$ ينصف ∠ب أحـ

∴ $\frac{أحـ}{أب} = \frac{دحـ}{دب}$

∴ $\frac{١٥}{٢٧} = \frac{دحـ}{١٨}$

∴ $دحـ = ١٠$ سم

∴ $أد = \sqrt{أب \times أحـ - ب د \times د حـ}$

$= \sqrt{٢٧ \times ١٥ - ١٨ \times ١٠} = ١٥$ سم

٢

∵ ل ، م جذرا المعادلة

∴ $ل + م = \frac{-(-٥)}{١} = ٥$ ، $ل م = \frac{٧}{١} = ٧$

مجموع جذري المعادلة المطلوبة $= ل^٢ + م^٢$

$= (ل + م)^٢ - ٢ ل م$

$= ٥^٢ - ٢ \times ٧ = ١١$

حاصل ضرب جذري المعادلة المطلوبة

$= ل^٢ \times م^٢ = (ل م)^٢ = ٧^٢ = ٤٩$

∴ المعادلة هي $س^٢ - ١١س + ٤٩ = ٠$

٩ محافظة كفر الشيخ

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (جـ)	٢ (د)	٣ (د)	٤ (د)
٥ (ب)	٦ (د)	٧ (جـ)	٨ (ب)
٩ (ب)	١٠ (ب)	١١ (أ)	١٢ (ب)
١٣ (جـ)	١٤ (ب)	١٥ (د)	١٦ (د)
١٧ (جـ)	١٨ (ب)	١٩ (ب)	٢٠ (جـ)
٢١ (ب)	٢٢ (جـ)	٢٣ (جـ)	٢٤ (جـ)
٢٥ (ب)	٢٦ (د)	٢٧ (ب)	

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ من المعادلة $ل + م = ٥$ ، $ل م = ٧$

∴ $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م = (٥)^٢ - ٢ \times ٧$

$= ١١$

٢

∵ $\overline{أد}$ متوسط في المثلث أبحـ

∴ د منتصف $\overline{بحـ}$

∵ $\overline{دو} // \overline{أحـ}$

∴ و منتصف $\overline{أب}$

منها $د و = \frac{١}{٢} أحـ = ١٢$ سم

في Δ أدو:

∵ $\overline{هـم} // \overline{دو}$

، $\frac{أم}{أد} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{هـم}{دو} = \frac{أم}{أد} = \frac{٢}{٣}$

∴ $هـم = \frac{٢}{٣} \times ١٢ = ٨$ سم

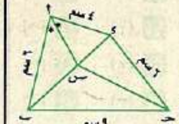
١٠ محافظة البحيرة

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

١ (أ)	٢ (جـ)	٣ (جـ)	٤ (ب)
٥ (د)	٦ (أ)	٧ (د)	٨ (د)
٩ (جـ)	١٠ (د)	١١ (ب)	١٢ (أ)
١٣ (جـ)	١٤ (د)	١٥ (أ)	١٦ (د)
١٧ (أ)	١٨ (جـ)	١٩ (د)	٢٠ (جـ)
٢١ (د)	٢٢ (جـ)	٢٣ (أ)	٢٤ (ب)
٢٥ (ب)	٢٦ (جـ)	٢٧ (ب)	

ثانيا **الأسئلة المقالية**

1



في Δ أ ء ب

$\because$ $\overrightarrow{\text{أس}}$ ينصف $\angle$ ء أ ب

$\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

في Δ حء ب : $\because \frac{\text{حء}}{\text{حب}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\text{حء}}{\text{حب}} = \frac{\text{ءس}}{\text{سب}}$

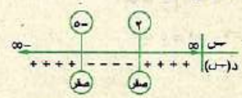
$\therefore$ $\overrightarrow{\text{حس}}$ ينصف $\angle$ ء ح ب

2

نفرض أن د (س) = $\text{س}^2 + 3\text{س} - 10$

بوضع د (س) = 0

$\therefore$ س = −5 أو س = 2



$\therefore$ د موجبة عند س $\in$ ح − [−5 ، 2]

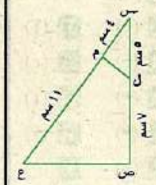
11 محافظة الفيوم

أولا **أسئلة الاختيار من متعدد**

1 (ب)	2 (د)	3 (ب)	4 (د)
5 (ج)	6 (ج)	7 (ج)	8 (أ)
9 (ب)	10 (أ)	11 (أ)	12 (أ)
13 (ب)	14 (ب)	15 (أ)	16 (ج)
17 (ج)	18 (ب)	19 (ب)	20 (ج)
21 (ب)	22 (ب)	23 (ج)	24 (ج)
25 (ج)	26 (أ)	27 (ج)	

ثانيا **الأسئلة المقالية**

1



في $\Delta\Delta$ س ل م ، س ع ص

$\because$ $\angle$ س زاوية مشتركة

$\therefore \frac{\text{سل}}{\text{سع}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{\text{سم}}{\text{سص}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ Δ س ل م ~ Δ س ع ص

$\therefore$ مساحة (Δ س ل م) : مساحة (Δ س ع ص) $= \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 : 9$

$\therefore$ مساحة (Δ س ل م) : مساحة (▱ ل ص ع م) = 1 : 8

2

من المعادلة ل + م = $\frac{7}{2}$ ، ل م = $\frac{6}{2} = 3$

$\therefore$ (ل − 4) + (4 − م) = ل − م

$= \sqrt{(\text{ل} + \text{م})^2 - 4\ \text{ل م}}$

$= \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \times 3} = \frac{1}{2}$

(ل − 4) (4 − م) = 4 ل − ل م − 16 + 4 م

= 4 (ل + م) − ل م − 16

$= 4 \times \frac{7}{2} - 3 - 16 = -5$

$\therefore$ المعادلة هي : $\text{س}^2 - \frac{1}{2}\text{س} - 5 = 0$

أي $2\text{س}^2 - \text{س} - 10 = 0$

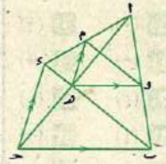
12 محافظة بني سويف

أولا **أسئلة الاختيار من متعدد**

1 (ج)	2 (ج)	3 (ب)	4 (أ)
5 (ب)	6 (ج)	7 (أ)	8 (د)
9 (أ)	10 (أ)	11 (د)	12 (ب)
13 (ج)	14 (ج)	15 (أ)	16 (ب)
17 (ج)	18 (د)	19 (أ)	20 (ج)
21 (د)	22 (أ)	23 (ب)	24 (أ)
25 (د)	26 (د)	27 (أ)	

ثانيا **الأسئلة المقالية**

1



$\because$ ﻫو // حب

$\therefore \frac{\text{أو}}{\text{أب}} = \frac{\text{أﻫ}}{\text{أح}}$

$\because$ ﻫم // حء

$\therefore \frac{\text{أم}}{\text{أء}} = \frac{\text{أﻫ}}{\text{أح}}$

$\therefore \frac{\text{أو}}{\text{أب}} = \frac{\text{أم}}{\text{أء}}$

$\therefore$ في Δ أ ب ء : وم // ب ء (وهو المطلوب)

2

مجموع الجذرين = 5 + ت + 5 − ت = 10

حاصل ضرب الجذرين = (5 + ت) (5 − ت) = 26

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي : $\text{س}^2 - 10\text{س} + 26 = 0$

13 محافظة المنيا

أولا **أسئلة الاختيار من متعدد**

1 (أ)	2 (ب)	3 (ج)	4 (د)
5 (د)	6 (ج)	7 (ب)	8 (أ)
9 (أ)	10 (ب)	11 (ج)	12 (د)
13 (أ)	14 (أ)	15 (أ)	16 (أ)
17 (ب)	18 (ب)	19 (ب)	20 (ج)
21 (ج)	22 (ج)	23 (ج)	24 (ج)
25 (د)	26 (د)	27 (د)	

ثانيا **الأسئلة المقالية**

1

مجموع الجذرين = $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$

المعادلة المطلوبة هي : $\text{س}^2 - \frac{13}{6}\text{س} + 1 = 0$

بضرب المعادلة × 6

$6\text{س}^2 - 13\text{س} + 6 = 0$

2

$\because$ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{حء}}$ وتران في الدائرة ، $\overline{\text{أب}} \cap \overline{\text{حء}} = \{\text{ﻫ}\}$

$\therefore$ ق($\angle$ أ ﻫ ح) $= \frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{\text{أح}}$) + ق($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$)]

$= \frac{1}{2} [75^\circ + 95^\circ]$

$\therefore$ ق($\angle$ أ ﻫ ح) $= 85^\circ$

14 محافظة أسيوط

أولا **أسئلة الاختيار من متعدد**

1 (أ)	2 (ج)	3 (ج)	4 (ب)
5 (ج)	6 (أ)	7 (ب)	8 (أ)
9 (أ)	10 (د)	11 (ج)	12 (ب)
13 (ج)	14 (ج)	15 (ج)	16 (أ)
17 (أ)	18 (ب)	19 (د)	20 (د)
21 (ب)	22 (د)	23 (ج)	24 (ب)
25 (د)	26 (ب)	27 (د)	

ثانيا **الأسئلة المقالية**

1

في Δ أ ب ء : $\because$ $\overrightarrow{\text{أﻫ}}$ ينصف ($\angle$ ب أ ء)

$\therefore \frac{\text{بﻫ}}{\text{ﻫء}} = \frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

، $\because \frac{\text{بح}}{\text{حء}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ $\therefore \frac{\text{بﻫ}}{\text{ﻫء}} = \frac{\text{بح}}{\text{حء}}$

$\therefore$ في Δ ب ح ء : $\overrightarrow{\text{حﻫ}}$ ينصف ($\angle$ ب ح ء)

2

$\because$ ل ، م هما جذرا المعادلة $\text{س}^2 - 7\text{س} + 12 = 0$

$\therefore$ ل + م = 7 ، ل م = 12

$\therefore$ المعادلة المطلوبة جذراها ل^2 ، م^2

$\therefore \text{ل}^2 + \text{م}^2 = (\text{ل} + \text{م})^2 - 2\ \text{ل م} = 7^2 - 2 \times 12$

= 25

، $\text{ل}^2 \text{م}^2 = (\text{ل م})^2 = (12)^2 = 144$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هي : $\text{س}^2 - 25\text{س} + 144 = 0$

١٥ محافظة سوهاج

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

١ (ج)	٢ (ب)	٣ (أ)	٤ (د)
٥ (ب)	٦ (ج)	٧ (ب)	٨ (أ)
٩ (د)	١٠ (ج)	١١ (ب)	١٢ (د)
١٣ (ب)	١٤ (أ)	١٥ (ج)	١٦ (د)
١٧ (أ)	١٨ (ب)	١٩ (د)	٢٠ (ج)
٢١ (د)	٢٢ (أ)	٢٣ (د)	٢٤ (ب)
٢٥ (أ)	٢٦ (ج)	٢٧ (ب)	

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢ - ٥ س + ٣ = ٠$

∴ $ل + م = ٥$ ، $ل م = ٣$

∴ المعادلة المطلوبة جذريها : ٢ ل ، ٢ م

∴ $٢ ل + ٢ م = ٢ (ل + م) = ٢ \times ٥ = ١٠$

، $٢ ل \times ٢ م = ٤ ل م = ٤ \times ٣ = ١٢$

∴ المعادلة المطلوبة هي : $س^٢ - ١٠ س + ١٢ = ٠$

٢

∵ $\overleftrightarrow{أء}$ ينصف (د ب أ ح)

∴ $\frac{ب ء}{ء ح} = \frac{أ ب}{أ ح}$

∴ $\frac{ب ء}{٧ - ب ء} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

$٣ ب ء = ٢٨ - ٤ ب ء$

∴ $٧ ب ء = ٢٨$

∴ $ب ء = ٤$ سم

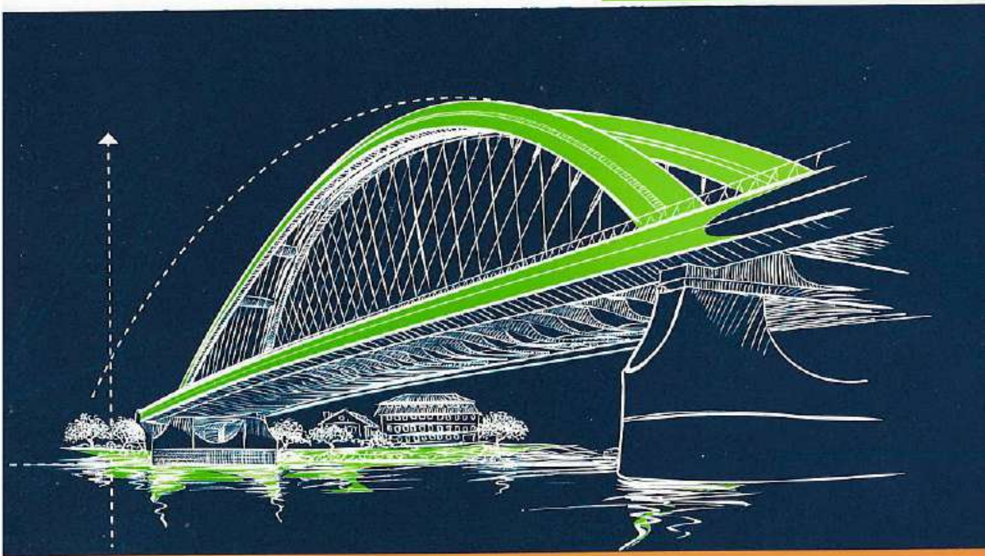
، $ء ح = ٧ - ٤ = ٣$ سم

∴ $أء = \sqrt{٨ \times ٦ - ٤ \times ٣}$

∴ $أء = ٦$ سم

الرياضيات

الجزء الخاص
بالإجابات

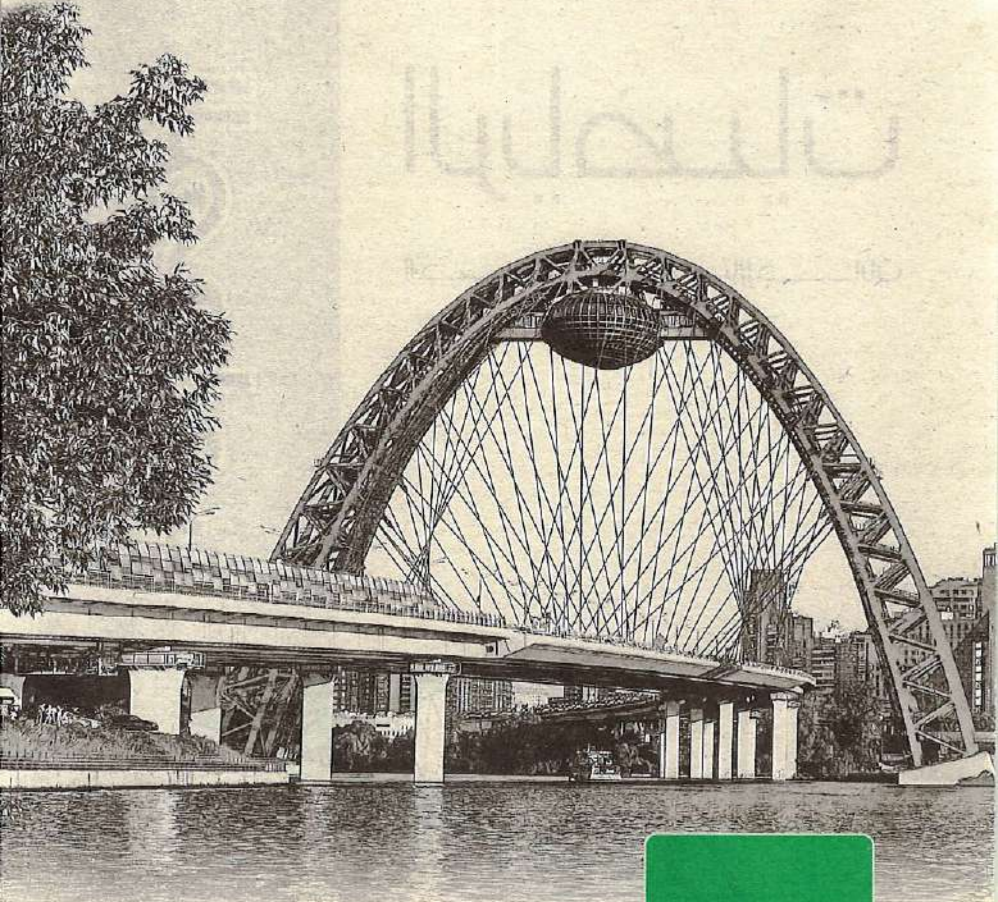


2024
المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الأول



أولًا

الجبر
وحساب المثلثات

إرشادات الوحدة الأولى

إرشادات المتطلبات القبلية

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د)

(٥) (د) (٦) (جـ) (٧) (أ) (٨) (ب)

(٩) (جـ) (١٠) (أ) (١١) (أ) (١٢) (أ)

(١٣) (جـ) (١٤) (د) (١٥) (أ) (١٦) (جـ)

(١٧) (د) (١٨) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ أ = ١ ، ب = -٦ ، جـ = ١

∴ س = $\frac{٦ \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١} = \frac{٦ \pm ٤\sqrt{٢}}{٢}$

= $٣ \pm ٢\sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحل = {٥,٨ ، ٠,٢}

(٢) ∵ أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ٥

∴ س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١} = \frac{-٣ \pm \sqrt{-١١}}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\varnothing$

(٣) ∵ أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = -٤

∴ س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ٢ \times -٤}}{٢ \times ٢} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٤١}}{٤}$

∴ مجموعة الحل = {٠,٩ ، -٢,٤}

(٤) ∵ أ = ٣ ، ب = ٠ ، جـ = -٦٥

∴ س = $\frac{\pm \sqrt{-٤ \times ٣ \times -٦٥}}{٢ \times ٣} = \frac{\pm \sqrt{٧٨٠}}{٦}$

∴ مجموعة الحل = {٤,٧ ، -٤,٧}

(٥) بالضرب × س ∴ $س^٢ - ٣س - ٥ = ٠$

∴ أ = ١ ، ب = -٣ ، جـ = -٥

∴ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times -٥}}{٢ \times ١} = \frac{٣ \pm \sqrt{٢٩}}{٢}$

∴ مجموعة الحل = {٤,٢ ، -١,٢}

(٦) ∵ $\frac{٣}{س - ٢} + \frac{٢}{س + ٢} = ٢$

∴ $\frac{٣س + ٦ + ٢س - ٤}{س^٢ - ٤} = ٢$

∴ $٥س + ٢ = ٢س^٢ - ٨$

∴ $٢س^٢ - ٥س - ١٠ = ٠$

∴ أ = ٢ ، ب = -٥ ، جـ = -١٠

∴ س = $\frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤ \times ٢ \times -١٠}}{٢ \times ٢} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٠٥}}{٤}$

∴ مجموعة الحل = {٣,٨ ، -١,٣}

٢

(١) ∵ أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = -٤

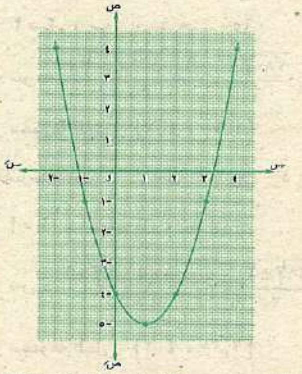
∴ س = $\frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times -٤}}{٢ \times ١}$

= $\frac{٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٥}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٥}$

∴ مجموعة الحل = {-١,٢ ، ٣,٢}

بفرض أن : د (س) = $س^٢ - ٢س - ٤$

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٤	-١	-٤	-٥	-٤	-١	٤



من الرسم : مجموعة الحل = {−٢,١ ، ٣,٢} تقريبًا.

(٢) ∵ أ = −١ ، ب = ٣ ، حـ = ٢

$$\therefore \text{س} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times -١ \times ٢}}{٢ \times -١} = \frac{-٣ \pm \sqrt{١٧}}{-٢}$$

∴ مجموعة الحل = {−٦,٠ ، ٣,٦}

بفرض أن : د (س) = −س^{٢} + ٣ س + ٢

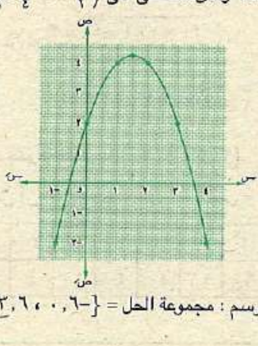
س	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	−٢	٢	٤	٤	٢	−٢

∵ الإحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى

$$= \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٣}{٢ \times -١} = \frac{٣}{٢} = ١\frac{١}{٢}$$

، د $\left(١\frac{١}{٢}\right) = -\left(١\frac{١}{٢}\right)^{٢} + ٣ \times ١\frac{١}{٢} + ٢ = ٤\frac{١}{٤}$

∴ نقطة رأس المنحنى هى $\left(١\frac{١}{٢} ، ٤\frac{١}{٤}\right)$



من الرسم : مجموعة الحل = {−٦,٠ ، ٣,٦} تقريبًا.

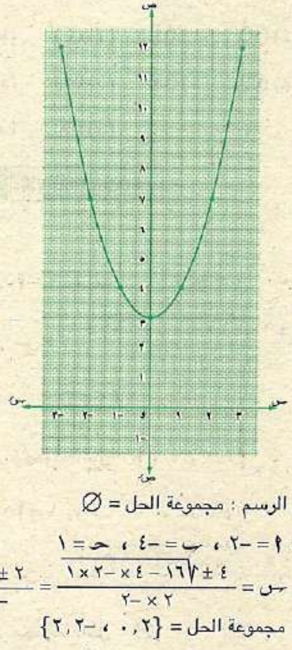
(٣) ∵ أ = ١ ، ب = ٠ ، حـ = ٣

$$\therefore \text{س} = \frac{\pm \sqrt{-٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١} = \frac{\pm \sqrt{-١٢}}{٢}$$

∴ مجموعة الحل = ∅

بفرض أن : د (س) = س^{٢} + ٣

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
ص	١٢	٧	٤	٣	٤	٧	١٢



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

(٤) ∵ أ = −٢ ، ب = −٤ ، حـ = ١

$$\therefore \text{س} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times -٢ \times ١}}{٢ \times -٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{٦}}{-٢}$$

∴ مجموعة الحل = {٠,٢ ، −٢,٢}

بفرض أن : د (س) = −٢ س^{٢} − ٤ س + ١

∴ نقطة رأس المنحنى هى (−١ ، ٣)

س	−٣	−٢	−١	٠	١
ص	−٥	١	٣	١	−٥

ارسم بنفسك ومن الرسم :

مجموعة الحل = {٠,٢ ، −٢,٢} تقريبًا.

٣

(١) ∵ $٧٨ = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١)$

∴ $\frac{\text{ن}^٢}{٢} + \frac{\text{ن}}{٢} - ٧٨ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ $\text{ن}^٢ + \text{ن} - ١٥٦ = ٠$

∴ $(\text{ن} - ١٢)(\text{ن} + ١٣) = ٠$

∴ ن = ١٢ أ، ن = −١٣ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ١٢ عددًا.

(٢) ∵ $١٧١ = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١)$

∴ $\frac{\text{ن}^٢}{٢} + \frac{\text{ن}}{٢} - ١٧١ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ $\text{ن}^٢ + \text{ن} - ٣٤٢ = ٠$

∴ $(\text{ن} - ١٨)(\text{ن} + ١٩) = ٠$

∴ ن = ١٨ أ، ن = −١٩ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ١٨ عددًا.

(٣) ∵ $٢٥٣ = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١)$

∴ $\frac{\text{ن}^٢}{٢} + \frac{\text{ن}}{٢} - ٢٥٣ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ $\text{ن}^٢ + \text{ن} - ٥٠٦ = ٠$

∴ $(\text{ن} - ٢٢)(\text{ن} + ٢٣) = ٠$

∴ ن = ٢٢ أ، ن = −٢٣ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ٢٢ عددًا.

(٤) ∵ $٤٦٥ = \frac{\text{ن}}{٢}(\text{ن} + ١)$

∴ $\frac{\text{ن}^٢}{٢} + \frac{\text{ن}}{٢} - ٤٦٥ = ٠$ (بالضرب × ٢)

∴ $\text{ن}^٢ + \text{ن} - ٩٣٠ = ٠$

∴ $(\text{ن} - ٣٠)(\text{ن} + ٣١) = ٠$

∴ ن = ٣٠ أ، ن = −٣١ (مرفوض)

∴ عدد الأعداد الصحيحة = ٣٠ عددًا.

ارشادات تمارين 1

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (أ)	(٤) (ب)
(٥) (جـ)	(٦) (جـ)	(٧) (ب)	(٨) (ب)
(٩) (جـ)	(١٠) (أ)	(١١) (ب)	(١٢) (ب)
(١٣) (ب)	(١٤) (أ)	(١٥) (جـ)	(١٦) (د)
(١٧) (جـ)	(١٨) (جـ)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (د)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (د)	(٢٤) (جـ)
(٢٥) (د)	(٢٦) (د)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (ب)
(٢٩) (جـ)	(٣٠) (جـ)	(٣١) (جـ)	(٣٢) (د)
(٣٣) (ب)	(٣٤) (جـ)	(٣٥) (جـ)	(٣٦) (أ)
(٣٧) (جـ)	(٣٨) (أ)	(٣٩) (أ)	(٤٠) (ب)
(٤١) (أ)			

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(١) $٦ + \text{ت} - ١٢\,\text{ت}^٢ = ١٨ + \text{ت}$

(٢) $٤ - ٢٠\,\text{ت} + ٢٥\,\text{ت}^٢ = -٢١ - ٢٠\,\text{ت}$

(٣) $٩ - ١٢\,\text{ت} + ٤\,\text{ت}^٢ + ٣ + ٢\,\text{ت} = ٨ - ١٠\,\text{ت}$

(٤) $\left[(١ + \text{ت})^٢\right]^٢ = (١ + ٢\,\text{ت} + \text{ت}^٢)^٢ = (٢\,\text{ت})^٢$

$= ٤\,\text{ت}^٢ = -٤$

(٥) $\left[(١ + \text{ت})^٢\right]^٢ - \left[(١ - \text{ت})^٢\right]^٢$

$= (١ + ٢\,\text{ت} + \text{ت}^٢)^٢ - (١ - ٢\,\text{ت} + \text{ت}^٢)^٢$

$= (٢\,\text{ت})^٢ - (-٢\,\text{ت})^٢ = ٤\,\text{ت}^٢ - ٤\,\text{ت}^٢ =$ صفر

(٦) $\left[(١ - \text{ت})^٢\right]^٥ = (١ - ٢\,\text{ت} + \text{ت}^٢)^٥ = (-٢\,\text{ت})^٥$

$= -٣٢\,\text{ت}^٥ = -٣٢\,\text{ت}$

(٧) $(١ - ٢)(٢ + ٣\,\text{ت} + ٤\,\text{ت}^٢)$

$= -١\,(٢ + ٣\,\text{ت} - ٤) = ٢ - ٣\,\text{ت}$

٢

(١) $\frac{٤ - ٥\,\text{ت}}{٧\,\text{ت}} \times \frac{-٧\,\text{ت}}{-٧\,\text{ت}} = \frac{-٢٨\,\text{ت} + ٣٥\,\text{ت}^٢}{-٤٩\,\text{ت}^٢}$

$= -\frac{٥}{٧} - \frac{٤}{٧}\,\text{ت}$

(٢) $\frac{26}{3-2ت} \times \frac{3+2ت}{3+2ت} = \frac{78+52ت}{9-4ت^2}$

$= \frac{78+52ت}{13} = 6+4ت$

(٣) $\frac{2-3ت}{3+ت} \times \frac{3-ت}{3-ت} = \frac{6-11ت+3ت^2}{9-ت^2}$

$= \frac{3}{10} - \frac{11ت}{10}$

(٤) $\frac{3+4ت}{5-2ت} \times \frac{5+2ت}{5+2ت} = \frac{15+26ت+8ت^2}{25-4ت^2}$

$= \frac{7}{29} + \frac{26ت}{29}$

(٥) $\frac{(3+2ت)(2-ت)}{3+ت} = \frac{6+ت-2ت^2}{3+ت} = \frac{8+ت}{3+ت}$

∴ $\frac{8+ت}{3+ت} \times \frac{3-ت}{3-ت} = \frac{24-5ت-ت^2}{9-ت^2}$

$= \frac{25-5ت}{10} = \frac{5}{2} - \frac{ت}{2}$

(٦) $\frac{(3+ت)(3-ت)}{3-4ت} = \frac{9-ت^2}{3-4ت} = \frac{10}{3-4ت}$

∴ $\frac{10}{3-4ت} \times \frac{3+4ت}{3+4ت} = \frac{10(3+4ت)}{9-16ت^2}$

$= \frac{10(3+4ت)}{25}$

$= \frac{6}{5} + \frac{8ت}{5}$

(٧) $\frac{1}{(1+2ت)^2} = \frac{1}{1+4ت+4ت^2} = \frac{1}{-3+4ت}$

∴ $\frac{1}{-3+4ت} \times \frac{-3-4ت}{-3-4ت} = \frac{-3-4ت}{9-16ت^2}$

$= \frac{-3}{25} - \frac{4ت}{25}$

(٨) $\frac{1+ت+2ت^2+2ت^3}{1-5ت+3ت^2-3ت^3} = \frac{-1-ت}{-2-2ت} = \frac{1}{2}$

(٩) $\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}ت}{\sqrt{3}-3\sqrt{2}ت} \times \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}ت}{\sqrt{3}+3\sqrt{2}ت}$

$= \frac{6+8\sqrt{6}ت+12ت^2}{3-18ت^2} = \frac{-6+8\sqrt{6}ت}{21}$

$= -\frac{2}{7} + \frac{8\sqrt{6}ت}{21}$

٣

(١) ∵ $3س^2 + 12 = 0$ ∴ $3س^2 = -12$

∴ $س^2 = -4$ ∴ $س = \pm\sqrt{-4}$

∴ $س = \pm\sqrt{4ت^2}$ ∴ $س = \pm 2ت$

(٢) ∵ $4س^2 + 100 = 75$ ∴ $4س^2 = -25$

∴ $س^2 = -\frac{25}{4}$ ∴ $س = \pm\sqrt{-\frac{25}{4}}$

∴ $س = \pm\sqrt{\frac{25}{4}ت^2}$ ∴ $س = \pm\frac{5}{2}ت$

(٣) $س = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\times1\times5}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$

$= \frac{4\pm\sqrt{4}ت}{2} = 2 \pm ت$

(٤) $س = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4\times2\times5}}{2\times2} = \frac{-6\pm\sqrt{-4}}{4}$

$= \frac{-6\pm\sqrt{4}ت}{4} = \frac{-3}{2} \pm \frac{1}{2}ت$

٤

(١) ∵ $(2س-3) + (3ص+1)ت = 7 + 10ت$

∴ $2س - 3 = 7$ ∴ $2س = 10$

∴ $س = 5$ ، $3ص + 1 = 10$

∴ $3ص = 9$ ∴ $ص = 3$

(٢) ∵ $(2س-ص) + (س-2ص)ت = 5 + ت$

∴ $2س - ص = 5$ (١) ، $س - 2ص = 1$ (٢)

بضرب (١) × −٢ :

∴ $-4س + 2ص = -10$ (٣)

بجمع (٢) ، (٣) : ∴ $-3س = -9$

∴ $س = 3$ ∴ $ص = 1$

(٣) ∵ $3س + ست - 2ص + صت = 5$

∴ $(3س - 2ص) + (س + ص)ت = 5$

∴ $3س - 2ص = 5$ (١) ، $س + ص = 0$ (٢)

بضرب (٢) × ٢ : ∴ $2س + 2ص = 0$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) : ∴ $5س = 5$

∴ $س = 1$ ∴ $ص = -1$

(٤) ∵ $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} + (\text{س} + \text{ص})\,\text{ت} = ٤\,\text{ت}$

∴ $\text{س} + \text{ص} = ٤$ ، $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = ٠$

∴ $(\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص}) = ٠$

∴ $٤\,(\text{س} - \text{ص}) = ٠$ ∴ $\text{س} = \text{ص} = ٢$

(٥) الطرف الأيمن $= \frac{١٠}{٢ + \text{ت}} \times \frac{٢ - \text{ت}}{٢ - \text{ت}}$

$= \frac{١٠(٢ - \text{ت})}{٤ - \text{ت}^{٢}} = \frac{١٠(٢ - \text{ت})}{٥}$

$= ٤ - ٢\,\text{ت}$

∴ $٤ - ٢\,\text{ت} = \text{س} + \text{ص}\,\text{ت}$

∴ $\text{س} = ٤$ ، $\text{ص} = -٢$

(٦) $\text{س} + \text{ت}\,\text{ص} = \frac{٦ - ٤\,\text{ت}}{١ - \text{ت}} \times \frac{١ + \text{ت}}{١ + \text{ت}}$

$= \frac{٦ + ٢\,\text{ت} - ٤\,\text{ت} - ٤\,\text{ت}^{٢}}{١ - \text{ت}^{٢}} = \frac{١٠ + ٢\,\text{ت}}{٢}$

$= ٥ + \text{ت}$

∴ $\text{س} = ٥$ ، $\text{ص} = ١$

(٧) الطرف الأيمن $= \frac{(٢ + \text{ت})(٢ - \text{ت})}{٣ + ٤\,\text{ت}}$

$= \frac{٤ - \text{ت}^{٢}}{٣ + ٤\,\text{ت}} = \frac{٥}{٣ + ٤\,\text{ت}}$

بالضرب × مرافق المقام

∴ الطرف الأيمن $= \frac{٥}{٣ + ٤\,\text{ت}} \times \frac{٣ - ٤\,\text{ت}}{٣ - ٤\,\text{ت}}$

$= \frac{٥\,(٣ - ٤\,\text{ت})}{٩ - ١٦\,\text{ت}^{٢}} = \frac{٥\,(٣ - ٤\,\text{ت})}{٢٥}$

$= \frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}\,\text{ت}$

∴ $\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}\,\text{ت} = \text{س} + \text{ص}\,\text{ت}$

∴ $\text{س} = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{ص} = \frac{-٤}{٥}$

٥

∵ $\text{س} = \frac{١٣}{٥ - \text{ت}} \times \frac{٥ + \text{ت}}{٥ + \text{ت}} = \frac{١٣\,(٥ + \text{ت})}{٢٥ - \text{ت}^{٢}}$

$= \frac{١٣\,(٥ + \text{ت})}{٢٦} = \frac{٥}{٢} + \frac{\text{ت}}{٢}$

، $\text{ص} = \frac{٣ + ٢\,\text{ت}}{١ + \text{ت}} \times \frac{١ - \text{ت}}{١ - \text{ت}} = \frac{٣ - \text{ت} - ٢\,\text{ت}^{٢}}{١ - \text{ت}^{٢}}$

$= \frac{٥}{٢} - \frac{\text{ت}}{٢}$

∴ س ، ص عددان مترافقان.

٦

الطرف الأيسر $= \frac{٢ + \text{ت}}{٢ - \text{ت}} \times \frac{٢ + \text{ت}}{٢ + \text{ت}} = \frac{٤ + ٤\,\text{ت} + \text{ت}^{٢}}{٤ - \text{ت}^{٢}}$

$= \frac{٣ + ٤\,\text{ت}}{٥} = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}\,\text{ت}$

∴ $\text{أ} + \text{ب}\,\text{ت} = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥}\,\text{ت}$ ∴ $\text{أ} = \frac{٣}{٥}$ ، $\text{ب} = \frac{٤}{٥}$

∴ $\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} = ١$

٧

إجابة أحمد هى الصحيحة لأن طريقة فك كريم للقوس $(٢ + ٣\,\text{ت})^{٢}$ خطأ

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ (١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (د)

(٥) (د) (٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (جـ)

(٩) (د) (١٠) (د)

إرشادات لحل رقم ١

(١) ∵ ل جذر من جذور المعادلة $\text{س}^{٢} + ١ = ٠$

∴ $\text{ل}^{٢} + ١ = ٠$ $\text{ل}^{٢} = -١$

∴ $\text{ل}^{٢٠١٨} = (\text{ل}^{٢})^{١٠٠٩} = (-١)^{١٠٠٩} = -١$

بالمثل $\text{م}^{٢٠١٨} = -١$

∴ $\text{ل}^{٢٠١٨} + \text{م}^{٢٠١٨} = (-١) + (-١) = -٢$

(٢) $(١ + \text{ت})^{٢٠٢٠} = \left[(١ + \text{ت})^{٢}\right]^{١٠١٠} = (٢\,\text{ت})^{١٠١٠}$

، $(١ - \text{ت})^{٢٠٢٠} = \left[(١ - \text{ت})^{٢}\right]^{١٠١٠}$

$= (-٢\,\text{ت})^{١٠١٠} = (٢\,\text{ت})^{١٠١٠}$

∴ $(١ + \text{ت})^{٢٠٢٠} = (١ - \text{ت})^{٢٠٢٠}$

(٣) $\left(\frac{١ - \text{ت}}{١ + \text{ت}}\right)^{١٠٠} = \left(\frac{(١ - \text{ت})^{٢}}{(١ + \text{ت})^{٢}}\right)^{٥٠} = \left(\frac{-٢\,\text{ت}}{٢\,\text{ت}}\right)^{٥٠} = ١$

(٤) $(٢ + ت)^{-١} = \frac{١}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت}$

$= \frac{٢ - ت}{٤ + ١} = \frac{٢ - ت}{٥}$

∴ مرافق العدد $(٢ + ت)^{-١}$ هو $\frac{٢ + ت}{٥}$

(٥) $س^{٢} + ٤ = س^{٢} - ٤ ت^{٢}$

$= (س - ٢ ت)(س + ٢ ت)$

(٦) $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + \cdots + ت^{١٠٠}$

$= ت - ١ - ت + ١ + \cdots + ت^{١٠٠}$

(مجموع كل أربع حدود متتالية = صفر)

∴ المجموع الكلى = صفر

(٧) $(١ + ت)(١ + ت^{٢})(١ + ت^{٣})(١ + ت^{٤})$
$\dots(١ + ت^{١٠٠})$

، ∵ $(١ + ت^{٢}) = (١ - ١) =$ صفر

∴ ناتج الضرب $(١ + ت)$ (صفر) $(١ + ت^{٣})$
$(١ + ت^{٤}) \dots (١ + ت^{١٠٠}) =$ صفر

(٨) ∵ $ت = ت^{٥}$ ∴ ليس بالضرورة م = ن

، $ت^{م} = ت^{ن}$

∴ $ت^{م} = ت^{ن + ٤ك}$ حيث ك عدد صحيح

∴ م = ن + ٤ ك ∴ م − ن = ٤ ك

∴ م − ن مضاعف لـ ٤

، ∵ $ت^{م} \times ت^{ن} = ت^{ن} \times ت^{ن}$

∴ $ت^{م + ن} = ت^{٢ن + ٤ك}$

∴ م + ن = ٢ ن + ٤ ك

∴ م + ن = ٢ (ن + ٢ ك) عدد زوجى

(٩) ∵ أ < ب < ٠

∴ أ ، ب عددان حقيقيان سالبان

∴ $\sqrt{أ ب}$ عدد حقيقى

، ∵ حـ > ٠

∴ ب حـ < ٠ ، ب أ > ٠

∴ $\sqrt{ب (حـ - أ)} = \sqrt{ب حـ - ب أ}$ عدد تخيلى

∴ $\sqrt{أ ب} = ٢$ ∴ أ ب = ٤

، $\sqrt{ب حـ - ب أ} = ٣ ت$

∴ ب حـ − ب أ = −٩

∴ ب حـ − ٤ = −٩ ∴ ب حـ = −٥

(١٠) ∵ لا يوجد ترتيب فى مجموعة الأعداد المركبة غير الحقيقية.

∴ الاختيار الصحيح هو (د)

٢

∵ ٧ ت = (س + ٣ ت) (ص − ت) − ٩

$= س ص - س ت + ٣ ص ت - ٣ ت^{٢} - ٩$

= س ص − س ت + ٣ ص ت − ٦

= (س ص − ٦) + (− س + ٣ ص) ت

∴ س ص − ٦ = ٠ ∴ س ص = ٦

، − س + ٣ ص = ٧ ∴ س = ٣ ص − ٧

∴ ص (٣ ص − ٧) = ٦ ∴ $٣ ص^{٢} - ٧ ص = ٦$

∴ $٣ ص^{٢} - ٧ ص - ٦ = ٠$

∴ (ص − ٣) (٣ ص + ٢) = ٠

∴ ص = ٣ ∴ س = ٢

أ، $ص = -\frac{٢}{٣}$ ∴ س = −٩

٣

$س = \frac{٢ + ت}{٢ - ت} \times \frac{٢ + ت}{٢ + ت} = \frac{٤ + ٤ ت + ت^{٢}}{٤ - ت^{٢}}$

$= \frac{٣ + ٤ ت}{٥} = \frac{٣}{٥} + \frac{٤}{٥} ت$

، $ص = \frac{٢ + ٣ ت}{٢ + ت} \times \frac{٢ - ت}{٢ - ت} = \frac{٤ + ٤ ت - ٣ ت^{٢}}{٤ - ت^{٢}}$

$= \frac{٧ + ٤ ت}{٥} = \frac{٧}{٥} + \frac{٤}{٥} ت$

، ∵ ٢ س − ص = أ + ب ت

∴ $\frac{٦}{٥} + \frac{٨}{٥} ت - \frac{٧}{٥} - \frac{٤}{٥} ت = أ + ب ت$

∴ $-\frac{١}{٥} + \frac{٤}{٥}$ ت = أ + ب ت

∴ أ = $-\frac{١}{٥}$ ، ب = $\frac{٤}{٥}$

∴ ٩ أ^{٢} + ب^{٢} = ٩ $\left(-\frac{١}{٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} = \frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} = ١$

إرشادات تمارين 2

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (جـ) (٥) (جـ)

(٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (د) (١٠) (ب)

(١١) (جـ) (١٢) (د) (١٣) (جـ) (١٤) (د) (١٥) (د)

(١٦) (د) (١٧) (ب) (١٨) (د) (١٩) (د) (٢٠) (د)

(٢١) (د) (٢٢) (د) (٢٣) (ب) (٢٤) (د) (٢٥) (ب)

(٢٦) (أ) (٢٧) (جـ) (٢٨) (أ) (٢٩) (أ) (٣٠) (د)

(٣١) (ب) (٣٢) (جـ) (٣٣) (ب) (٣٤) (جـ) (٣٥) (د)

(٣٦) (جـ) (٣٧) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) المميز = (−٢)^{٢} − ٤ × ١ × ٥ = −١٦ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين.

(٢) المميز = (−١٠)^{٢} − ٤ × ١ × ٢٥ = ٠

∴ الجذران حقيقيان متساويان.

(٣) المميز = (٥)^{٢} − ٤ × (−١) × (−٣٠) = −٩٥ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين.

(٤) ∵ س − ١١ − س^{٢} + ٦ س = ٠

∴ س^{٢} − ٧ س + ١١ = ٠

∴ المميز = (−٧)^{٢} − ٤ × ١ × ١١ = ٥ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٥) ∵ س − $\frac{٢}{\text{س} - ١}$ = ٤ بالضرب × (س − ١)

∴ س^{٢} − س − ٢ = ٤ س − ٤

∴ س^{٢} − ٥ س + ٢ = ٠

∴ المميز = (−٥)^{٢} − ٤ × ١ × ٢ = ١٧ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٦) ∵ $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١} + \frac{\text{س}}{\text{س} - ١} = ٣$

∴ $\frac{\text{س}^{٢} - \text{س} + \text{س}^{٢} + \text{س}}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)} = ٣$

∴ $\frac{٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} - ١} = ٣$ ∴ ٢ س^{٢} = ٣ س^{٢} − ٣

∴ س^{٢} − ٣ = ٠

∴ المميز = (٠)^{٢} − ٤ × ١ × −٣ = ١٢ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

(٧) ∵ (س − ١) (س − ٧) = ٢ (س − ٣) (س − ٤)

∴ س^{٢} − ٨ س + ٧ = ٢ س^{٢} − ١٤ س + ٢٤

∴ س^{٢} − ٦ س + ١٧ = ٠

∴ المميز = (−٦)^{٢} − ٤ × ١ × ١٧ = −٣٢ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين.

٢

∵ المميز = (−٣)^{٢} − ٤ × ٢ × ٢ = −٧ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

، ∵ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{-٧}}{٤} = \frac{٣ \pm \sqrt{٧}\,\text{ت}}{٤}$

∴ الجذران هما : $\frac{٣ + \sqrt{٧}\,\text{ت}}{٤}$ ، $\frac{٣ - \sqrt{٧}\,\text{ت}}{٤}$

٣

(١) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ (−٣)^{٢} − ٤ × ١ × $\left(٢ + \frac{١}{\text{ك}}\right)$ = ٠

∴ ٨ + $\frac{٤}{\text{ك}}$ = ٩ ∴ $\frac{٤}{\text{ك}}$ = ١

∴ ك = ٤

(٢) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = صفر

∴ (٢ ك + ٣)^{٢} − ٤ × ١ × ك^{٢} = ٠

∴ $\cancel{٤ ك^{٢}}$ + ١٢ ك + ٩ − $\cancel{٤ ك^{٢}}$ = ٠

∴ ك = $\frac{-٣}{٤}$

(٣) ∵ الجذران متساويان ∴ المميز = ٠

∴ [٢ (ك − ١)]^{٢} − ٤ × ١ × (٢ ك + ١) = ٠

∴ ٤ ك^{٢} − ٨ ك + ٤ − ٨ ك − ٤ = ٠

∴ ٤ ك^{٢} − ١٦ ك = ٠ ∴ ٤ ك (ك − ٤) = ٠

∴ ك = ٠ أ، ك = ٤

، ∵ الجذران متساويان وكل منهما

= $\frac{-٢ ك + ٢ \pm \sqrt{٠}}{٢ \times ١}$ = $\frac{-٢ ك + ٢}{٢}$ = − ك + ١

∴ عندما ك = ٠

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى ١

، عندما ك = ٤

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى −٣

(٤) المعادلة هى :

س^{٢} − (٢ ك + ٦) س + (٧ ك + ٩) = ٠

∵ الجذرين متساويان ∴ المميز = ٠

∴ (٢ ك + ٦)^{٢} − ٤ × ١ × (٧ ك + ٩) = ٠

∴ ٤ ك^{٢} + ٢٤ ك + ٣٦ − ٢٨ ك − ٣٦ = ٠

∴ ٤ ك^{٢} − ٤ ك = ٠ ∴ ٤ ك (ك − ١) = ٠

∴ ك = ٠ أ، ك = ١

∵ الجذران متساويان وكل منهما

= $\frac{(٢ ك + ٦) \pm \sqrt{٠}}{٢ \times ١}$ = ك + ٣

∴ عندما ك = ٠

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى ٣

، عندما ك = ١

فإن الجذرين متساويان وكل منهما يساوى ٤

٤

∵ المميز = (−٢ م)^{٢} − ٤ × (م − ١) × م

= ٤ م^{٢} − ٤ م^{٢} + ٤ م = ٤ م

، ∵ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

∴ ٤ م < ٠ ∴ م < ٠ ∴ م ∈]− ∞ ، ٠[

٥

(١) ∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = (−٣)^{٢} − ٤ × ٢ × −٢

= ٢٥ (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان

• التحقق الجبرى : ∵ ٢ س^{٢} − ٣ س − ٢ = ٠

∴ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٢٥}}{٤}$

∴ الجذران هما ٢ ، −$\frac{١}{٢}$ (نسبيان)

(٢) ∵ أحد المعاملات ليس عددًا نسبيًا

، المميز = $(\sqrt{٥})^{٢}$ − ٤ × ١ × −٥ = ٢٥ (مربع كامل)

∴ الجذران حقيقيان وغير نسبيين

• التحقق الجبرى : ∵ س^{٢} + $\sqrt{٥}$ س − ٥ = ٠

∴ س = $\frac{-\sqrt{٥} \pm \sqrt{٢٥}}{٢}$ = $\frac{٥ - \sqrt{٥}}{٢}$ أ، $\frac{-٥ - \sqrt{٥}}{٢}$

∴ الجذران هما $\frac{٥ - \sqrt{٥}}{٢}$ ، $\frac{-٥ - \sqrt{٥}}{٢}$

(حقيقيان وغير نسبيين)

(٣) ∵ ٢ س + ٦ + س^{٢} − س = ٩

∴ س^{٢} + س − ٣ = ٠

، ∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = (١)^{٢} − ٤ × ١ × −٣ = ١٣ (ليس مربعًا كاملاً)

∴ الجذران حقيقيان وغير نسبيين

• التحقق الجبرى : ∵ س^{٢} + س − ٣ = ٠

∴ س = $\frac{-١ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$

∴ الجذران هما $\frac{-١ + \sqrt{١٣}}{٢}$ ، $\frac{-١ - \sqrt{١٣}}{٢}$

(حقيقيان وغير نسبيين)

٦

∵ المعاملات أعداد نسبية

، المميز = (ل − م)^{٢} − ٤ × ل × −م

∴ ل^{٢} − ٢ ل م + ٤ ل م + م^{٢}

= ل^{٢} + ٢ ل م + م^{٢} = (ل + م)^{٢} (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

٧

∵ س^{٢} + ك س + ك − ١ = ٠

∴ المعاملات نسبية ، المميز = ك^{٢} − ٤ × ١ × (ك − ١)

= ك^{٢} − ٤ ك + ٤

= (ك − ٢)^{٢} (مربع كامل)

∴ الجذران نسبيان.

٨

المميز = (٢ أ + ٣)^{٢} − ٤ × (أ + ٢) × (أ − ١)

= ٤ أ^{٢} + ١٢ أ + ٩ − ٤ (أ^{٢} + أ − ٢)

= ٤ أ^{٢} + ١٢ أ + ٩ − ٤ أ^{٢} − ٤ أ + ٨ = ٨ أ + ١٧

، ∵ الجذرين حقيقيان ∴ ٨ أ + ١٧ ≥ ٠

∴ أ ≥ $-\frac{١٧}{٨}$ ∴ أ ∈ [$-\frac{١٧}{٨}$ ، ∞[

٩

∵ (س − أ) (س − ب) = ٥

∴ س^{٢} − (أ + ب) س + أ ب − ٥ = ٠

∴ المميز = (أ + ب)^{٢} − ٤ × ١ × (أ ب − ٥)

= أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} − ٤ أ ب + ٢٠

= أ^{٢} − ٢ أ ب + ب^{٢} + ٢٠ = (أ − ب)^{٢} + ٢٠

«مقدار موجب دائمًا لكل قيم أ ، ب الحقيقية»

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

١٠

المميز = (−أ)^{٢} − ٤ × (أ − ١) × ١

= أ^{٢} − ٤ أ + ٤ = (أ − ٢)^{٢}

، ∵ أ ≠ ٢ ∴ (أ − ٢)^{٢} > ٠ لكل قيم أ

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ (١) (د) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (د)

إرشادات لحل رقم **١**

(١) ∵ المميز = $(-٢\sqrt{٥})^{٢}$ − ٤ (١) (١) = ٢٠ − ٤

= ١٦

∴ الجذران حقيقيان.

، ∵ معامل س ليس عددًا نسبيًا.

∴ الجذران حقيقيان ولكن غير نسبيين.

(٢) ∵ (ب^{٢} − ٤ أ جـ) غير موجب.

∴ (ب^{٢} − ٤ أ جـ) أما أن تكون سالبة فيكون جذرى المعادلة مركبين مترافقين

وأما (ب^{٢} − ٤ أ جـ) = صفر

∴ الجذران حقيقيين متساويين.

، ∵ أ ، ب ، جـ ∈ ح

∴ الجذران مركبان مترافقان.

(٣) • س^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠

المميز : (−٤)^{٢} − ٤ × ١ × −٥ = ٣٦ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

• $\sqrt{٣}$ س^{٢} + $\sqrt{٥}$ س − ١ = ٠

المميز : ٥ − ٤ $\sqrt{٣}$ × −١ = ٥ + ٤ $\sqrt{٣}$ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

• س² − ٣√٢ س + ٤ = ٠

المميز: (−٣√٢)² − ٤ × ١ × ٤ = ٢ > ٠

∴ الجذران حقيقيان مختلفان.

• ٣ س² − √٧ س + ٥ = ٠

المميز: ٧ − ٤ × ٣ × ٥ = −٥٣ < ٠

، ∵ المعاملات أعداد حقيقية.

، المميز سالب.

∴ الجذران مركبان مترافقان وغير حقيقيين.

(٤) ∵ الجذران مركبان مترافقان

∴ المميز ≤ صفر

∴ (−٢√٢)² − ٤ × ١ × أ ≤ ٠

∴ −٤ أ ≤ −٨　　∴ أ ≥ ٢

∴ أ ∈ [٢ ، ∞[

٢

المميز = (٢ أ)² − ٤ × ١ × (أ² − ب² − حـ²)

= ٤ أ² − ٤ أ² + ٤ ب² + ٤ حـ²

= ٤ (ب² + حـ²) ≥ صفر (لأى ب ، حـ حقيقيين)

∴ الجذران حقيقيان.

٣

∵ ١/(س + أ) = ١/س + ١/أ　　∴ ١/(س + أ) = (س + أ)/(أ س)

∴ (س + أ)² − أ س = ٠

∴ س² + ٢ أ س + أ² − أ س = ٠

∴ س² + أ س + أ² = ٠

∴ المميز = أ² − ٤ × ١ × أ²

= −٣ أ² < صفر لكل أ ∈ ح*

∴ جذرا المعادلة غير حقيقيين.

إرشادات تمارين 3

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (جـ)	(٣) (د)	(٤) (جـ)	(٥) (جـ)
(٦) (ب)	(٧) (جـ)	(٨) (ب)	(٩) (د)	(١٠) (د)
(١١) (د)	(١٢) (أ)	(١٣) (جـ)	(١٤) (أ)	(١٥) (أ)
(١٦) (ب)	(١٧) (د)	(١٨) (جـ)	(١٩) (ب)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (جـ)	(٢٥) (أ)
(٢٦) (جـ)	(٢٧) (أ)	(٢٨) (أ)	(٢٩) (أ)	(٣٠) (ب)
(٣١) (د)	(٣٢) (ب)	(٣٣) (جـ)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (جـ)
(٣٦) (ب)	(٣٧) (أ)	(٣٨) (جـ)	(٣٩) (جـ)	(٤٠) (جـ)
(٤١) (د)	(٤٢) (ب)			

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ ٣ س² − ٢٣ س + ٣٠ = ٠

∴ مجموع الجذرين = ٢٣/٣ ، حاصل ضربهما = ١٠

(٢) ∵ ٤ س² + ٢٥ س + ٦ = ٣ س² − ١٠ س + ٨

∴ س² + ٣٥ س − ٢ = ٠

∴ مجموع الجذرين = −٣٥

، حاصل ضربهما = −٢

(٣) بضرب الطرفين فى م. م. أ للمقامات وهو ٢ س

∴ س² + ٢ = ٣ س

∴ س² − ٣ س + ٢ = ٠

∴ مجموع الجذرين = ٣ ، حاصل ضربهما = ٢

(٤) ∵ (أ − ١) س² + (١ − أ²) س + أ − ١ = ٠

∴ مجموع الجذرين = −(١ − أ²)/(أ − ١) = (أ² − ١)/(أ − ١)

= (أ − ١)(أ + ١)/(أ − ١) = أ + ١

، حاصل ضربهما = (أ − ١)/(أ − ١) = ١

٢

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ح}{أ}$

∴ $\frac{-ح}{٣} = \frac{-٨}{٣}$ ∴ ح = ٨

∴ $٣س^{٢} + ١٠س - ٨ = ٠$

∴ $(٣س - ٢)(س + ٤) = ٠$

∴ س = $\frac{٢}{٣}$ أ، س = −٤

٣

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ ∴ $\frac{-ب}{٢} = \frac{-٣}{٢}$

∴ ب = ٣ ∴ $٢س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠$

∴ $(٢س + ٥)(س - ١) = ٠$

∴ س = $\frac{-٥}{٢}$ أ، س = ١

٤

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل } س^{٢}} = ٢$

∴ −١ + الجذر الآخر = ٢ ∴ الجذر الآخر = ٣

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{٢}} = أ$

∴ −١ × ٣ = أ ∴ أ = −٣

(٢) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل } س^{٢}} = ٢$

∴ (١ + ت) + الجذر الآخر = ٢

∴ الجذر الآخر = ١ − ت

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{٢}} = أ$

∴ (١ + ت) (١ − ت) = أ

∴ $١ - ت^{٢} = أ$ ∴ أ = ٢

٥

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل } س^{٢}} = -أ$

∴ ٢ + ٥ = −أ ∴ أ = −٧

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{٢}} = ب$

∴ ٢ × ٥ = ب ∴ ب = ١٠

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{٢}} = \frac{-٢١}{أ}$

∴ −٣ × ٧ = $\frac{-٢١}{أ}$ ∴ أ = ١

، ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل } س^{٢}} = ب$

∴ −٣ + ٧ = ب ∴ ب = ٤

(٣) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل } س^{٢}} = \frac{١}{أ}$

∴ −١ + $\frac{٣}{٢} = \frac{١}{أ}$ ∴ أ = ٢

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{٢}} = \frac{ب}{٢}$

∴ −١ × $\frac{٣}{٢} = \frac{ب}{٢}$ ∴ ب = −٣

(٤) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل } س^{٢}} = -أ$

∴ $\sqrt{٣}$ ت + ($-\sqrt{٣}$ ت) = −أ ∴ أ = ٠

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^{٢}} = ب$

∴ $\sqrt{٣}$ ت × ($-\sqrt{٣}$ ت) = ب ∴ ب = ٣

٦

(١) ∵ أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر

∴ ك − ١ = ٠ ∴ ك = ١

(٢) ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ $٤ك = ك^{٢} + ٤$ ∴ $ك^{٢} - ٤ك + ٤ = ٠$

∴ $(ك - ٢)^{٢} = ٠$ ∴ ك = ٢

(٣) ∵ $٢س^{٢} - ٥س + ك^{٢} - ٢ = ٠$

، ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ $ك^{٢} - ٢ = ٢$ ∴ ك = ±٢

٧

نفرض أن أحد الجذرين = ل ∴ الجذر الآخر = ٢ل + ١

∴ ل (٢ل + ١) = ٢١ ∴ $٢ل^{٢} + ل - ٢١ = ٠$

∴ (٢ل + ٧) (ل − ٣) = ٠ ∴ ل = $\frac{-٧}{٢}$ أ، ل = ٣

، ∵ ل + (٢ل + ١) = أ ∴ ٣ل + ١ = أ

∴ أ = −٩٫٥ أ، أ = ١٠

٨

(١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{٣ - ك}{ك - ٤}$ = ٥

∴ ٣ − ك = ٥ ك − ٢٠

∴ ٦ ك = ٢٣ ∴ ك = $\frac{٢٣}{٦}$

(٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{-٣}{ك - ٤}$ = −٣

∴ ك − ٤ = ١ ∴ ك = ٥

(٣) ∵ مجموع الجذرين = ٠ ∴ ٣ − ك = ٠

∴ ك = ٣

(٤) ∵ أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر

∴ −٣ = ك − ٤ ∴ ك = ١

٩

بفرض أن الجذرين : ل ، ٢ ل

∴ مجموع الجذرين = $\frac{ك - ١}{٢}$ = ٣ ل

∴ ك − ١ = ٦ ل ∴ ل = $\frac{ك - ١}{٦}$ (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ك^٢ + ٢ ك - ٣}{٢}$ = ٢ ل^٢ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{ك^٢ + ٢ ك - ٣}{٢} = ٢ \left(\frac{ك - ١}{٦}\right)^٢$

∴ ك^٢ + ٢ ك − ٣ = ٤ × $\frac{ك^٢ - ٢ ك + ١}{٣٦}$

∴ ٩ ك^٢ + ١٨ ك − ٢٧ = ك^٢ − ٢ ك + ١

∴ ٨ ك^٢ + ٢٠ ك − ٢٨ = ٠

∴ ٢ ك^٢ + ٥ ك − ٧ = ٠

∴ (٢ ك + ٧) (ك − ١) = ٠

∴ ك = −٣,٥ أ، ك = ١

١٠

بفرض أن الجذرين : ل ، ٤ ل

∴ مجموع الجذرين = أ = ٥ ل ∴ ل = $\frac{١}{٥}$ أ (١)

، حاصل ضرب الجذرين = ٢ أ − ٤ = ٤ ل^٢ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ٢ أ − ٤ = ٤ $\left(\frac{١}{٥} أ\right)^٢$

∴ ٢ أ − ٤ = $\frac{٤}{٢٥}$ أ^٢ ∴ ٢ أ^٢ − ٢٥ أ + ٥٠ = ٠

∴ (أ − ١٠) (٢ أ − ٥) = ٠

∴ أ = ١٠ أ، أ = ٢ $\frac{١}{٢}$

١١

∵ مجموع الجذرين = $\frac{أ}{أ - ٢}$ = ٣

∴ أ = ٣ أ − ٦ ∴ أ = ٣

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ب^٢}{أ - ٢}$ = ٥

∴ ب^٢ = ٥ ∴ ب = ± $\sqrt{٥}$

١٢

نفرض أن الجذرين : ل ، ل^٢

، ∵ مجموع الجذرين = ل + ل^٢ = ٦

∴ ل^٢ + ل − ٦ = ٠

∴ (ل + ٣) (ل − ٢) = ٠ ∴ ل = −٣ أ، ل = ٢

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = ل × ل^٢ = حـ

∴ حـ = ل^٣

، عندما ل = −٣ ∴ حـ = (−٣)^٣ = −٢٧

، عندما ل = ٢ ∴ حـ = ٢^٣ = ٨

١٣

بفرض أن الجذرين : ل ، ١ − ل

∴ مجموع الجذرين = $\frac{أ}{٤}$ = ١ ∴ أ = ٤

١٤

نفرض أن الجذرين : ل ، $\frac{١}{ل}$ + ١

∴ حاصل ضرب الجذرين = ل $\left(\frac{١}{ل} + ١\right)$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ ١ + ل = $\frac{٣}{٢}$ ∴ ل = $\frac{١}{٢}$

، ∵ مجموع الجذرين = ل + $\frac{١}{ل}$ + ١ = $\frac{أ}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢}$ + ٢ + ١ = $\frac{أ}{٢}$ ∴ أ = ٧

15

نفرض أن الجذرين : ل ، $\text{ل}^2 - ٢$

∴ مجموع الجذرين = $\text{ل}^2 + \text{ل} - ٢ = ١٠$

∴ $\text{ل}^2 + \text{ل} - ١٢ = ٠$ ∴ (ل + ٤) (ل − ٣) = ٠

∴ ل = −٤ أ، ل = ٣

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\text{ل}^3 - ٢\,\text{ل} = \text{حـ}$

∴ حـ = −٥٦ أ، حـ = ٢١

16

نفرض أن الجذرين : ٢ ل ، ٣ ل

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = ٥\,\text{ل}$

∴ $\text{ل} = \frac{-\text{ب}}{٥\text{أ}}$ (١)

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = ٦\,\text{ل}^2$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = ٦\left(\frac{-\text{ب}}{٥\text{أ}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = \frac{٦\text{ب}^2}{٢٥\text{أ}^2}$ ∴ ٢٥ أ حـ = ٦ب^2

17

نفرض أن الجذرين : ٢ ل ، ٣ ل

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $٦\,\text{ل}^2 = \frac{٣}{٨}$

∴ $\text{ل}^2 = \frac{١}{١٦}$ ∴ $\text{ل} = \frac{١}{٤}$ (الحل السالب مرفوض)

، ∵ مجموع الجذرين = ٥ ل = $\frac{\text{ب}}{٨}$

∴ $\text{ل} = \frac{\text{ب}}{٤٠}$ وبالتعويض عن $\text{ل} = \frac{١}{٤}$ ∴ ب = ١٠

18

(١) بفرض أن الجذرين : ل ، ٢ ل

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = ٣\,\text{ل}$

∴ $\text{ل} = \frac{-\text{ب}}{٣\text{أ}}$ (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = ٢\,\text{ل}^2$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = ٢\left(\frac{-\text{ب}}{٣\text{أ}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = \frac{٢\text{ب}^2}{٩\text{أ}^2}$

∴ ٩ أ حـ = ٢ب^2 وهو الشرط اللازم

(٢) بفرض أن الجذرين : ل ، ل + ٣

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = ٢\,\text{ل} + ٣$

∴ $\text{ل} = \frac{١}{٢}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} - ٣\right)$ (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = \text{ل}^2 + ٣\,\text{ل}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = \frac{١}{٤}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} - ٣\right)^2 + \frac{٣}{٢}\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}} - ٣\right)$

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{\text{ب}^2}{\text{أ}^2} + ٦\frac{\text{ب}}{\text{أ}} + ٩\right) - \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} - \frac{٩}{٢}$

$= \frac{\text{ب}^2}{٤\text{أ}^2} + \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} + \frac{٩}{٤} - \frac{٣\text{ب}}{٢\text{أ}} - \frac{٩}{٢}$

$= \frac{\text{ب}^2}{٤\text{أ}^2} - \frac{٩}{٤}$

∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}^2 - ٩\text{أ}^2}{٤\text{أ}^2}$

∴ ٤ أ حـ = $\text{ب}^2 - ٩\text{أ}^2$ وهو الشرط اللازم.

19

∵ مجموع جذرى المعادلة الأولى = أ + ٤

، حاصل ضرب جذرى المعادلة الثانية = $\frac{\text{أ}^2}{٢}$

∴ أ + ٤ = $\frac{\text{أ}^2}{٢}$ ∴ $\text{أ}^2 - ٢\text{أ} - ٨ = ٠$

∴ (أ − ٤) (أ + ٢) = ٠ ∴ أ = ٤ أ، أ = −٢

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

1 (١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (جـ)

إرشادات لحل رقم 1

(١) ∵ المعاملات أعداد حقيقية وأحد الجذرين ٢ ت

فإن الجذر الآخر هو −٢ ت

، مجموع الجذرين = ٢ ت − ٢ ت = صفر

، حاصل ضربهما = ٢ ت × (−٢ ت) = −٤ × −١ = ٤

، المميز < صفر

(٢) ∵ ب ، حـ عددين حقيقيين

∴ إذا كان أحد الجذرين (٣ + ت) يكون الجذر الآخر (٣ − ت) وهذا كافى لإيجاد ب ، حـ

(٣) من الرسم جذرا المعادلة هما ٥ ، ٢

∴ مجموع الجذرين $\frac{-\text{ب}}{\text{ا}} = ٧$

، حاصل ضربهما $\frac{\text{حـ}}{\text{ا}} = ١٠$

∴ $\frac{\text{ب} + \text{حـ}}{\text{ا}} = (-٧) + (١٠) = ٣$

(٤) ∵ $\text{س}_١ < ٠ < \text{س}_٢$

∴ $\text{س}_١ \text{س}_٢ < ٠$ ∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{ا}} < ٠$

، ∵ $|\text{س}_١| > |\text{س}_٢|$ ∴ $\text{س}_١ + \text{س}_٢ < ٠$

∴ $\frac{-\text{ب}}{\text{ا}} < ٠$ ∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{ا}} \cdot \frac{-\text{ب}}{\text{ا}} > ٠$

∴ $-\frac{\text{ب حـ}}{\text{ا}^٢} > ٠$ ∴ $-\text{ب حـ} > ٠$

∴ ب حـ < ٠

٢

∵ المميز = $(٢\text{ا} - ١)^٢ - ١٢(\text{ا} - ٤)$

$= ٤\text{ا}^٢ - ٤\text{ا} + ١ - ١٢\text{ا} + ٤٨$

$= ٤\text{ا}^٢ - ١٦\text{ا} + ٤٩$

$= ٤(\text{ا}^٢ - ٤\text{ا} + ٤) + ٣٣$

$= ٤(\text{ا} - ٢)^٢ + ٣٣ > ٠$ مهما كانت قيمة ا

∴ للمعادلة جذران مختلفان ولكى يكون الجذران مختلفى الإشارة

يكون حاصل ضرب الجذرين < ٠

∴ $\frac{\text{ا} - ٤}{٣} < ٠$ ∴ ا − ٤ < ٠

∴ ا < ٤ ∴ ا ∈]−∞ ، ٤[

إرشادات تمارين 4

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (ب) (٥) (ا)

(٦) (ا) (٧) (د) (٨) (د) (٩) (ب) (١٠) (جـ)

(١١) (جـ) (١٢) (جـ) (١٣) (ب) (١٤) (ا) (١٥) (ب)

(١٦) (د) (١٧) (ب) (١٨) (د) (١٩) (جـ) (٢٠) (جـ)

(٢١) (ب) (٢٢) (جـ) (٢٣) (جـ) (٢٤) (ب) (٢٥) (جـ)

(٢٦) (د) (٢٧) (د) (٢٨) (ا) (٢٩) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ مجموع الجذرين = ٢ ، حاصل ضربهما = −٨

∴ المعادلة هى : $\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٨ = ٠$

(٢) ∵ مجموع الجذرين = ١٤ ، حاصل ضربهما = ٤٩

∴ المعادلة هى : $\text{س}^٢ - ١٤\text{س} + ٤٩ = ٠$

(٣) ∵ مجموع الجذرين = −٧ ، حاصل ضربهما = ٠

∴ المعادلة هى : $\text{س}^٢ + ٧\text{س} = ٠$

(٤) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{١٣}{٦}$ ، حاصل ضربهما = ١

∴ المعادلة هى : $\text{س}^٢ - \frac{١٣}{٦}\text{س} + ١ = ٠$

أى $٦\text{س}^٢ - ١٣\text{س} + ٦ = ٠$

(٥) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-٨}{٥}$ ، حاصل ضربهما = $\frac{-٣٣}{٢٥}$

∴ المعادلة هى : $\text{س}^٢ - \frac{-٨}{٥}\text{س} + \frac{-٣٣}{٢٥} = ٠$

أى $٢٥\text{س}^٢ + ٤٠\text{س} - ٣٣ = ٠$

(٦) ∵ مجموع الجذرين = $٢\sqrt{٣}$ ، حاصل ضربهما = −٣٠

∴ المعادلة هى : $\text{س}^٢ - ٢\sqrt{٣}\text{س} - ٣٠ = ٠$

(٧) ∵ مجموع الجذرين = ١٤ ، حاصل ضربهما = ٢٩

∴ المعادلة هى : $\text{س}^٢ - ١٤\text{س} + ٢٩ = ٠$

(٨) ∵ مجموع الجذرين = ٠ ، حاصل ضربهما = ٢٥

∴ المعادلة هى : $\text{س}^٢ + ٢٥ = ٠$

(٩) ∵ مجموع الجذرين = ٢ ، حاصل ضربهما = ١٠

∴ المعادلة هي : س^{٢} − ٢ س + ١٠ = ٠

(١٠) ∵ مجموع الجذرين = ٦ ، حاصل ضربهما = ١٧

∴ المعادلة هي : س^{٢} − ٦ س + ١٧ = ٠

(١١) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{٣}{ت}$ + $\frac{٣ + ٣ت}{١ - ت}$

= $\frac{٣ - ٣ت + ٣ت - ٣}{١ + ت}$ = ٠

، حاصل ضربهما = $\frac{٣}{ت}$ × $\frac{٣ + ٣ت}{١ - ت}$ = $\frac{٩ + ٩ت}{١ + ت}$ = ٩

∴ المعادلة هي : س^{٢} + ٩ = ٠

(١٢) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{-٢ + ٢ت}{١ + ت}$ + $\frac{-٢ - ٤ت}{٢ - ت}$

= $\frac{-٢ + ٦ت - ٦ت + ٢}{٣ + ت}$ = ٠

، حاصل ضربهما = $\frac{-٢ + ٢ت}{١ + ت}$ × $\frac{-٢ - ٤ت}{٢ - ت}$

= $\frac{١٢ + ٤ت}{٣ + ت}$ = ٤

∴ المعادلة هي : س^{٢} + ٤ = ٠

(١٣) ∵ مجموع الجذرين = $\frac{(أ - ب)(أ + ب)}{أ - ب}$

+ $\frac{(أ - ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٢})}{أ^{٢} + أب + ب^{٢}}$

= أ + ب + أ − ب = ٢أ

، حاصل ضربهما = (أ + ب) (أ − ب) = أ^{٢} − ب^{٢}

∴ المعادلة هي : س^{٢} − ٢ أس + أ^{٢} − ب^{٢} = ٠

٢

ل + م = ٧ ، ل م = ٥

(١) ل^{٢} م + م^{٢} ل = ل م (ل + م) = ٥ × ٧ = ٣٥

(٢) $\frac{١}{م}$ + $\frac{١}{ل}$ = $\frac{ل + م}{ل م}$ = $\frac{٧}{٥}$

(٣) (ل − ٢) (م − ٢) = ل م − ٢ (ل + م) + ٤

= ٥ − ١٤ + ٤ = −٥

(٤) (ل + $\frac{١}{م}$) (م + $\frac{١}{ل}$) = ل م + ٢ + $\frac{١}{ل م}$

= ٥ + ٢ + $\frac{١}{٥}$ = ٧ $\frac{١}{٥}$

٣

ل + م = ٤ ، ل م = ٢

(١) ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٢ ل م = ٤^{٢} − ٢ × ٢ = ١٢

(٢) ∵ (ل − م)^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٤ ل م

= ٤^{٢} − ٤ × ٢ = ٨

∴ ل − م = ٢ $\sqrt{٢}$ حيث ل > م

(٣) ل^{٣} + م^{٣} = (ل + م) [(ل + م)^{٢} − ٣ ل م]

= ٤ (١٦ − ٦) = ٤٠

(٤) ∵ ل جذر للمعادلة : س^{٢} − ٤ س + ٢ = ٠

∴ ل^{٢} − ٤ ل + ٢ = ٠ ∴ ل^{٢} − ٤ ل + ٧ = ٥

(٥) ∵ م جذر للمعادلة : س^{٢} − ٤ س + ٢ = ٠

∴ م^{٢} − ٤ م + ٢ = ٠ ∴ ٢ م^{٢} − ٨ م + ٤ = ٠

∴ ٢ م^{٢} − ٨ م + ١٥ = ١١

٤

∵ ل + م = ٣ ، ل م = −٥

وبفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ل − ٤ ، و = م − ٤

∴ هـ + و = ل − ٤ + م − ٤ = (ل + م) − ٨

= ٣ − ٨ = −٥

، هـ و = (ل − ٤) (م − ٤) = ل م − ٤ (م + ل) + ١٦

= −٥ − ٤ (٣) + ١٦ = −١

∴ المعادلة المطلوبة هي : س^{٢} + ٥ س − ١ = ٠

٥

∵ ل + م = $\frac{٥}{٢}$ ، ل م = $\frac{-٧}{٢}$

وبفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ١ − ل ، و = ١ − م

∴ هـ + و = ١ − ل + ١ − م = ٢ − (ل + م)

= ٢ − $\frac{٥}{٢}$ = $\frac{-١}{٢}$

، هـ و = (١ − ل) (١ − م) = ١ − (ل + م) + ل م

= ١ − $\frac{٥}{٢}$ + $\frac{-٧}{٢}$ = −٥

∴ المعادلة المطلوبة هي : س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ س − ٥ = ٠

أي : ٢ س^{٢} + س − ١٠ = ٠

٦

∵ ل + م = ٣ ، ل م = −٤

وبفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = $\frac{١}{ل}$ ، و = $\frac{١}{م}$

∴ هـ + و = $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ = $\frac{ل + م}{ل م}$ = $\frac{-٣}{٤}$

، هـ و = $\frac{١}{ل}$ × $\frac{١}{م}$ = $\frac{١}{ل م}$ = −$\frac{١}{٤}$

∴ المعادلة المطلوبة هي : س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س − $\frac{١}{٤}$ = ٠

أي : ٤ س^{٢} + ٣ س − ١ = ٠

٧

∵ ل + م = $\frac{٥}{٢}$ ، ل م = $\frac{١}{٢}$

وبفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ٢ ل^{٢} ، و = ٢ م^{٢}

∴ هـ + و = ٢ ل^{٢} + ٢ م^{٢} = ٢ [ل^{٢} + م^{٢}]

= ٢ [(ل + م)^{٢} − ٢ ل م]

= ٢ [$\frac{٢٥}{٤}$ − ١] = $\frac{٢١}{٢}$

، هـ و = ٢ ل^{٢} × ٢ م^{٢} = ٤ (ل م)^{٢} = ٤ × $\frac{١}{٤}$ = ١

∴ المعادلة المطلوبة هي : س^{٢} − $\frac{٢١}{٢}$ س + ١ = ٠

أي : ٢ س^{٢} − ٢١ س + ٢ = ٠

٨

نفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما : ل ، م

، جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = ل + ١ ، و = م + ١ ∴ ل = هـ − ١ (١)

، ∵ ل أحد جذرى المعادلة : س^{٢} − ٧ س − ٩ = ٠

∴ ل^{٢} − ٧ ل − ٩ = ٠

ومن (١) : ∴ (هـ − ١)^{٢} − ٧ (هـ − ١) − ٩ = ٠

∴ هـ^{٢} − ٢ هـ + ١ − ٧ هـ + ٧ − ٩ = ٠

∴ هـ^{٢} − ٩ هـ − ١ = ٠

∴ هـ جذر للمعادلة : س^{٢} − ٩ س − ١ = ٠

وهى المعادلة المطلوبة.

٩

نفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما : ل ، م

، جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = $\frac{١}{٢}$ ل ، و = $\frac{١}{٢}$ م ∴ ل = ٢ هـ (١)

، ∵ ل أحد جذرى المعادلة : ٤ س^{٢} − ١٢ س + ٧ = ٠

∴ ٤ ل^{٢} − ١٢ ل + ٧ = ٠

ومن (١) : ∴ ٤ (٢ هـ)^{٢} − ١٢ (٢ هـ) + ٧ = ٠

∴ ١٦ هـ^{٢} − ٢٤ هـ + ٧ = ٠

∴ هـ جذر للمعادلة : ١٦ س^{٢} − ٢٤ س + ٧ = ٠

وهى المعادلة المطلوبة.

١٠

نفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما : ل ، م

∴ ل + م = −٣ ، ل م = −٥

، نفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = ل^{٢} ، و = م^{٢}

∴ هـ + و = ل^{٢} + م^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٢ ل م

= ٩ + ١٠ = ١٩

، هـ و = (ل م)^{٢} = ٢٥

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ١٩ س + ٢٥ = ٠

١١

ل + م = $\frac{٣}{٢}$ ، ل م = $\frac{-١}{٢}$

وبفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

$$\therefore \text{هـ} = \frac{\text{ل}}{\text{م}} \ ، \ \text{و} = \frac{\text{م}}{\text{ل}}$$

$$\therefore \text{هـ} + \text{و} = \frac{\text{ل}}{\text{م}} + \frac{\text{م}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢}}{\text{ل م}}$$

$$= \frac{(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٢ \text{ ل م}}{\text{ل م}}$$

$$= \frac{\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} - ٢ \times \frac{-١}{٢}}{-\frac{١}{٢}} = -\frac{١٣}{٢}$$

$$، \text{هـ و} = \frac{\text{ل}}{\text{م}} \times \frac{\text{م}}{\text{ل}} = ١$$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هى : $\text{س}^{٢} + \frac{١٣}{٢} \text{س} + ١ = ٠$

أى : $٢ \text{س}^{٢} + ١٣ \text{س} + ٢ = ٠$

١٢

$$\because \text{ل} + \text{م} = ٢ \ ، \ \text{ل م} = -٤$$

وبفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

$$\therefore \text{هـ} = \frac{١}{\text{ل}^{٢}} \ ، \ \text{و} = \frac{١}{\text{م}^{٢}}$$

$$\therefore \text{هـ} + \text{و} = \frac{١}{\text{ل}^{٢}} + \frac{١}{\text{م}^{٢}} = \frac{\text{م}^{٢} + \text{ل}^{٢}}{(\text{ل م})^{٢}}$$

$$= \frac{(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٢ \text{ ل م}}{(\text{ل م})^{٢}} = \frac{٤ + ٨}{١٦} = \frac{٣}{٤}$$

$$، \text{هـ و} = \frac{١}{\text{ل}^{٢}} \times \frac{١}{\text{م}^{٢}} = \frac{١}{(\text{ل م})^{٢}} = \frac{١}{١٦}$$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هى : $\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٤} \text{س} + \frac{١}{١٦} = ٠$

أى : $١٦ \text{س}^{٢} - ١٢ \text{س} + ١ = ٠$

١٣

$$\because \text{ل} + \text{م} = \frac{٥}{٣} \ ، \ \text{ل م} = \frac{٢}{٣}$$

وبفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

$$\therefore \text{هـ} = \frac{\text{ل}^{٢}}{\text{م}} \ ، \ \text{و} = \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ل}}$$

$$\therefore \text{هـ} + \text{و} = \frac{\text{ل}^{٢}}{\text{م}} + \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}^{٣} + \text{م}^{٣}}{\text{ل م}}$$

$$= \frac{(\text{ل} + \text{م}) \left[(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٣ \text{ ل م}\right]}{\text{ل م}}$$

$$= \frac{\frac{٥}{٣}\left[\frac{٢٥}{٩} - ٢\right]}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٥}{٢} \times \frac{٧}{٩} = \frac{٣٥}{١٨}$$

$$، \text{هـ و} = \frac{\text{ل}^{٢}}{\text{م}} \times \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ل}} = \text{ل م} = \frac{٢}{٣}$$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هى : $\text{س}^{٢} - \frac{٣٥}{١٨} \text{س} + \frac{٢}{٣} = ٠$

أى : $١٨ \text{س}^{٢} - ٣٥ \text{س} + ١٢ = ٠$

١٤

$$\because \text{ل} + \text{م} = \frac{-١٢}{١٠} = \frac{-٦}{٥} \ ، \ \text{ل م} = -\frac{١}{١٠}$$

وبفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

$$\therefore \text{هـ} = ٢ \text{ ل} + \frac{١}{\text{م}} \ ، \ \text{و} = ٢ \text{ م} + \frac{١}{\text{ل}}$$

$$\therefore \text{هـ} + \text{و} = ٢ \text{ ل} + \frac{١}{\text{م}} + ٢ \text{ م} + \frac{١}{\text{ل}}$$

$$= ٢ (\text{ل} + \text{م}) + \frac{\text{ل} + \text{م}}{\text{ل م}} = ٢ \left(\frac{-٦}{٥}\right) + \frac{\frac{-٦}{٥}}{\frac{-١}{١٠}}$$

$$= \frac{-١٢}{٥} + ١٢ = \frac{٤٨}{٥}$$

$$، \text{هـ و} = \left(٢ \text{ ل} + \frac{١}{\text{م}}\right)\left(٢ \text{ م} + \frac{١}{\text{ل}}\right)$$

$$= ٤ \text{ ل م} + ٤ + \frac{١}{\text{ل م}}$$

$$= ٤ \left(-\frac{١}{١٠}\right) + ٤ - ١٠ = \frac{-٣٢}{٥}$$

$\therefore$ المعادلة المطلوبة هى : $\text{س}^{٢} - \frac{٤٨}{٥} \text{س} - \frac{٣٢}{٥} = ٠$

أى : $٥ \text{س}^{٢} - ٤٨ \text{س} - ٣٢ = ٠$

١٥

$$\because \text{ل} + \text{م} = ٣ \ ، \ \text{ل م} = -٥$$

وبفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

$$\therefore \text{هـ} = \text{ل}^{٢} \text{م} \ ، \ \text{و} = \text{م}^{٢} \text{ل}$$

$$\therefore \text{هـ} + \text{و} = \text{ل}^{٢} \text{م} + \text{م}^{٢} \text{ل} = \text{ل م} (\text{ل} + \text{م})$$

$$= -٥ \times ٣ = -١٥$$

، هـ و = ل^{٢} م × م^{٢} ل = (ل م)^{٣} = (−٥)^{٣} = −١٢٥

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} + ١٠ س − ١٢٥ = ٠

١٦

∵ ل + م = ٣ ، ل م = −١

، بفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ٣ ل − ٢ م ، و = ٢ ل − ٣ م

∴ هـ + و = ٥ ل − ٥ م = ٥ (ل − م)

، ∵ (ل − م)^{٢} = (ل + م)^{٢} − ٤ ل م = ٩ + ٤ = ١٣

∴ ل − م = $\sqrt{١٣}$ (حيث ل > م)

∴ هـ + و = ٥ (ل − م) = ٥ $\sqrt{١٣}$

، هـ و = (٣ ل − ٢ م) (٢ ل − ٣ م)

= ٦ ل^{٢} − ٩ ل م − ٤ ل م + ٦ م^{٢}

= ٦ (ل^{٢} + م^{٢}) − ١٣ ل م

= ٦ [(ل + م)^{٢} − ٢ ل م] − ١٣ ل م

= ٦ (ل + م)^{٢} − ٢٥ ل م

= ٦ × ٩ + ٢٥ = ٧٩

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ٥ $\sqrt{١٣}$ س + ٧٩ = ٠

١٧

∵ ل + ٢ + م + ٢ = ١١ ∴ ل + م = ٧

، ∵ (ل + ٢) (م + ٢) = ٣

∴ ل م + ٢ (ل + م) + ٤ = ٣

∴ ل م + ٢ × ٧ + ٤ = ٣ ∴ ل م = −١٥

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ٧ س − ١٥ = ٠

١٨

∵ ل + ٣ ، م + ٣ هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ ل + ٣ + م + ٣ = ٥ ∴ $\boxed{\text{ل + م = −١}}$

، ∵ (ل + ٣) (م + ٣) = ١١

∴ ل م + ٣ (ل + م) = ٢

∴ ل م + ٣ (−١) = ٢ ∴ $\boxed{\text{ل م = ٥}}$

وبفرض أن هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ = ل^{٢} م ، و = م^{٢} ل

∴ هـ + و = ل^{٢} م + م^{٢} ل

= ل م (ل + م) = ٥ (−١) = −٥

، هـ و = ل^{٢} م × م^{٢} ل = (ل م)^{٣} = (٥)^{٣} = ١٢٥

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} + ٥ س + ١٢٥ = ٠

١٩

∵ $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$ هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ $\frac{١}{ل}$ + $\frac{١}{م}$ = ٣ ∴ $\frac{ل + م}{ل م}$ = ٣

∴ ل + م = ٣ ل م (١)

، $\frac{١}{ل}$ × $\frac{١}{م}$ = ١ ∴ $\frac{١}{ل م}$ = ١ ∴ $\boxed{\text{ل م = ١}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\boxed{\text{ل + م = ٣}}$

وبفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = ل م − ٧ = ١ − ٧ = −٦

، و = ل + م + ٣ = ٣ + ٣ = ٦

∴ هـ + و = صفر ، هـ و = −٣٦

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ٣٦ = ٠

٢٠

∵ ل + م = ٢ ، ل م = −٥

وبفرض أن جذرى المعادلة المطلوبة هما : هـ ، و

∴ هـ = ل^{٢} + م ، و = م^{٢} + ل

∴ هـ + و = ل^{٢} + م^{٢} + م + ل

= (ل + م)^{٢} − ٢ ل م + (م + ل)

= ٤ + ١٠ + ٢ = ١٦

، هـ و = (ل^{٢} + م) (م^{٢} + ل)

= (ل م)^{٢} + ل^{٣} + م^{٣} + ل م

= ٢٥ − ٥ + (ل + م) [(ل + م)^{٢} − ٣ ل م]

= ٢٠ + ٢ [(٢)^{٢} − ٣ × −٥] = ٥٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{٢} − ١٦ س + ٥٨ = ٠

٢١

بفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما : ل ، م

∴ ل + م = $\frac{٧}{٦}$ (١)

، ل م = $\frac{\text{١ − حـ}}{٦}$ (٢)

، ل − م = $\frac{١١}{٦}$ (٣)

وبجمع (١) ، (٣) : ∴ ٢ ل = $\frac{١٨}{٦}$ ∴ ل = $\frac{٣}{٢}$

وبالتعويض فى (١) : ∴ م = $\frac{٧}{٦}$ − $\frac{٩}{٦}$ = −$\frac{١}{٣}$

∴ ل م = −$\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى (٢) :

∴ −$\frac{١}{٢}$ = $\frac{\text{١ − حـ}}{٦}$ ∴ حـ = ٤

٢٢

نفرض أن جذرى المعادلة الأولى هما : ل ، م

∴ ل − م = ± $\sqrt{\text{ك}^{٢} - ٨\,\text{ك}}$

ونفرض أن جذرى المعادلة الثانية هما : هـ ، و

∴ هـ و = ك

، ∵ ل − م = ٢ هـ و

∴ ± $\sqrt{\text{ك}^{٢} - ٨\,\text{ك}}$ = ٢ ك وبالتربيع

∴ ك^{٢} − ٨ ك = ٤ ك^{٢} ∴ ٣ ك^{٢} + ٨ ك = ٠

∴ ك (٣ ك + ٨) = ٠ ∴ ك = ٠ ، أ، ك = −$\frac{٨}{٣}$

٢٣

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ ل + م = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ ، ل م = $\frac{\text{أ}}{٤}$

، ∵ ل^{٢} + م^{٢} = ٧ ل م

∴ ل^{٢} + م^{٢} + ٢ ل م = ٩ ل م

∴ (ل + م)^{٢} = ٩ ل م ∴ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ = ٩ × $\frac{\text{أ}}{٤}$

∴ أ = ١

٢٤

∵ س^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠

∴ (س − ٥) (س + ١) = ٠

∴ س = ٥ أ، س = −١

، ∵ ل > م ∴ ل = ٥ ، م = −١

∴ جذرا المعادلة المطلوبة هما : −٢ ، ٣

∴ المعادلة هى : (س + ٢) (س − ٣) = ٠

أى : س^{٢} − س − ٦ = ٠

٢٥ حل يوسف هو الصحيح لأنه استخدم جذرى المعادلة الأولى لإيجاد جذرى المعادلة الثانية ومنها أوجد المعادلة المجهولة.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (ب) (٥) (جـ)

(٦) (د) (٧) (د) (٨) (جـ) (٩) (أ)

إرشادات الحل :

(١) نفرض أن جذرى المعادلة (بعدى المستطيل) هما ل ، م

∴ ل م = ١٥

، ٢ (ل + م) = ٢٦ ∴ ل + م = ١٣

∴ المعادلة التربيعية هى س^{٢} − ١٣ س + ١٥ = ٠

(٢) ∵ أ^{٢} + ٣ أ + ١ = ٠ ، ب^{٢} + ٣ ب + ١ = ٠

∴ أ ، ب هما جذرا المعادلة س^{٢} + ٣ س + ١ = ٠

∴ أ + ب = −٣ ، أ ب = ١

$\therefore \frac{\text{أ}}{\text{ب}} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}}{\text{أب}} = \frac{(\text{أ}+\text{ب})^{2} - 2\,\text{أب}}{\text{أب}}$

$= \frac{(-3)^{2} - 2\,(1)}{(1)} = 7$

(٣) ∵ (س − أ) (س − ب) = ك

∴ س^{2} − (أ + ب) س + أب − ك = ٠

∴ ل + م = أ + ب ، ل م = أب − ك

ومنها أب = ل م + ك

∴ المعادلة التربيعية التى جذراها أ ، ب هى

س^{2} − (ل + م) س + ل م + ك = ٠

∴ (س − ل) (س − م) + ك = ٠

(٤) ∵ (ل + م + ٤)^{2} + (ل م − ٣)^{2} = صفر

∴ ل + م + ٤ = ٠ ومنها ل + م = −٤

، ل م − ٣ = ٠ ومنها ل م = ٣

∴ لتكوين المعادلة التربيعية التى جذراها ٤ ل ، ٤ م

مجموع الجذرين ٤ ل + ٤ م = ٤ (ل + م)

= ٤ × −٤ = −١٦

، حاصل ضربهما ٤ ل × ٤ م = ١٦ ل م

= ١٦ × ٣ = ٤٨

∴ الشرط الكافى لتكوين المعادلة هو (ب)

(٥) ∵ عمر أخطأ فى الحد المطلق وكان جذرا المعادلة هما ٣ ، ٤

∴ مجموع الجذرين هو ٧

، ∵ خالد أخطأ فى معامل س وكان جذرا المعادلة هما ٢ ، ٣

∴ حاصل ضرب الجذرين هو ٦

∴ المعادلة التربيعية هى : س^{2} − ٧ س + ٦ = ٠

وجذراها هما ٦ ، ١

(٦) نفرض أن جذرى المعادلة هما ل ، ل + ٢

∴ مجموع الجذرين (−ب) = (٢ ل + ٢)

، حاصل ضربهما حـ = ل^{2} + ٢ ل

∴ ب^{2} − ٤ حـ = (٢ ل + ٢)^{2} − ٤ (ل^{2} + ٢ ل)

= ٤ ل^{2} + ٨ ل + ٤ − ٤ ل^{2} − ٨ ل = ٤

حل آخر : $\frac{\pm\sqrt{\text{ب}^{2} - 4\,\text{حـ}}}{1} = 2$

∴ ب^{2} − ٤ حـ = ٤

(٧) ∵ حاصل ضرب الجذران = حـ وهو عدد أولى

∴ الجذران هما ١ ، حـ

، ∵ حاصل جمعهما = ب (حيث ب عدد أولى)

∴ ب = ١ + حـ

∴ ب ، حـ عددان أوليان متتاليان

∴ ب = ٣ ، حـ = ٢

∴ ب − حـ = ١ (عدد فردى)

، ب^{2} − حـ = ٩ − ٢ = ٧ (عدد أولى)

، ب + حـ = ٣ + ٢ = ٥ (عدد أولى)

∴ الإجابة هى (د)

(٨) ∵ ل ، م هما جذرا المعادلة

∴ ل + م = طا θ ، ل م = −١

∴ (ل + م)^{2} = (طا θ)^{2}

∴ ل^{2} + م^{2} + ٢ ل م = طا^{2} θ

، ∵ ل^{2} + م^{2} = ٣ ∴ ٣ + ٢ (−١) = طا^{2} θ

∴ طا^{2} θ = ١ ∴ طا θ = ±١

، ∵ $0 < \theta < 90^{\circ}$ ∴ طا θ = ١

∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$

(٩) ∵ ل ، ل^{2} هما جذرا المعادلة

∴ ل + ل^{2} = −١ ، ل × ل^{2} = ١

∴ ل^{3} = ١

وبفرض أن : هـ ، و هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ هـ + و = ل^{2023} + ل^{2024} = ل^{2022} (ل + ل^{2})

= (ل^{3})^{674} (ل + ل^{2}) = ١ × (−١) = −١

، هـ × و = ل^{2023} × ل^{2024} = (ل^{3})^{1349} = ١

∴ المعادلة المطلوبة هى : س^{2} + س + ١ = ٠

إرشادات تمارين 5

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (ب)	(٤) (د)
(٥) (أ)	(٦) (د)	(٧) (أ)	(٨) (د)
(٩) (ب)	(١٠) (ب)	(١١) (جـ)	(١٢) (ب)
(١٣) (د)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)	(١٦) (د)
(١٧) (ب)	(١٨) (أ)	(١٩) (ب)	(٢٠) (د)
(٢١) (ب)	(٢٢) (جـ)		

(٢٣) أولًا : (د) ثانيًا : (جـ)

(٢٤) أولًا : (د) ثانيًا : (جـ) ثالثًا : (أ)

(٢٥) (ب)	(٢٦) (أ)	(٢٧) (ب)	(٢٨) (د)
(٢٩) (جـ)	(٣٠) (جـ)	(٣١) (ب)	(٣٢) (ب)

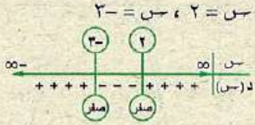
ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ د (س) = (س − ٢) (س + ٣)

∴ جذرا المعادلة : د (س) = ٠

هما : س = ٢ ، س = −٣



• د تكون موجبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ٢]

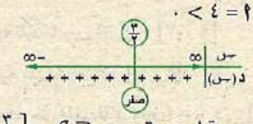
• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٢}

• د تكون سالبة عندما س ∈]−٣ ، ٢[

(٢) ∵ د (س) = (٢ س − ٣)^{٢} ∴ د (س) = ٠

أى (٢ س − ٣)^{٢} = ٠ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

، ∵ أ = ٤ > ٠



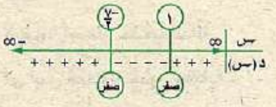
∴ د موجبة لجميع قيم س ∈ ح − {$\frac{٣}{٢}$}

(٣) ∵ د (س) = ٢ س^{٢} + ٥ س − ٧

• نوجد جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} + ٥ س − ٧ = ٠

∴ (٢ س + ٧) (س − ١) = ٠

∴ س = $\frac{-٧}{٢}$ أ، س = ١



• تكون إشارة الدالة مثل إشارة أ (حيث أ = ٢ > ٠)

أى موجبة عندما س ∈ ح − [−$\frac{٧}{٢}$ ، ١]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−$\frac{٧}{٢}$ ، ١}

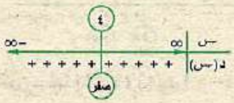
• تكون إشارة د سالبة عندما س ∈]−$\frac{٧}{٢}$ ، ١[

(٤) ∵ د (س) = س^{٢} − ٨ س + ١٦

• نوجد جذرى المعادلة : س^{٢} − ٨ س + ١٦ = ٠

∴ (س − ٤)^{٢} = ٠

∴ س = ٤



• تكون إشارة الدالة مثل إشارة أ (حيث أ = ١ > ٠)

أى موجبة عندما س ∈ ح − {٤}

• د (س) = ٠ عندما س = ٤

(٥) ∵ د (س) = ٢ س^{٢} − ٣ س + ٥

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = (−٣)^{٢} − ٤ × ٢ × ٥

= ٩ − ٤٠ = −٣١ < ٠

∴ لا توجد أصفار حقيقية للدالة

أى ليس للمعادلة جذور حقيقية

، ∵ أ (معامل س^{٢}) = ٢ > ٠

∴ د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

(٦) ∵ د(س) = −س^{٢} + ٤ س − ٧

∴ المميز = −١٢ < ٠

∴ لا توجد أصفار حقيقية للدالة

أى ليس للمعادلة جذور حقيقية

، ∵ أ (معامل س^{٢}) = −١ < ٠

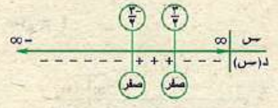
∴ د سالبة لجميع قيم س ∈ ح

(٧) ∵ د(س) = ٩ − ٤ س^{٢}

∴ د(س) = ٠ عندما ٤ س^{٢} − ٩ = ٠

أى (٢ س − ٣) (٢ س + ٣) = ٠

أى س = $\frac{٣}{٢}$ أ، −$\frac{٣}{٢}$



- تكون د لها إشارة أ (حيث أ = −٤ < ٠)

أى سالبة

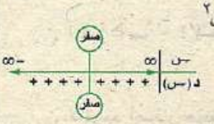
عندما س ∈ ح − [−$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$]

- د(س) = ٠ عندما س ∈ {−$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$}
- د تكون موجبة عندما س ∈]−$\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$[

(٨) ∵ د(س) = ٢ س^{٢}

∴ د(س) = ٠

عندما س = ٠

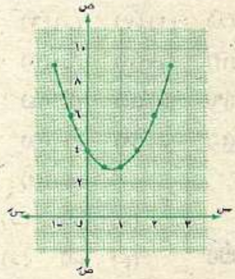


، ∵ أ (معامل س^{٢}) = ٢ > ٠

∴ د موجبة لجميع قيم س ∈ ح − {٠}

٢ د(س) = ٢ س^{٢} − ٣ س + ٤

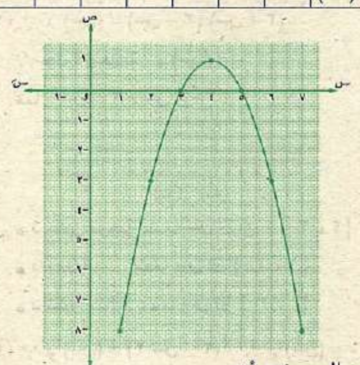
س	−١	−$\frac{١}{٢}$	٠	$\frac{١}{٢}$	١	١$\frac{١}{٢}$	٢	٢$\frac{١}{٢}$
د(س)	٩	٦	٤	٣	٣	٤	٦	٩



ومن الرسم نجد أن : د موجبة لجميع قيم س ∈ ح

٣ د(س) = −س^{٢} + ٨ س − ١٥

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
د(س)	−٨	−٣	٠	١	٠	−٣	−٨



ومن الرسم نجد أن :

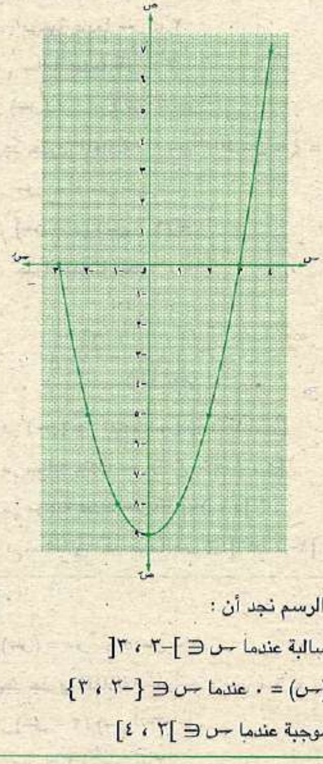
- د(س) = ٠ عندما س ∈ {٣ ، ٥}
- د سالبة عندما س ∈ ح − [٣ ، ٥]
- د موجبة عندما س ∈]٣ ، ٥[

∴ مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ هى {٣ ، ٥}

٤

د (س) = س^٢ − ٩

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	٠	−٥	−٨	−٩	−٨	−٥	٠	٧

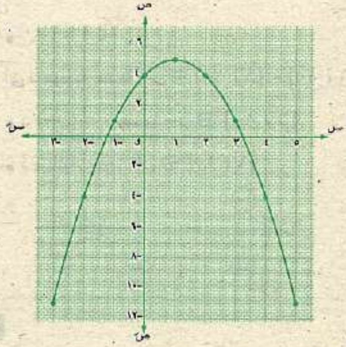


ومن الرسم نجد أن :

- د سالبة عندما س ∋]−٣ ، ٣[
- د (س) = ٠ عندما س ∋ {−٣ ، ٣}
- د موجبة عندما س ∋]٣ ، ٤]

٥ د (س) = − س^٢ + ٢ س + ٤

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤	٥
د (س)	−١١	−٤	١	٤	٥	٤	١	−٤	−١١



ومن الرسم نجد أن :

- د (س) = ٠ عندما س ∋ {−١,٢ ، ٣,٢}
- د موجبة عندما س ∋]−١,٢ ، ٣,٢[
- د سالبة عندما س ∋ [−٣ ، −١,٢[∪]٣,٢ ، ٥]

لاحظ أن : −١,٢ ، ٣,٢ هى قيم تقريبية لجذرى المعادلة المرتبطة بالدالة.

٦

(١) ∵ د (س) = ٣ − س

- د (س) = ٠ عندما س = ٣
- وتكون إشارة د موجبة عندما ٣ − س > ٠

أى : س < ٣

∴ د موجبة فى الفترة [−١ ، ٣[

- وتكون إشارة د سالبة عندما ٣ − س < ٠

أى س > ٣

∴ د سالبة فى الفترة]٣ ، ٦]

(٢) ∵ د (س) = س^٢ − ٥ س − ٦

- نوجد جذرى المعادلة : س^٢ − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٦) = ٠

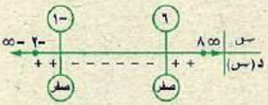
∴ س = −١ أو س = ٦

• ∵ أ = ١ > ٠

أى د موجبة عندما س ∈ [-٢ ، ٨] - [-١ ، ٦]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {-١ ، ٦}

• د سالبة عندما س ∈]-١ ، ٦[



٧

(١) من الرسم نجد أن :

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {-١ ، ٥}

• د سالبة عندما س ∈ ح - [-١ ، ٥]

• د موجبة عندما س ∈]-١ ، ٥[

(٢) من الرسم نجد أن :

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٣}

• د موجبة عندما س ∈ ح - [١ ، ٣]

• د سالبة عندما س ∈]١ ، ٣[

٨

د (س) = س - ٣

• د (س) = ٠ عندما س = ٣

• د موجبة عندما س > ٣

• د سالبة عندما س < ٣

، ر (س) = س^2 - ٥ س - ٦

= (س - ٦) (س + ١)

س = ٦ أ، س = -١

• ر (س) = ٠ عندما س ∈ {-١ ، ٦}

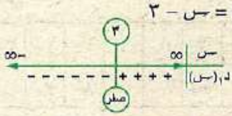
• ر موجبة عندما س ∈ ح - [-١ ، ٦]

• ر سالبة عندما س ∈]-١ ، ٦[

الدالتان موجبتان معًا عندما س > ٦

٩

* د$_1$ (س) = س - ٣



• د$_1$ (س) = صفر عندما س = ٣

• د$_1$ موجبة عندما س > ٣

• د$_1$ سالبة عندما س < ٣

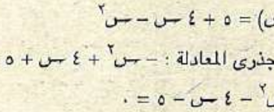
* د$_2$ (س) = ٥ + ٤ س - س^2

نوجد جذرى المعادلة : - س^2 + ٤ س + ٥ = ٠

∴ س^2 - ٤ س - ٥ = ٠

∴ (س - ٥) (س + ١) = ٠

∴ جذرا المعادلة هما ٥ ، -١



• د$_2$ (س) = ٠ عندما س ∈ {-١ ، ٥}

• د$_2$ سالبة عندما س ∈ ح - [-١ ، ٥]

• د$_2$ موجبة عندما س ∈]-١ ، ٥[

د$_1$ ، د$_2$ سالبتان معًا عندما س ∈]-∞ ، -١[

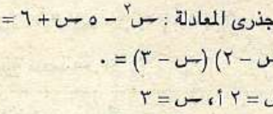
١٠

* د (س) = س^2 - ٥ س + ٦

نوجد جذرى المعادلة : س^2 - ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣



• د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

• د موجبة عندما س ∈ ح - [٢ ، ٣]

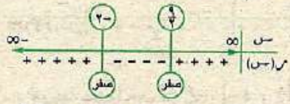
• د سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[

* ر (س) = ٢ س^{٢} − ٥ س − ١٨

نوجد جذرى المعادلة : ٢ س^{٢} − ٥ س − ١٨ = ٠

∴ (٢ س − ٩) (س + ٢) = ٠

∴ س = $\frac{٩}{٢}$ أ، س = −٢



• ر (س) = ٠ عندما س ∈ {−٢ ، $\frac{٩}{٢}$}

• ر موجبة عندما س ∈ ح − [−٢ ، $\frac{٩}{٢}$]

• ر سالبة عندما س ∈]−٢ ، $\frac{٩}{٢}$[

∴ • الدالتان موجبتان معًا عندما

س ∈]$\frac{٩}{٢}$ ، ∞[∪]−∞ ، −٢[

أى س ∈ ح − [−٢ ، $\frac{٩}{٢}$]

• الدالتان سالبتان معًا عندما س ∈]٢ ، ٣[

١١

∵ ٢ س^{٢} − ك س + ك − ٣ = ٠

∴ أ = ٢ ، ب = −ك ، جـ = ك − ٣

∴ المميز = (−ك)^{٢} − ٤ × ٢ × (ك − ٣)

= ك^{٢} − ٨ ك + ٢٤

∴ نبحث إشارة د : د (ك) = ك^{٢} − ٨ ك + ٢٤

، ∵ المميز = (−٨)^{٢} − ٤ × ١ × ٢٤ = −٣٢ < ٠

∴ المعادلة : ك^{٢} − ٨ ك + ٢٤ = ٠

ليس لها جذور حقيقية

، ∵ معامل ك^{٢} > ٠

∴ إشارة الدالة د موجبة لجميع قيم ك ∈ ح

∴ مميز المعادلة : ٢ س^{٢} − ك س + ك − ٣ = ٠

موجب لجميع قيم س ∈ ح

∴ جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} − ك س + ك − ٣ = ٠

حقيقيان مختلفان لكل س ∈ ح

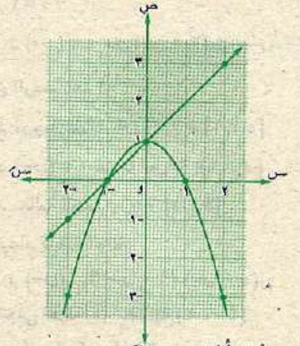
١٢

إجابة أميرة هى الصحيحة :

د (س) = س + ١   ر (س) = ١ − س^{٢}

س	−٢	٠	٢
د (س)	−١	١	٣

س	−٢	−١	٠	١	٢
ر (س)	−٣	٠	١	٠	−٣



من الرسم نجد أن :

الدالتان تكونان موجبتين فى الفترة]−١ ، ١[

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) من الرسم نجد أن :

• د موجبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ٢]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٢}

• د سالبة عندما س ∈]−٣ ، ٢[

ولإيجاد قاعدة الدالة :

∵ د (س) = أ (س − ٢) (س + ٣)

ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، −٦)

∴ −٦ = أ × −٢ × ٣   ∴ أ = ١

∴ د (س) = (س − ٢) (س + ٣) = س^{٢} + س − ٦

(٢) من الرسم نجد أن :

• د سالبة عندما س ∈ ح − [−٣ ، ٠]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ٠}

• د موجبة عندما س ∈]−٣ ، ٠[

ولإيجاد قاعدة الدالة :

∵ د (س) = أ س (س + ٣)

ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (−١ ، ٢)

∴ ٢ = أ (−١) (−١ + ٣)

∴ أ = −١

∴ د (س) = − س (س + ٣) = − س^{٢} − ٣ س

(٣) من الرسم نجد أن :

• د موجبة عندما س ∈ ح − [١ ، ٥]

• د (س) = ٠ عندما س ∈ {١ ، ٥}

• د سالبة عندما س ∈]١ ، ٥[

ولإيجاد قاعدة الدالة :

∵ د (س) = أ (س − ١) (س − ٥)

ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (٣ ، −٤)

∴ −٤ = أ (٣ − ١) (٣ − ٥)

∴ −٤ = أ × ٢ × −٢   ∴ أ = ١

∴ د (س) = (س − ١) (س − ٥)

= س^{٢} − ٦ س + ٥

إرشادات تمارين 6

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (جـ)	(٣) (د)	(٤) (جـ)	(٥) (د)
(٦) (د)	(٧) (جـ)	(٨) (ب)	(٩) (د)	(١٠) (جـ)
(١١) (جـ)	(١٢) (أ)	(١٣) (ب)	(١٤) (ب)	(١٥) (جـ)
(١٦) (جـ)	(١٧) (أ)	(١٨) (د)	(١٩) (جـ)	(٢٠) (د)
(٢١) (جـ)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (جـ)	(٢٥) (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(١) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

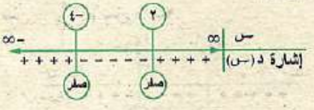
د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٨

، بوضع س^{٢} + ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٤ أ، س = ٢

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−٤ ، ٢]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [−٤ ، ٢]

(٢) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

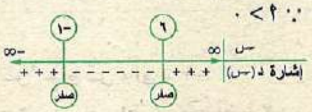
د (س) = س^{٢} − ٥ س − ٦

، بوضع س^{٢} − ٥ س − ٦ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٦) = ٠

∴ س = −١ أ، س = ٦

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈]−١ ، ٦[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−١ ، ٦[

(٣) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = ٤ − ٣ س − س^{٢}

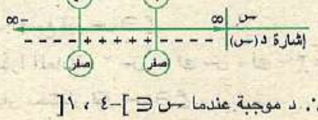
، بوضع ٤ − ٣ س − س^{٢} = ٠

∴ س^{٢} + ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ١) = ٠

∴ س = −٤ أ، س = ١

، ∵ أ < ٠



∴ د موجبة عندما س ∈]−٤ ، ١[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {-٤ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [-٤ ، ١]

(٤) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

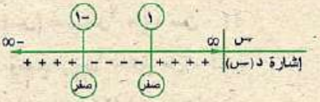
د (س) = س^{٢} − ١

، بوضع س^{٢} − ١ = ٠

∴ (س + ١) (س − ١) = ٠

∴ س = -١ أ، س = ١

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈]-١ ، ١[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {-١ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [-١ ، ١]

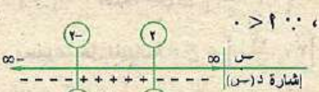
(٥) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = ٤ − س^{٢} ، بوضع ٤ − س^{٢} = ٠

∴ (٢ + س) (٢ − س) = ٠

∴ س = -٢ أ، س = ٢

، ∵ أ < ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ح − [-٢ ، ٢]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [-٢ ، ٢]

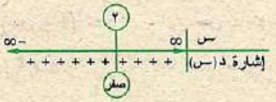
(٦) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٤

، بوضع س^{٢} − ٤ س + ٤ = ٠

∴ (س − ٢)^{٢} = ٠ ∴ س = ٢

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − {٢}

، د (س) = ٠ عندما س = ٢

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(٧) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

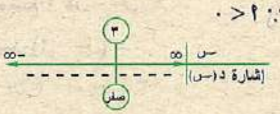
د (س) = ٦ س − س^{٢} − ٩

، بوضع ٦ س − س^{٢} − ٩ = ٠

∴ س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠

∴ (س − ٣)^{٢} = ٠ ∴ س = ٣

، ∵ أ < ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ح − {٣}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − {٣}

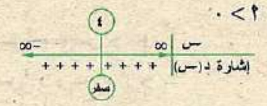
(٨) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} − ٨ س + ١٦

، بوضع س^{٢} − ٨ س + ١٦ = ٠

∴ (س − ٤)^{٢} = ٠ ∴ س = ٤

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − {٤}

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(٩) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

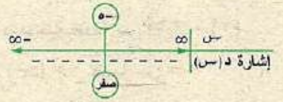
د (س) = − س^{٢} − ١٠ س − ٢٥

، بوضع − س^{٢} − ١٠ س − ٢٥ = ٠

∴ س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ $(س + ٥)^{٢} = ٠$ ∴ س = −٥

، ∵ أ < ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ح − {−٥}

، د (س) = ٠ عندما س = −٥

∴ مجموعة حل المتباينة = {−٥}

(١٠) نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

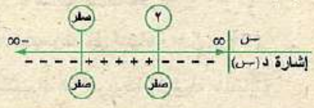
د (س) = $٢س − س^{٢}$

، بوضع $٢س − س^{٢} = ٠$

∴ س (٢ − س) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٢

، ∵ أ < ٠



∴ د سالبة عندما س ∈ ح − [٠ ، ٢]

∴ مجموعة حل المتباينة = ح − [٠ ، ٢]

٢

(١) ∵ $س^{٢} + ٥س < −٤$

∴ $س^{٢} + ٥س + ٤ < ٠$

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

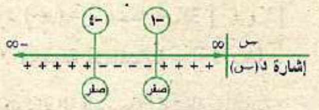
د (س) = $س^{٢} + ٥س + ٤$

، بوضع $س^{٢} + ٥س + ٤ = ٠$

∴ (س + ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = −٤ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈]−٤ ، −١[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−٤ ، −١[

(٢) ∵ $٥س^{٢} + ١٢س ≥ ٤٤$

∴ $٥س^{٢} + ١٢س − ٤٤ ≥ ٠$

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

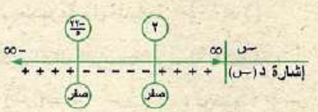
د (س) = $٥س^{٢} + ١٢س − ٤٤$

، بوضع $٥س^{٢} + ١٢س − ٤٤ = ٠$

∴ (٥س + ٢٢) (س − ٢) = ٠

∴ س = $\frac{−٢٢}{٥}$ أ، س = ٢

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [$\frac{−٢٢}{٥}$ ، ٢]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {$\frac{−٢٢}{٥}$ ، ٢}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]$−\frac{٢٢}{٥}$ ، ٢[

(٣) ∵ $٣س^{٢} ≤ ١١س + ٤$

∴ $٣س^{٢} − ١١س − ٤ ≤ ٠$

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

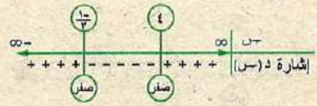
د (س) = $٣س^{٢} − ١١س − ٤$

، بوضع $٣س^{٢} − ١١س − ٤ = ٠$

∴ (٣س + ١) (س − ٤) = ٠

∴ س = $\frac{−١}{٣}$ أ، س = ٤

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈]$\frac{-1}{2}$ ، ٤[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {$\frac{-1}{2}$ ، ٤}

∴ مجموعة حل المتباينة = [$\frac{-1}{2}$ ، ٤]

(٤) ∵ س^{٢} ≥ ٦ س − ٩

∴ س^{٢} − ٦ س + ٩ ≥ ٠

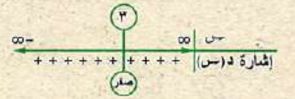
نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} − ٦ س + ٩

، بوضع س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠

∴ (س − ٣)^{٢} = ٠ ∴ س = ٣

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − {٣}

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {٣}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(٥) ∵ ٣ − ٢ س ≥ س^{٢}

∴ س^{٢} + ٢ س − ٣ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

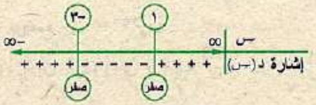
د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٣

، بوضع س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ١

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈]−٣ ، ١[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٣ ، ١]

(٦) ∵ س^{٢} + ٥ ≤ ١ ∴ س^{٢} + ٤ ≤ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٤

، بوضع س^{٢} + ٤ = ٠

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠ − ٤ × ١ × ٤

= −١٦ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(٧) ∵ −س^{٢} − ٧ < ٢

∴ −س^{٢} − ٩ < ٠ ∴ س^{٢} + ٩ > ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٩ ، بوضع س^{٢} + ٩ = ٠

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ = ٠ − ٤ × ١ × ٩

= −٣٦ < ٠

، ∵ أ > ٠

∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(٨) ∵ (س − ٢)^{٢} ≥ ٩

∴ س^{٢} − ٤ س + ٤ ≥ ٩

∴ س^{٢} − ٤ س − ٥ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

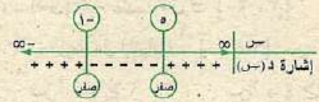
د (س) = س^{٢} − ٤ س − ٥

، بوضع س^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠

∴ (س − ٥) (س + ١) = ٠

∴ س = ٥ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−١ ، ٥]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−١ ، ٥}

∴ مجموعة حل المتباينة = ح −]−١ ، ٥[

(٩) ∵ (س − ٢)^{٢} ≥ −٥

∴ س^{٢} − ٤ س + ٤ ≥ −٥

∴ س^{٢} − ٤ س + ٩ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٩

، بوضع س^{٢} − ٤ س + ٩ = ٠

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ

= (−٤)^{٢} − ٤ × ١ × ٩ = −٢٠ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة حل المتباينة = ∅

(١٠) ∵ س (س + ٢) − ٣ ≥ ٠

∴ س^{٢} + ٢ س − ٣ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

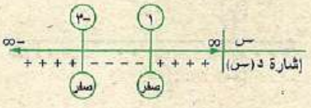
د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٣

، بوضع س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ١

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈]−٣ ، ١[

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٣ ، ١}

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٣ ، ١]

(١١) ∵ (س + ٣)^{٢} < ١٠ − ٣ (س + ٣)

∴ س^{٢} + ٦ س + ٩ < ١ − ٣ س

∴ س^{٢} + ٩ س + ٨ < ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

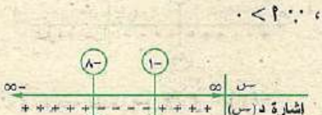
د (س) = س^{٢} + ٩ س + ٨

، بوضع س^{٢} + ٩ س + ٨ = ٠

∴ (س + ٨) (س + ١) = ٠

∴ س = −٨ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠



∴ د سالبة عندما س ∈]−٨ ، −١[

∴ مجموعة حل المتباينة =]−٨ ، −١[

(١٢) ∵ ٥ − ٢ س ≤ س^{٢}

∴ س^{٢} + ٢ س − ٥ ≥ ٠

نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

د (س) = س^{٢} + ٢ س − ٥

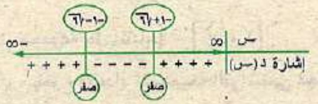
، بوضع س^{٢} + ٢ س − ٥ = ٠

∴ س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{(٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times -٥}}{٢ \times ١}$

= $\frac{-٢ \pm \sqrt{٢٤}}{٢}$ = −١ ± $\sqrt{٦}$

∴ س = −١ + $\sqrt{٦}$ أ، س = −١ − $\sqrt{٦}$

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما

س ∈ ح − [−١ − $\sqrt{٦}$ ، −١ + $\sqrt{٦}$]

، د (س) = ٠ عندما

س ∈ {−١ − $\sqrt{٦}$ ، −١ + $\sqrt{٦}$}

∴ مجموعة حل المتباينة

= ح −]−١ − $\sqrt{٦}$ ، −١ + $\sqrt{٦}$[

٣

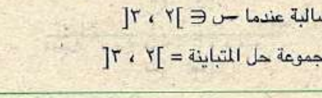
∵ د (س) = س^{٢} − ٥ س + ٦

، بوضع س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [٢ ، ٣]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {٢ ، ٣}

، د سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[

∴ مجموعة حل المتباينة =]٢ ، ٣[

٤

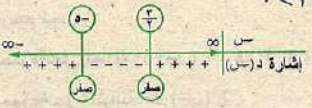
∵ د (س) = ٢ س^{٢} + ٧ س − ١٥

، بوضع ٢ س^{٢} + ٧ س − ١٥ = ٠

∴ (٢ س − ٣) (س + ٥) = ٠

∴ س = $\frac{٣}{٢}$ أ، س = −٥

، ∵ أ > ٠



∴ د موجبة عندما س ∈ ح − [−٥ ، $\frac{٣}{٢}$]

، د (س) = ٠ عندما س ∈ {−٥ ، $\frac{٣}{٢}$}

، د سالبة عندما س ∈]−٥ ، $\frac{٣}{٢}$[

∴ مجموعة حل المتباينة = [−٥ ، $\frac{٣}{٢}$]

٥

∵ د (س) = س^{٢} + ٤ ، بوضع س^{٢} + ٤ = ٠

∴ المميز = −٤ × ١ × ٤ = −١٦ < ٠

∴ المعادلة ليس لها جذور حقيقية

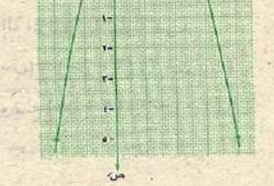
، ∵ أ > ٠ ∴ د موجبة لكل س ∈ ح

∴ مجموعة الحل للمتباينة = ∅

٦

د (س) = − س^{٢} + ٢ س + ٣

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	−٥	٠	٣	٤	٣	٠	−٥



ومن الرسم نجد أن :

(١) مجموعة حل المعادلة : د (س) = ٠ هى {-١ ، ٣}

(٢) مجموعة حل المتباينة : د (س) ≥ ٠

هى ح -]-١ ، ٣[

(٣) مجموعة حل المتباينة : د (س) > ٠ هى]-١ ، ٣[

٧ حل نور هو الصحيح

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (ب) (٥) (أ)

(٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (ب) (٩) (جـ) (١٠) (جـ)

(١١) (جـ) (١٢) (جـ) (١٣) (جـ) (١٤) (جـ)

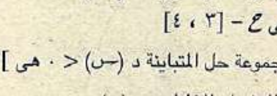
إرشادات الحل :

(١) ∵ د (س) = س^{٢} - ٧ س + ١٢

، بوضع س^{٢} - ٧ س + ١٢ = ٠

∴ (س - ٣) (س - ٤) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ٤



∴ مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى {٣ ، ٤}

، مجموعة حل المتباينة د (س) > ٠

هى ح - [٣ ، ٤]

، مجموعة حل المتباينة د (س) < ٠ هى]٣ ، ٤[

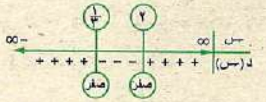
∴ الاختيار الخاطئ هو (د)

(٢) الدالة المرتبطة بالمتباينة هى د :

د (س) = (س - ٢) (٣ س - ١)

، بوضع (س - ٢) (٣ س - ١) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = $\frac{١}{٣}$



∴ مجموعة حل المتباينة = [$\frac{١}{٣}$ ، ٢]

∴ مجموع الأعداد الصحيحة التى تنتمى لمجموعة الحل = ١ + ٢ = ٣

(٣) ∵ (س + ٣)^{٢} > ٤ (س + ١)^{٢}

∴ س^{٢} + ٦ س + ٩ > ٤ س^{٢} + ٨ س + ٤

∴ ٣ س^{٢} + ٢ س - ٥ > صفر

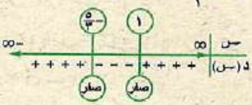
∴ الدالة المرتبطة بالمتباينة هى د :

د (س) = ٣ س^{٢} + ٢ س - ٥

، بوضع ٣ س^{٢} + ٢ س - ٥ = ٠

∴ (٣ س + ٥) (س - ١) = ٠

∴ س = $\frac{-٥}{٣}$ أ، س = ١

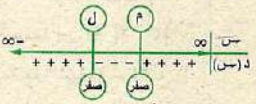


∴ مجموعة حل المتباينة = ح - [$\frac{-٥}{٣}$ ، ١]

(٤) ∵ ل ، م هما جذرى المعادلة

أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

، أ > ٠ ، بفرض د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ



∴ مجموعة حل المتباينة =]ل ، م[

(٥) ∵ المميز سالب ، أ > ٠

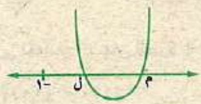
∴ الدالة المرتبطة بالمتباينة تقع بالكامل أسفل محور السينات (سالبة).

∴ مجموعة حل المتباينة = ح

(٦) ∵ للمعادلة جذران حقيقيان

∴ المميز ≥ ٠

∴ (ك − ٢)^{٢} − ٤ (٢) (−٥) ≥ ٠



∴ (ك − ٢)^{٢} ≥ −٤٠ متحققة لجميع قيم

ك ∈ ح (١)

، ∵ الجذران أكبر من −١

∴ (معامل س^{٢}) × د (−١) > ٠

∴ ٢ (٢ − (ك − ٢) −٥) > ٠

∴ ٢ (−ك − ١) > ٠ ∴ −ك − ١ > ٠

∴ ك < −١ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ك < −١

(٧) ∵ للمعادلة جذران حقيقيان

∴ المميز ≥ ٠

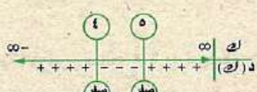
∴ (−٢ ك)^{٢} − ٤ (ك^{٢} + ك − ٥) ≥ ٠

∴ ٤ ك^{٢} − ٤ ك^{٢} − ٤ ك + ٢٠ ≥ ٠

∴ ٤ ك ≤ ٢٠ ∴ ك ≤ ٥ (١)

، ∵ الجذران أقل من ٥ ∴ د (٥) > ٠

∴ ٢٥ − ١٠ ك + ك^{٢} + ك − ٥ > ٠



∴ ك^{٢} − ٩ ك + ٢٠ > ٠

∴ (ك − ٤) (ك − ٥) > ٠

∴ ك ∈ ح − [٤ ، ٥] (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ك ∈]−∞ ، ٤[

(٨) ∵ جذرا المعادلة غير حقيقيين

∴ المميز < صفر

∴ (−ك)^{٢} − ٤ (١) (١) < ٠

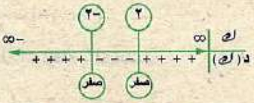
∴ ك^{٢} − ٤ < ٠

، المعادلة المرتبطة بالمتباينة ك^{٢} − ٤ = ٠

ك^{٢} = ٤

∴ ك = ٢ أ، ك = −٢

، ∵ أ > صفر



∴ حل المتباينة هو −٢ < ك < ٢

(٩) ∵ س^{٢} − ٤ ≥ س + ك

∴ س^{٢} − س − ٤ − ك ≥ ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة هى [−٢ ، ٣]

∴ جذرا المعادلة المرتبطة بالمتباينة هما −٢ ، ٣

∴ (−٢)^{٢} − (−٢) − ٤ − ك = ٠

∴ ك = ٢

(١٠) ∵ س^{٢} − ١٠ < ب س

∴ س^{٢} − ب س − ١٠ < ٠

، ∵ مجموعة حل المتباينة هى]−٢ ، ٥[

∴ جذرا المعادلة المرتبطة بالمتباينة هما −٢ ، ٥

∴ ب = −٢ + ٥ ∴ ب = ٣

(١١) ∵ أحد الجذرين فقط يقع فى الفترة]١ ، ٢[

∴ د (١) × د (٢) < ٠

∴ (١ − ب + ٣) × (٤ − ٢ ب + ٣) < ٠

∴ (٤ − ب) (٧ − ٢ ب) < ٠

∴ ب ∈]٣ $\frac{١}{٢}$ ، ٤[

(١٢) الدالة المرتبطة بالمتباينة هى د :

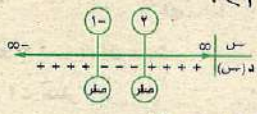
د (س) = $س^{٢} - س - ٢$

، بوضع $س^{٢} - س - ٢ = ٠$

∴ (س − ٢) (س + ١) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −١

، ∵ أ > ٠



∴ $م_{١}$ = [−١ ، ٢]

، الدالة المرتبطة بالمتباينة د :

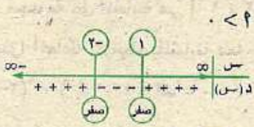
د (س) = $س^{٢} + س - ٢$

، بوضع : $س^{٢} + س - ٢ = ٠$

∴ (س + ٢) (س − ١) = ٠

∴ س = −٢ أ، س = ١

، ∵ أ > ٠



∴ $م_{٢}$ = [−٢ ، ١]

∴ $م_{١} \cap م_{٢}$ = [−١ ، ١]

(١٣) ∵ ل ، م هما جذرى المعادلة

$أ س^{٢} + أ س + أ + ٢ = ٠$

، الدالة المرتبطة بالمعادلة

د (س) = $أ س^{٢} + أ س + أ + ٢$

∴ د (ل) = د (م) = صفر

فإذا كان : أ > صفر ، ٢ ∈]ل ، م[

∴ د (٢) < صفر

∴ $(٢)^{٢} أ + ٢ أ + أ + ٢$ < صفر

∴ ٧ أ + ٢ < صفر

∴ أ < $\frac{-٢}{٧}$ (مرفوض)

وإذا كان أ < صفر ، ٢ ∈]ل ، م[

∴ د (٢) > صفر ∴ ٧ أ + ٢ > صفر

∴ أ > $\frac{-٢}{٧}$ ∴ $\frac{-٢}{٧}$ < أ < صفر

(١٤) ∵ جذرى المعادلة ينتميان للفترة]−١ ، ١[

∴ $\frac{٢ + \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤ (٤) م}}{٢ (٤)} < ١$

∴ $٢ + \sqrt{٤ - ١٦ م} < ٨$ ∴ $\sqrt{٤ - ١٦ م} < ٦$

∴ $٠ \leq ٤ - ١٦ م < ٣٦$

∴ $-٤ \leq -١٦ م < ٣٢$

∴ $\frac{-٤}{-١٦} \geq م > \frac{٣٢}{-١٦}$ ∴ $-٢ < م \leq \frac{١}{٤}$

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

١

بالتعويض عن : ف = ١٠ أمتار

فى العلاقة : ف = $-٤,٩ ن^{٢} + ٣,٥ ن + ١٠$

∴ $١٠ = -٤,٩ ن^{٢} + ٣,٥ ن + ١٠$

∴ $٤,٩ ن^{٢} = ٣,٥ ن$

∴ ٤,٩ ن = ٣,٥ حيث ن ≠ ٠

∴ ن = $\frac{٥}{٧}$ ثانية

٢

∵ مساحة الأرض الحالية = ٦ × ٩ = ٥٤ $م^{٢}$

∴ مساحة الأرض بعد مضاعفة مساحتها

= ٢ × ٥٤ = ١٠٨ $م^{٢}$

ونفرض أن الزيادة فى بُعدى الأرض = س م

∴ (٦ + س) (٩ + س) = ١٠٨

∴ $س^{٢} + ١٥ س + ٥٤ = ١٠٨$

∴ س^{٢} + ١٥ س − ٥٤ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١٨) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −١٨ (مرفوض)

∴ المقدار المضاف = ٣ أمتار.

٣

(١) عند ن = ٠ ∴ ع = ٩١ مليونًا

(٢) عند ن = ٢٠

∴ ع = (٢٠)^{٢} + ١,٢ × ٢٠ + ٩١ = ٥١٥ مليونًا

(٣) عند ع = ٢٠٣

∴ ٢٠٣ = ن^{٢} + ١,٢ ن + ٩١

∴ ن^{٢} + ١,٢ ن − ١١٢ = ٠

ن = $\frac{\text{−١,٢ ± }\sqrt{\text{١,٤٤ − ٤ × ١ × −١١٢}}}{\text{٢}}$

∴ ن = ١٠ أ، ن = −١١,٢ (مرفوض)

∴ يبلغ عدد السكان ٢٠٣ ملايين بعد ١٠ سنوات أى فى عام ٢٠٢٣

٤

شدة التيار الكلية = ٤ − ٢ ت + $\frac{\text{٦ + ٣ ت}}{\text{٢ + ت}}$

= $\frac{\text{(٤ − ٢ ت) (٢ + ت) + ٦ + ٣ ت}}{\text{٢ + ت}}$

= $\frac{\text{٨ − ٢ ت}^{٢}\text{ + ٦ + ٣ ت}}{\text{٢ + ت}}$ = $\frac{\text{١٦ + ٣ ت}}{\text{٢ + ت}}$

= $\frac{\text{١٦ + ٣ ت}}{\text{٢ + ت}}$ × $\frac{\text{٢ − ت}}{\text{٢ − ت}}$

= $\frac{\text{٣٢ − ١٠ ت − ٣ ت}^{٢}}{\text{٤ − ت}^{٢}}$

= $\frac{\text{٣٥ − ١٠ ت}}{\text{٥}}$ = (٧ − ٢ ت) أمبير.

٥

شدة التيار المار فى المقاومة الأخرى

= ٦ + ٤ ت − $\frac{\text{١٧}}{\text{٤ − ت}}$ = $\frac{\text{(٦ + ٤ ت) (٤ − ت) − ١٧}}{\text{٤ − ت}}$

= $\frac{\text{٢٤ + ١٠ ت − ٤ ت}^{٢}\text{ − ١٧}}{\text{٤ − ت}}$ = $\frac{\text{١١ + ١٠ ت}}{\text{٤ − ت}}$

= $\frac{\text{١١ + ١٠ ت}}{\text{٤ − ت}}$ × $\frac{\text{٤ + ت}}{\text{٤ + ت}}$ = $\frac{\text{٤٤ + ٥١ ت + ١٠ ت}^{٢}}{\text{١٦ − ت}^{٢}}$

= $\frac{\text{٣٤ + ٥١ ت}}{\text{١٧}}$ = (٢ + ٣ ت) أمبير.

٦

(١) ∵ د (ن) = ١٢ ن^{٢} − ٩٦ ن + ٤٨٠

∴ المميز = ب^{٢} − ٤ أ حـ

= (−٩٦)^{٢} − ٤ × ١٢ × ٤٨٠

= −١٣٨٢٤ < ٠

∴ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة

، ∵ أ = ١٢ > ٠

∴ د موجبة لجميع قيم ن ∈ ح

(٢) • فى عام ١٩٩٠ : ن = ٠

∴ د (٠) = ٤٨٠

∴ إنتاج المنجم = ٤٨٠ ألف أوقية

• فى عام ٢٠٠٥ : ن = ١٥

∴ د (١٥) = ١٢ × (١٥)^{٢} − ٩٦ × ١٥ + ٤٨٠

= ١٧٤٠

∴ إنتاج المنجم = ١٧٤٠ ألف أوقية

(٣) ∵ د (ن) = ٢٠١٦

∴ ١٢ ن^{٢} − ٩٦ ن + ٤٨٠ = ٢٠١٦

∴ ١٢ ن^{٢} − ٩٦ ن − ١٥٣٦ = ٠

∴ ن^{٢} − ٨ ن − ١٢٨ = ٠

∴ (ن − ١٦) (ن + ٨) = ٠

∴ ن = ١٦ أ، ن = −٨ (مرفوض)

∴ العام المطلوب هو : ٢٠٠٦

إرشادات الـوحـدة الثانية

إرشادات تمـارين 7

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ)

(٥) (جـ) (٦) (د) (٧) (ب) (٨) (ب)

(٩) (أ) (١٠) (ب) (١١) (جـ) (١٢) (د)

(١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (جـ) (١٦) (جـ)

(١٧) (جـ) (١٨) (جـ) (١٩) (جـ) (٢٠) (ب)

(٢١) (جـ) (٢٢) (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(١) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن رأس الزاوية ليست نقطة الأصل و

(٢) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن ضلعها الابتدائى لا يقع على $\overleftarrow{\text{و س}}$

(٣) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

(٤) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

(٥) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن رأس الزاوية ليس نقطة الأصل و

(٦) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن ضلعها الابتدائى لا يقع على $\overleftarrow{\text{و س}}$

(٧) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

(٨) الزاوية الموجهة ليست فى وضعها القياسى، لأن ضلعها الابتدائى لا يقع على $\overleftarrow{\text{و س}}$

(٩) الزاوية الموجهة فى وضعها القياسى.

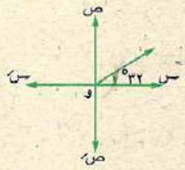
٢

(١) −٣٠٦° (٢) ٢٧٠° (٣) ٢٢٥°

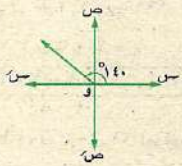
(٤) ٢٨َ ٣٠٠° (٥) ٢٤٥° (٦) −٢٠َ ٦٩°

٣

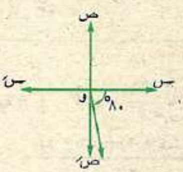
(١)



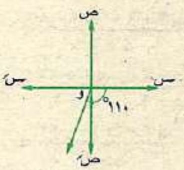
(٢)



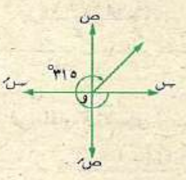
(٣)



(٤)



(٥)



٤

(١) الأول (٢) الثالث (٣) الرابع
(٤) الثانى (٥) الثانى (٦) الأول
(٧) ربعية (٨) ربعية

٥

(١) ٣٠٤° ، الرابع (٢) ٢٤٠° ، الثالث
(٣) ١٤٥° ، الثانى (٤) ٢٢٠° ، الثالث
(٥) ٥٥° ، الأول (٦) ٢١٠° ، الثالث
(٧) ٤٠° ١٥َ ، الأول (٨) ١٢٩° ٤٢َ ، الثانى

٦

(١) −٢٧٧° (٢) −٢٢٤° (٣) −٢٧٠°
(٤) −٩٦° (٥) −١١٦° (٦) −١٠°

٧

(١) ٤٠٠° ، −٣٢٠° (٢) ٥١٠° ، −٢١٠°
(٣) ٢٣٥° ، −٤٨٥° (٤) ١٢٠° ، −٦٠٠°
(٥) ١٨٠° ، −٥٤٠°

٨

إجابة زياد هى الإجابة الصحيحة.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د) (٢) (جـ) (٣) (جـ)
(٤) (د) (٥) (د)

إرشادات الحل :

(١) ∵ أ ، ب قياسا زاويتين متكافئتين.
∴ ب = أ ± ٣٦٠° ن
∴ ب + جـ = أ + جـ ± ٣٦٠° ن
∴ (ب + جـ) ، (أ + جـ) يمثلان قياسى زاويتين متكافئتين.
، ب − جـ = أ − جـ ± ٣٦٠° ن
∴ (ب − جـ) ، (أ − جـ) يمثلان أيضًا قياسى زاويتين متكافئتين.
، جـ ب = جـ أ ± ٣٦٠° جـ ن ، جـ ∈ ص
∴ (جـ ب) ، (جـ أ) يمثلان أيضًا قياسى زاويتين متكافئتين.
∴ الإجابة هى (د)

(٢) ∵ أ = −أ ± ٣٦٠° ن
بوضع ن = ١ : أ = −أ + ٣٦٠°
∴ ٢ أ = ٣٦٠° ∴ أ = ١٨٠°

(٣) (٣ س − ٥)° = (٣ ص − ٥)° + ٣٦٠°
∴ ٣ س − ٣ ص = ٣٦٠°
∴ س − ص = ١٢٠°

(٤) (θ + ٢٠)° = (٢٠ − ٨ θ)° + ٣٦٠°
∴ ٩ θ = ٣٦٠° ∴ θ = ٤٠°

(٥) الضلع النهائى يمر بالنقطة (−١ ، ٠)
∴ الزاوية الموجهة المعطاة هى زاوية ربعية.
∴ الإجابة هى (د)

إرشادات تمارين 8

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (د) (٤) (ب)
(٥) (د) (٦) (أ) (٧) (جـ) (٨) (د)
(٩) (ب) (١٠) (ب) (١١) (ب) (١٢) (ب)
(١٣) (ب) (١٤) (جـ) (١٥) (ب) (١٦) (جـ)
(١٧) (جـ) (١٨) (جـ) (١٩) (جـ) (٢٠) (د)
(٢١) (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

$\theta^{ء} = س° \times \frac{\pi}{١٨٠°}$

(١) $\theta^{ء} = \frac{١٣٥°}{١٨٠°}\pi = \frac{٣}{٤}\pi$

(٢) $\theta^{ء} = \frac{٩٠°}{١٨٠°}\pi = \frac{١}{٢}\pi$

(٣) $\theta^{ء} = \frac{٣٠٠°}{١٨٠°}\pi = \frac{٥}{٣}\pi$

(٤) $\theta^{ء} = \frac{-٢٣٥°}{١٨٠°}\pi = -\frac{٤٧}{٣٦}\pi$

(٥) $\theta^{ء} = -\frac{٢١٠°}{١٨٠°}\pi = -\frac{٧}{٦}\pi$

(٦) $\theta^{ء} = \frac{١١٢,٥°}{١٨٠°}\pi = \frac{٥}{٨}\pi$

(٧) $\theta^{ء} = \frac{٣٩٠°}{١٨٠°}\pi = \frac{١٣}{٦}\pi$

(٨) $\theta^{ء} = \frac{٧٨٠°}{١٨٠°}\pi = \frac{١٣}{٣}\pi$

٢

$\theta^{ء} = س° \times \frac{\pi}{١٨٠°}$

(١) $\theta^{ء} = ٥٨° \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ١,٠١٢^{ء}$

(٢) $\theta^{ء} = ٥٦,٦° \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٠,٩٨٨^{ء}$

(٣) $\theta^{ء} = ٣٧° ١٥' \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٠,٦٥٠^{ء}$

(٤) $\theta^{ء} = ١١٥° ٣٨' ٩'' \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٢,٠١٨^{ء}$

(٥) $\theta^{ء} = ٢٥٧° ٥٤'' \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٤,٤٨٦^{ء}$

(٦) $\theta^{ء} = ١٦٠° ٥٠' ٤٨'' \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٢,٨٠٧^{ء}$

٣

$س° = \theta^{ء} \times \frac{١٨٠°}{\pi}$

(١) $س° = \frac{١١}{١٥} \times ١٨٠° = ١٣٢°$

(٢) $س° = ٠,٧٢ \times ١٨٠° = ١٢٩° ٣٦'$

(٣) $س° = ٠,٤٩ \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ٢٨° ٤' ٣٠''$

(٤) $س° = -١,٦٧ \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq -(٩٥° ٤١' ٢'')$

(٥) $س° = ٢,٢٧ \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ١٣٠° ٣' ٤١''$

(٦) $س° = -٣\frac{١}{٢} \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq -(٢٠٠° ٣٢' ٧'')$

٤

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

(١) $\theta^{ء} = \frac{١٢}{١٠} = ١,٢^{ء}$

$\therefore س° = ١,٢ \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ٦٨° ٤٥' ١٨''$

(٢) $\theta^{ء} = \frac{١٤}{٧} = ٢^{ء}$

$\therefore س° = ٢ \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ١١٤° ٣٥' ٣٠''$

(٣) $\theta^{ء} = \frac{٢\pi}{٦} = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore س° = \frac{١}{٣} \times ١٨٠° = ٦٠°$

(٤) $\theta^{ء} = \frac{١٥,٧٢}{٩,١٧} = ١\frac{٥}{٧}^{ء}$

$\therefore س° \simeq ١\frac{٥}{٧} \times \frac{١٨٠°}{\pi} \simeq ٩٨° ١٣' ١٧''$

٥

$نق = \frac{ل}{\theta^{ء}}$

(١) $\theta^{ء} = \frac{٩}{٨}\pi \simeq ٣,٥٣٤^{ء}$

$\therefore نق = \frac{٢٢,٥}{٣,٥٣٤} \simeq ٦,٣٧$ سم

(٢) $نق = \frac{٣٨,٣٥}{٠,٧٦٧} = ٥٠$ سم

(٣) $\theta^{ء} = ١٣٩° \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٢,٤٢٦^{ء}$

$\therefore نق = \frac{٢٤,٣٢٥}{٢,٤٢٦} \simeq ١٠$ سم

(٤) $\theta^{ء} = ٧٨° ٣٦' ٢٦'' \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ١,٣٧^{ء}$

$\therefore نق = \frac{٤٣,٩٢}{١,٣٧} \simeq ٣٢$ سم

٦

(١) ل = $\theta^{\text{ء}}$ × نق = ١,٦ × ١٢,٥ = ٢٠ سم

(٢) ل = $\theta^{\text{ء}}$ × نق = ٢,٤٣ × ٢٠ = ٤٨,٦ سم

(٣) ل = $\theta^{\text{ء}}$ × نق = ٤٠َ ٦٧° × $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ × ٧,٥

≃ ٨,٩ سم

(٤) ل = $\theta^{\text{ء}}$ × نق = ٦ً ٥٨َ ١٠٤° × $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ × ١٥

≃ ٢٧,٥ سم

٧

∵ قياس الزاوية المحيطية = ٤٥°

∴ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس

= ٢ × ٤٥° = ٩٠°

∴ $\theta^{\text{ء}}$ = ٩٠° × $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ = $\frac{\pi}{٢}$

∴ نق = $\frac{\text{ل}}{\theta^{\text{ء}}}$ = ١٢ ÷ $\frac{\pi}{٢}$ = $\frac{٢٤}{\pi}$ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π × $\frac{٢٤}{\pi}$ = ٤٨ سم

٨

∵ ل = ٣ نق ∴ $\theta^{\text{ء}}$ = $\frac{\text{٣ نق}}{\text{نق}}$ = $٣^{\text{ء}}$

∴ س° = ٣ × $\frac{١٨٠^\circ}{\pi}$ ≃ ١٤ً ٥٣َ ١٧١°

٩

∵ $\theta^{\text{ء}}$ = ١٠٥° × $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ = $\frac{٧\pi}{١٢}$

∴ نق = $\frac{\text{ل}}{\theta^{\text{ء}}}$ = $\frac{٧}{٣}$ π ÷ $\frac{٧\pi}{١٢}$

= $\frac{٧}{٣}$ π × $\frac{١٢}{٧\pi}$ = ٤ سم

∴ طول القطر = ٨ سم

١٠

القياس الستينى للزاوية الأخرى = $\frac{١}{٤}$ × ١٨٠° = ٤٥°

∴ قياس الزاوية الثالثة = ١٨٠° − (٦٠° + ٤٥°) = ٧٥°

∴ القياس الدائرى لها = ٧٥° × $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ = $\frac{٥}{١٢}$ π

١١

$\frac{١١}{٦}^{\text{ء}}$ تكافئ $\frac{١١}{٦}$ × $\frac{١٨٠^\circ}{\frac{٢٢}{٧}}$ = ١٠٥°

، $٢\frac{٤}{٩}^{\text{ء}}$ تكافئ $\frac{٢٢}{٩}$ × $\frac{١٨٠^\circ}{\frac{٢٢}{٧}}$ = ١٤٠°

∴ القياس الستينى للزاوية الرابعة

= ٣٦٠° − (١٠٥° + ١٤٠° + ٤٥°) = ٧٠°

∴ القياس الدائرى لها = ٧٠° × $\frac{\frac{٢٢}{٧}}{١٨٠^\circ}$ = $\frac{١١}{٩}^{\text{ء}}$

١٢

بفرض أن قياسى الزاويتين هما :

س° ، ص° ، س° > ص°

∴ س° + ص° = ٧٠° (١)

، س° − ص° = $\frac{١}{٥}$ × ١٨٠° = ٣٦° (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٢ س = ١٠٦° ∴ س° = ٥٣°

∴ $\text{س}^{\text{ء}}$ = ٥٣° × $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ = $\frac{٥٣}{١٨٠}$ π

، ص° = ٧٠° − ٥٣° = ١٧°

∴ $\text{ص}^{\text{ء}}$ = ١٧° × $\frac{\pi}{١٨٠^\circ}$ = $\frac{١٧}{١٨٠}$ π

١٣

بفرض أن قياسى الزاويتين هما :

س ، ص ، س° > ص° ∴ $\text{س}^{\text{ء}}$ + $\text{ص}^{\text{ء}}$ = π

، $\text{س}^{\text{ء}}$ − $\text{ص}^{\text{ء}}$ = $\frac{\pi}{٣}$ ∴ ٢ $\text{س}^{\text{ء}}$ = $\frac{٤}{٣}$ π

∴ $\text{س}^{\text{ء}}$ = $\frac{٢}{٣}$ π ، $\text{ص}^{\text{ء}}$ = $\frac{١}{٣}$ π

، س° = $\frac{٢}{٣}$ × ١٨٠° = ١٢٠°

، ص° = $\frac{١}{٣}$ × ١٨٠° = ٦٠°

١٤

مساحة △ أ م ب = ½ × أ م × ب م

، ∵ أ م = ب م = نق ∴ ½ نق² = ٣٢

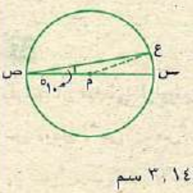
∴ نق² = ٦٤ ∴ نق = ٨ سم

∴ طول أب⌢ = ٩٠° × π/١٨٠° × ٨ ≃ ١٢,٥٧ سم

∴ محيط الشكل المظلل = ٨ + ٨ + ١٢,٥٧

= ٢٨,٥٧ سم

١٥



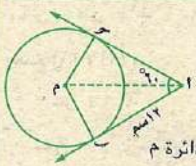
العمل : نرسم م ع

ق(∠ ع م س) = ٢٠°

∴ طول س ع⌢

= ٢٠° × π/١٨٠° × ٩ = ٣,١٤ سم

١٦



العمل : نرسم أ م

البرهان :

∵ أب ، أجـ مماسان للدائرة م

∴ م ب ⊥ أ ب ، م جـ ⊥ أ جـ

∴ ق(∠م) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٦٠°) = ١٢٠°

∴ ق(∠م) المنعكسة = ٣٦٠° − ١٢٠° = ٢٤٠°

، ∵ أم ينصف ∠أ ∴ ق(∠ب أ م) = ٣٠°

∴ م ب = ½ أ م

، ∵ م ب = نق ∴ أ م = ٢ نق

فى △ أ ب م القائم الزاوية فى ب

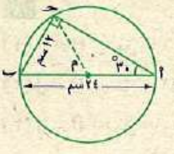
(٢ نق)² = نق² + (١٢)² ∴ ٣ نق² = ١٤٤

∴ نق² = ٤٨ ∴ نق = ٤√٣ سم

∴ طول ب جـ⌢ الأكبر = ٢٤٠° × π/١٨٠° × ٤√٣

≃ ٢٩ سم

١٧



العمل : نرسم م جـ

∵ ∠جـ قائمة

∴ أب قطر

∴ نق = ٢٤/٢ = ١٢ سم

، ∵ ∠جـ قائمة ، ب جـ = ½ أ ب

∴ ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠ب) = ٦٠°

نرسم م جـ حيث م مركز الدائرة منتصف أ ب

∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠أ) = ٦٠°

، ق(∠أ م جـ) = ٢ ق(∠ب) = ١٢٠°

∴ ب جـ⌢ يقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠°

∴ طول ب جـ⌢ = ٦٠° × π/١٨٠° × ١٢ ≃ ١٢,٦ سم

، ∵ أ جـ⌢ يقابل زاوية مركزية قياسها ١٢٠°

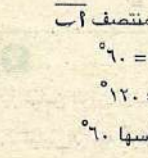
∴ طول أ جـ⌢ = ١٢٠° × π/١٨٠° × ١٢ ≃ ٢٥,١ سم

، ∵ أ ب⌢ يقابل زاوية مركزية قياسها ١٨٠°

∴ طول أ ب⌢ (وهو نصف محيط الدائرة)

= ١٨٠° × π/١٨٠° × ١٢ ≃ ٣٧,٧ سم

١٨



ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠أ)

= ١٢٠°

∴ طول ب جـ⌢ الأصغر

= ١٢٠° × π/١٨٠° × ٧,٥ ≃ ١٥,٧ سم

، ق(∠أ م جـ) = ٢ ق(∠ب) = ١٠٨°

∴ طول أ جـ⌢ الأصغر = ١٠٨° × π/١٨٠° × ٧,٥

≃ ١٤,١ سم

، ق(∠أ م ب) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ١٠٨°) = ١٣٢°

∴ طول أ ب⌢ الأصغر = ١٣٢° × π/١٨٠° × ٧,٥

≃ ١٧,٣ سم

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ (١) (ب) (٢) (د) (٣) (ب)

(٤) (جـ) (٥) (ب) (٦) (جـ)

(٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (ب)

إرشادات لحل رقم ١

(١) طول القوس = $\theta^{د}$ نق = $\frac{٧٢^\circ}{١٨٠^\circ} \times \pi \times ١٤$

$= \frac{٢٨}{٥} \pi$ سم

∴ محيط الدائرة = $\frac{٢٨}{٥} \pi$

∴ ٢ π نقَ = $\frac{٢٨}{٥} \pi$

∴ نقَ = $\frac{١٤}{٥}$ = ٢,٨ سم

(٢) ∵ ٥ < طول القوس $\overset{\frown}{أ ب}$ < ٦

∴ ٥ < $\frac{س}{١٨٠^\circ} \times \pi \times ١٠$ < ٦

∴ ٥ < $\frac{\pi}{١٨}$ س < ٦

∴ $٢٨,٦^\circ$ < س < $٣٤,٤^\circ$

(٣) ∵ النسبة بين قياسات زوايا الشكل الرباعى

= ٥ : ٤ : ٩ : ٦

∴ ٥ س + ٤ س + ٩ س + ٦ س = ٣٦٠°

∴ ٢٤ س = ٣٦٠° ∴ س = ١٥°

∴ قياس أصغر زوايا الشكل الرباعى = ٤ × ١٥°

= ٦٠°

، بالقياس الدائرى = $٦٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} = \frac{\pi}{٣}$

(٤) عدد الساعات بين عقرب الدقائق وعقرب الساعات عند الثانية والنصف تمامًا = ٣,٥ ساعة.

∴ الزاوية بين عقرب الدقائق وعقرب الساعات

$= \frac{٣,٥}{١٢} \times ٢ \pi = \frac{٧}{١٢} \pi$

(٥) القياس الدائرى للزاوية ٦٠° = $٦٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} = \frac{\pi}{٣}$

بفرض أن نصف قطر دائرته $نق_١$

∴ طول القوس = $نق_١ \times \frac{\pi}{٣}$

، القياس الدائرى للزاوية ٨٠° = $٨٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

$= \frac{٤}{٩} \pi$

بفرض أن نصف قطر دائرته $نق_٢$

∴ طول القوس = $نق_٢ \times \frac{٤}{٩} \pi$

∴ $نق_١ \times \frac{\pi}{٣} = نق_٢ \times \frac{٤}{٩} \pi$ ∴ $\frac{نق_١}{نق_٢} = \frac{٤}{٣}$

(٦) (قياس الدائرة)^{د} = ٢ π ≃ ٦,٢٨

، ∵ ٦,٢٨ > ن حيث ن أكبر عدد صحيح ممكن

∴ ن = ٦

(٧) عدد الدورات الى يقطعها عقرب الدقائق من السادسة صباحًا حتى الثالثة والربع عصرًا = ٩ $\frac{١}{٤}$ دورة.

∴ المسافة التى يقطعها رأس عقرب الدقائق

= ٩ $\frac{١}{٤}$ × ٢ π × ٨ = ١٤٨ π سم

(٨) عند دوران الترس الأصغر لفة واحدة عكس عقرب الساعات يدور الترس الأكبر $\frac{١}{٣}$ دورة فى اتجاه عقرب الساعات.

∴ الزاوية المركزية لدوران الترس الأكبر

$= - \frac{١}{٣} \times ٢ \pi = \frac{-٢ \pi}{٣}$

(٩) ∵ أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم.

∴ ق (∠ أ م ب) = $\frac{٢ \pi}{٦} = \frac{\pi}{٣}$

∵ Δ أ م ب مثلث متساوى الأضلاع

∴ نق = ٤ سم

∴ طول ($\overset{\frown}{أ ب}$) = $\frac{\pi}{٣} \times ٤ = \frac{٤ \pi}{٣}$ سم

٢

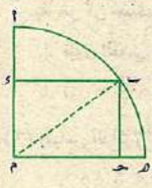
القياس الستينى للزاوية التى يصنعها المستقيم مع محور السينات = $\frac{١٨٠^\circ}{٣}$ = ٦٠°

∴ ميل المستقيم = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

∴ معادلة المستقيم هى : ص = $\sqrt{٣}$ س + جـ

∵ الزاوية فى وضعها القياسى

∴ جـ = ٠ ∴ ص = $\sqrt{٣}$ س



٣

العمل : نرسم $\overline{\text{ب م}}$

البرهان :

∵ ب م = جـ ء

(قطران فى المستطيل)

∴ ب م = ١٠ سم ∴ نق = ١٠ سم

، ∵ قياس الزاوية المركزية = $\frac{\pi}{٢}$

∴ ل (طول القوس $\widehat{\text{أ ب هـ}}$) = $\theta^{ء}$ × نق

= $\frac{\pi}{٢}$ × ١٠ = ٥ π سم

إرشادات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (ب) (٥) (د)

(٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (أ) (٩) (د) (١٠) (جـ)

(١١) (أ) (١٢) (د) (١٣) (جـ) (١٤) (د) (١٥) (جـ)

(١٦) (أ) (١٧) (جـ) (١٨) (د) (١٩) (جـ) (٢٠) (د)

(٢١) (جـ) (٢٢) (د) (٢٣) (جـ) (٢٤) (د) (٢٥) (ب)

(٢٦) (د) (٢٧) (أ) (٢٨) (أ) (٢٩) (ب) (٣٠) (أ)

(٣١) (د) (٣٢) (د) (٣٣) (د) (٣٤) (جـ) (٣٥) (جـ)

(٣٦) (د) (٣٧) (جـ) (٣٨) (ب) (٣٩) (د) (٤٠) (أ)

(٤١) (أ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ ٢٧٠° < ٣٥٠° < ٣٦٠°

∴ ٣٥٠° تقع فى الربع الرابع

∴ جا ٣٥٠° موجبة

(٢) ∵ ١٨٠° < ٢٦٥° < ٢٧٠°

∴ ٢٦٥° تقع فى الربع الثالث

∴ قا ٢٦٥° سالبة

(٣) ∵ $\frac{٥\pi}{٤} = \frac{٥ \times ١٨٠°}{٤}$ = ٢٢٥°

وهى تقع فى الربع الثالث

∴ جا $\frac{٥\pi}{٤}$ سالبة

(٤) ∵ $\frac{٣\pi}{٧} = \frac{٣ \times ١٨٠°}{٧} = ٧٧\frac{١}{٧}°$

وهى تقع فى الربع الأول

∴ قتا $\frac{٣\pi}{٧}$ موجبة

(٥) ∵ ظا ٤١٠° = ظا (٥٠° + ٣٦٠°) = ظا ٥٠°

، ∵ ٥٠° تقع فى الربع الأول

∴ ظا ٤١٠° موجبة

(٦) ∵ جتا −١٦٥° = جتا (−١٦٥° + ٣٦٠°) = جتا ١٩٥°

، ∵ ١٩٥° تقع فى الربع الثالث

∴ جتا (−١٦٥°) سالبة

(٧) ∵ $\frac{٣٢\pi}{٣} = \frac{٣٢ \times ١٨٠°}{٣}$ = ١٩٢٠°

= (١٢٠° + ٥ × ٣٦٠°)

∴ ظتا $\frac{٣٢\pi}{٣}$ = ظتا ١٢٠°

، ∵ ١٢٠° تقع فى الربع الثانى

∴ ظتا $\frac{٣٢\pi}{٣}$ سالبة

(٨) ∵ $-\frac{٢٥\pi}{٦} = -\frac{٢٥ \times ١٨٠°}{٦}$ = −٧٥٠°

= (−٧٥٠° + ٣ × ٣٦٠°) = ٣٣٠°

∴ قا $\left(\frac{-٢٥\pi}{٦}\right)$ = قا ٣٣٠°

، ∵ ٣٣٠° تقع فى الربع الرابع

∴ قا $\left(-\frac{٢٥\pi}{٦}\right)$ موجبة

٢

(١) ∵ س = $\frac{٢}{٣}$ ، ص = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

∴ جا θ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، جتا θ = $\frac{٢}{٣}$

، طا θ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ، ظتا θ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

، قتا θ = $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ ، قا θ = $\frac{٣}{٢}$

(٢) ∵ س = −$\frac{٣}{٥}$ ، ص = −$\frac{٤}{٥}$

∴ جا θ = −$\frac{٤}{٥}$ ، جتا θ = −$\frac{٣}{٥}$

، طا θ = $\frac{٤}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

، قتا θ = −$\frac{٥}{٤}$ ، قا θ = −$\frac{٥}{٣}$

(٣) ∵ س = ٠ ، ص = −١

∴ جا θ = −١ ، جتا θ = ٠

، طا θ غير معرفة ، ظتا θ = ٠

، قتا θ = −١ ، قا θ غير معرفة.

٣

(١) ∵ س^٢ + ص^٢ = ١ ∴ (٠,٦)^٢ + ص^٢ = ١

∴ ص^٢ = ٠,٦٤ ∴ ص = ٠,٨ حيث ص > ٠

∴ ب(٠,٦ ، ٠,٨)

∴ جتا θ = ٠,٦ ، جا θ = ٠,٨ ، طا θ = $\frac{٤}{٣}$

، قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٤}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

(٢) ∵ س^٢ + ص^٢ = ١

∴ س^٢ + (−٠,٦)^٢ = ١ ∴ س^٢ = ٠,٦٤

∴ س = ٠,٨ ، حيث س > ٠

∴ ب(٠,٨ ، −٠,٦)

∴ جتا θ = ٠,٨ ، جا θ = −٠,٦ ، طا θ = −$\frac{٣}{٤}$

، قا θ = $\frac{٥}{٤}$ ، قتا θ = $\frac{٥-}{٣}$ ، ظتا θ = $\frac{٤-}{٣}$

(٣) ∵ س^٢ + ص^٢ = ١ ∴ $\frac{٣}{٤}$ + ص^٢ = ١

∴ ص^٢ = $\frac{١}{٤}$

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠°

∴ ب(−$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

∴ جتا θ = −$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جا θ = $\frac{١}{٢}$

، طا θ = −$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، قا θ = −$\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

، قتا θ = ٢ ، ظتا θ = −$\sqrt{٣}$

(٤) ∵ س^٢ + ص^٢ = ١ ∴ س^٢ + $\frac{٥}{٩}$ = ١

∴ س^٢ = $\frac{٤}{٩}$

∴ س = −$\frac{٢}{٣}$ حيث س < ٠

∴ ب(−$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$)

∴ جتا θ = −$\frac{٢}{٣}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

، طا θ = −$\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ، قا θ = −$\frac{٣}{٢}$

، قتا θ = $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ ، ظتا θ = −$\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(٥) ∵ س^٢ + ص^٢ = ١ ∴ ١ + ص^٢ = ١

∴ ص^٢ = ٠ ∴ ص = ٠

∴ ب(−١ ، ٠)

∴ جتا θ = −١ ، جا θ = ٠ ، طا θ = ٠

، قا θ = −١ ، قتا θ غير معرفة

، ظتا θ غير معرفة

(٦) ∵ س^٢ + ص^٢ = ١

∴ (−س)^٢ + س^٢ = ١ ∴ ٢س^٢ = ١

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ حيث س > ٠

∴ ب(−$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

∴ جتا θ = −$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، طا θ = −١

، قا θ = −$\sqrt{٢}$ ، قتا θ = $\sqrt{٢}$ ، ظتا θ = −١

(٧) ∵ $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

∴ $س^{٢} + س^{٢} = ١$ ∴ $س^{٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ حيث س < ٠

∴ ب$\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، -\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

∴ جتا θ = جا θ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا θ = ظتا θ = ١

، قا θ = قتا θ = $-\sqrt{٢}$

(٨) ∵ θ فى الربع الثالث

∴ كل من ٩أ ، ١٢أ سالبة ∴ أ < ٠

، ∵ $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

∴ $٨١أ^{٢} + ١٤٤أ^{٢} = ١$ ∴ $٢٢٥أ^{٢} = ١$

∴ $أ^{٢} = \frac{١}{٢٢٥}$ ∴ $أ = -\frac{١}{١٥}$

∴ ب$\left(-\frac{٩}{١٥} ، -\frac{١٢}{١٥}\right) = \left(-\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{٣}{٥}$ ، جا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

، قا θ = $-\frac{٥}{٣}$ ، قتا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

(٩) ∵ θ فى الربع الرابع

∴ $\frac{٣}{٢}أ > ٠$ ، $-٢أ < ٠$ ∴ أ > ٠

، ∵ $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ ∴ $\frac{٩}{٤}أ^{٢} + ٤أ^{٢} = ١$

∴ $\frac{٢٥}{٤}أ^{٢} = ١$ ∴ $أ^{٢} = \frac{٤}{٢٥}$

∴ $أ = \frac{٢}{٥}$ ∴ ب$\left(\frac{٣}{٥} ، -\frac{٤}{٥}\right)$

∴ جتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، جا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، ظا θ = $-\frac{٤}{٣}$

، قا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، قتا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، ظتا θ = $-\frac{٣}{٤}$

٤

(١) ظا ٠° + ظا ٤٥° + ظا ١٨٠° = ٠ + ١ + ٠ = ١

(٢) جا ١٨٠° جتا ٤٥° − جتا ١٨٠° جا ٤٥°

$= ٠ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - (-١) \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٣) قا $\frac{\pi}{٦}$ ظا $\frac{\pi}{٣}$ − ظتا $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٦}$

= قا ٣٠° ظا ٦٠° − ظتا ٦٠° جتا ٣٠°

$= \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \sqrt{٣} - \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٢ - \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

(٤) $\frac{٤ \text{ جا}^{٢} ٣٠° - ٣ \text{ ظا } ٤٥° \text{ جتا } ٠°}{٢ \text{ جتا } ٦٠° + ٢ \text{ جا } ٤٥° \text{ جتا } ٤٥°}$

$= \frac{٤ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} - ٣ \times ١ \times ١}{٢ \times \frac{١}{٢} + ٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}} = \frac{١ - ٣}{١ + ١} = -١$

(٥) ٣ جا ٣٠° جا² ٦٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا² ٤٥°

$= ٣ \times \frac{١}{٢} \times \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} - ١ \times ٢ + (-١) \times \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$

$= -\frac{١١}{٨}$

٥

(١) الطرف الأيمن = $٢ \times (١)^{٢} = ٢$

، الطرف الأيسر = $-٢ \times (-١) = ٢$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٢) الطرف الأيمن = $٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} - ٢ \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢}$

$= \frac{٩}{٢} - ٤ = \frac{١}{٢}$ = الطرف الأيسر.

(٣) الطرف الأيمن = $٣ (١)^{٢} - ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= ٣ - \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$

، الطرف الأيسر = $\frac{٣}{٢} \times ١ = \frac{٣}{٢}$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٤) الطرف الأيمن = $\frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \sqrt{٣} + \left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right)^{٢} - (١)^{٢}$

$= ٢ + \frac{٤}{٣} - ١ = \frac{٧}{٣}$

= الطرف الأيسر.

(٥) الطرف الأيمن = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

، الطرف الأيسر = جا² ٤٥° = $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} = \frac{١}{٢}$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

(٦) الطرف الأيمن = ٢ جتا^{٢} ٦٠° + ٣ جا^{٢} ٤٥°

+ ٤ ظا^{٢} ٦٠° − ٤ جا ٩٠°

$= ٢ \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + ٣ \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$

$+ ٤ \left(\sqrt{٣}\right)^{٢} - ٤ \times ١$

$= \frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + ١٢ - ٤ = ١٠$

= الطرف الأيسر.

(٧) الطرف الأيمن = $\dfrac{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}$

$= \dfrac{\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}}} = ١$

= جا ٩٠° = الطرف الأيسر.

٦

(١) ∵ س جا^{٢} ٤٥° جتا ١٨٠° = ظا^{٢} ٦٠° جا ٢٧٠°

∴ س × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢}$ × (−١) = $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ × (−١)

∴ $-\frac{١}{٢}$ س = −٣ ∴ س = ٦

(٢) ∵ س جا ٤٥° جتا ٤٥° ظا ٣٠° = ظا^{٢} ٤٥° − جتا^{٢} ٦٠°

∴ س × $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \sqrt{٣} = (١)^{٢} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٧

(١) ∵ جتا س = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} \div ١\right)$ − صفر

∴ جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ س = ٣٠°

(٢) ∵ جا س = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا س = $\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$

∴ س = ٩٠°

٨

(١) س = جتا θ

حيث س < ٠

، ص = جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ س^{٢} + $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ = ١

∴ س^{٢} = $\frac{٢٥}{١٦٩}$ ∴ س = $-\frac{٥}{١٣}$

∴ ب $\left(-\frac{٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{٥}{١٣}$ ، جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، ظا θ = $-\frac{١٢}{٥}$

، قا θ = $-\frac{١٣}{٥}$ ، قتا θ = $\frac{١٣}{١٢}$ ، ظتا θ = $-\frac{٥}{١٢}$

(٢) س = جتا θ حيث س < ٠

، ص = جا θ حيث ص > ٠

ظا θ = $\frac{ص}{س} = -\frac{٣}{٤}$

∴ ص = $-\frac{٣}{٤}$ س

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١

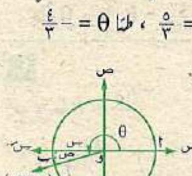
∴ س^{٢} + $\frac{٩}{١٦}$ س^{٢} = ١ ∴ $\frac{٢٥}{١٦}$ س^{٢} = ١

∴ س^{٢} = $\frac{١٦}{٢٥}$ ∴ س = $-\frac{٤}{٥}$

∴ ص = $-\frac{٣}{٤} \times -\frac{٤}{٥} = \frac{٣}{٥}$ ∴ ب $\left(-\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{٤}{٥}$ ، جا θ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا θ = $-\frac{٣}{٤}$

، قا θ = $-\frac{٥}{٤}$ ، قتا θ = $\frac{٥}{٣}$ ، ظتا θ = $-\frac{٤}{٣}$



(٣) قتا θ = $\frac{١}{ص} = -\frac{٢٥}{٧}$

∴ ص = $-\frac{٧}{٢٥}$

، س < ٠

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ س^{٢} + $\frac{٤٩}{٦٢٥}$ = ١

∴ س^{٢} = $\frac{٥٧٦}{٦٢٥}$ ∴ س = $-\frac{٢٤}{٢٥}$

∴ ب $\left(-\frac{٢٤}{٢٥} ، -\frac{٧}{٢٥}\right)$

∴ جتا θ = $-\frac{٢٤}{٢٥}$ ، جا θ = $-\frac{٧}{٢٥}$ ، ظا θ = $\frac{٧}{٢٤}$

، قا θ = $-\frac{٢٥}{٢٤}$ ، قتا θ = $-\frac{٢٥}{٧}$ ، ظتا θ = $\frac{٢٤}{٧}$

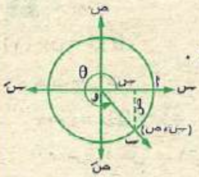
(٤) قا θ = $\frac{١}{س}$ = ٢

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ، ص < ٠

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ $\frac{١}{٤}$ + ص^{٢} = ١

∴ ص^{٢} = $\frac{٣}{٤}$



∴ ص = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ب $\left(\frac{١}{٢} ، -\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

∴ جتا θ = $\frac{١}{٢}$ ، جا θ = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ظا θ = − $\sqrt{٣}$ ، قا θ = ٢ ، قتا θ = − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

، ظتا θ = − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٩

∵ ٠ < θ < $\frac{\pi}{٢}$ ∴ كل من ٢ أ ، ٣ أ موجبة

أى أن : أ > ٠

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١ ∴ (٢ أ)^{٢} + (٣ أ)^{٢} = ١

∴ ١٣ أ^{٢} = ١ ∴ أ = $\frac{١}{\sqrt{١٣}}$

∴ النقطة هى $\left(\frac{٢}{\sqrt{١٣}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٣}}\right)$

∴ قا θ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$ ، ظا θ = $\frac{٣}{٢}$

∴ قا^{٢} θ − ظا^{٢} θ = $\frac{١٣}{٤}$ − $\frac{٩}{٤}$ = ١

١٠

ص = جا θ = $\frac{-٢٤}{٢٥}$

، س = جتا θ ، س > ٠

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١

∴ س^{٢} + $\frac{٥٧٦}{٦٢٥}$ = ١ ∴ س^{٢} = $\frac{٤٩}{٦٢٥}$

∴ س = جتا θ = $\frac{٧}{٢٥}$ ∴ ب $\left(\frac{٧}{٢٥} ، \frac{-٢٤}{٢٥}\right)$

(١) $\frac{\text{ظتا } \theta - \text{قتا } \theta}{\text{ظا } \theta - \text{قا } \theta}$ = $\frac{-\frac{٧}{٢٤} - \left(-\frac{٢٥}{٢٤}\right)}{-\frac{٢٤}{٧} - \frac{٢٥}{٧}}$ = $\frac{-٣}{٢٨}$

(٢) جتا θ − قتا θ ظا θ = $\frac{٧}{٢٥}$ − $\left(-\frac{٢٥}{٢٤}\right)$ × $\frac{-٢٤}{٧}$ = $\frac{-٥٧٦}{١٧٥}$

١١

إجابة أحمد هى الصحيحة لأنه قام بالتعويض مباشرة.

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د)   (٢) (جـ)   (٣) (جـ)

(٤) (ب)   (٥) (ب)   (٦) (جـ)

(٧) أولًا : (د)   ثانيًا : (ب)   ثالثًا : (ب)

(٨) (د)   (٩) (أ)   (١٠) (ب)

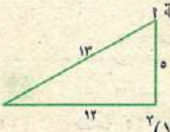
إرشادات الحل :

(١) ∵ طول (بحـ⌢) = $\frac{١}{٢}$ π

∴ ق (بحـ⌢) = $\frac{\frac{١}{٢}\pi}{٢\pi}$ × ٣٦٠° = ٦٠°

∴ قا (∠ب و حـ) = $\frac{١}{\text{جتا } ٦٠^\circ}$ = $\frac{١}{\left(\frac{١}{٢}\right)}$ = ٢

(٢) ∵ أ هى أكبر قياس لزاوية حادة فى مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣



، ∵ (١٣)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢}

∴ المثلث قائم الزاوية ∴ ظا أ = $\frac{٥}{١٢}$

(٣) ∵ (س + ١) هو أكبر ضلع.

∴ (س + ١) هو وتر المثلث القائم.

∴ (س + ١)^{٢} = (س)^{٢} + (س − ٧)^{٢}

∴ س^{٢} + ٢ س + ١ = س^{٢} + س^{٢} − ١٤ س + ٤٩

∴ س^{٢} − ١٦ س + ٤٨ = ٠

∴ (س − ١٢) (س − ٤) = ٠

∴ س = ١٢ أ، س = ٤

(مرفوض لأن س − ٧ = −٣)

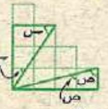
∴ أطوال الأضلاع هى ٥ ، ١٢ ، ١٣

، ∵ $\overline{\text{بحـ}}$ هو أصغر ضلع

∴ بحـ = ٥ سم

∴ قا أ = $\frac{١}{\text{جتا أ}}$ = $\frac{١}{\left(\frac{١٢}{١٣}\right)}$ = $\frac{١٣}{١٢}$

(٤) ظتا س + ظتا ص + ظتا ع = $\frac{١}{١} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١١}{٦}$



(٥) ظا س = $\frac{٣}{٢}$

، ظتا ص = $\frac{١}{٤}$

∴ ظا س + ظتا ص = $\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٤} = \frac{٧}{٤}$

(٦) أو = $\sqrt{(١)^٢ + (\sqrt{٣})^٢} = ٢$

، وب = $\sqrt{(-١)^٢ + (\sqrt{٣})^٢} = ٢$

، أب = $\sqrt{(١ + ١)^٢ + (\sqrt{٣} - \sqrt{٣})^٢} = ٢$

∴ Δ أوب هو مثلث متساوى الأضلاع

∴ ظتا (∠ أوب) = $\frac{١}{ظا ٦٠°} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٧) أولًا : ∵ الدائرة هى دائرة وحدة

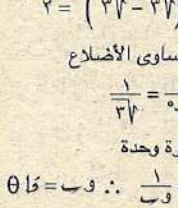
∴ أو = ١ ∴ حتا θ = $\frac{١}{وب}$ ∴ وب = قا θ

ثانيًا : ب حـ = ب و − و حـ = قا θ − ١

ثالثًا : مساحة المثلث أب و = $\frac{١}{٢}$ أو × أب

= $\frac{١}{٢}$ × ١ × ظا θ = $\frac{١}{٢}$ ظا θ

(٨) ظتا θ = $\frac{٥ + ٣}{٥ + ٢} = \frac{٨}{٧}$



(٩) نرسم أحـ ، أحـ ∩ ب د = {م}

، ∵ $\frac{د هـ}{هـ ب} = \frac{٢}{٥}$

∴ د هـ = ٢ س

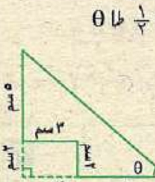
، هـ ب = ٥ س

∴ ب د = ٧ س

، ∵ أب حـ د مربع

∴ أحـ = ب د = ٧ س

، حـ م = ٣,٥ س ، م هـ = ١,٥ س



فى Δ حـ م هـ القائم فى م : ظا θ = $\frac{٣,٥ س}{١,٥ س} = \frac{٧}{٣}$

(١٠) ∵ ∠ أ د ب خارجة عن المثلث أ د حـ

∴ ق (∠ د أ حـ) + ق (∠ د حـ أ) = θ

، ∵ د أ = د حـ ∴ ق (∠ حـ) = $\frac{θ}{٢}$

فى Δ أ ب د : ق (∠ ب) = ٩٠° ، ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

∴ أب = ٤ س ، ب د = ٣ س

∴ أد = $\sqrt{(٤ س)^٢ + (٣ س)^٢}$ = ٥ س

∴ د أ = د حـ = ٥ س

فى Δ أ ب حـ : ظتا $\frac{θ}{٢} = \frac{٣ س + ٥ س}{٤ س} = ٢$

ارشادات تمارين 10

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (ب) (٥) (ب)
(٦) (ب) (٧) (ب) (٨) (جـ) (٩) (ب) (١٠) (د)
(١١) (د) (١٢) (أ) (١٣) (أ) (١٤) (جـ) (١٥) (أ)
(١٦) (جـ) (١٧) (د) (١٨) (ب) (١٩) (ب) (٢٠) (جـ)
(٢١) (جـ) (٢٢) (جـ) (٢٣) (أ) (٢٤) (جـ) (٢٥) (جـ)
(٢٦) (جـ) (٢٧) (د) (٢٨) (د) (٢٩) (د) (٣٠) (د)
(٣١) (د) (٣٢) (د) (٣٣) (أ) (٣٤) (أ) (٣٥) (أ)
(٣٦) (أ) (٣٧) (أ) (٣٨) (جـ) (٣٩) (ب) (٤٠) (جـ)
(٤١) (جـ) (٤٢) (ب) (٤٣) (د) (٤٤) (أ) (٤٥) (جـ)
(٤٦) (د) (٤٧) (جـ) (٤٨) (ب) (٤٩) (د) (٥٠) (ب)
(٥١) (جـ) (٥٢) (د) (٥٣) (أ) (٥٤) (د) (٥٥) (جـ)
(٥٦) (جـ) (٥٧) (ب) (٥٨) (ب) (٥٩) (ب) (٦٠) (د)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(٢) قا ٢١٠° = قا (١٨٠° + ٣٠°) = − قا ٣٠° = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

(٣) ظا ٢٤٠° = ظا (١٨٠° + ٦٠°) = ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

(٤) جتا (−١٥٠°) = جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° − ٣٠°)

= − جتا ٣٠° = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥) ظا ٢٢٥° = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = ظا ٤٥° = ١

(٦) قتا $\frac{١١\pi}{٦}$ = قتا $\left(\frac{١٢\pi}{٦} - \frac{\pi}{٦}\right)$

= − قتا $\frac{\pi}{٦}$ = −٢

(٧) ظتا ٧٨٠° = ظتا (٧٢٠° + ٦٠°) = ظتا ٦٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٨) جتا (−٩٠٠°) = جتا (−٩٠٠° + ٣ × ٣٦٠°)

= جتا ١٨٠° = −١

(٩) جا $\left(\frac{-٤\pi}{٣}\right)$ = − جا $\left(\frac{٤\pi}{٣}\right)$ = − جا $\left(\pi + \frac{\pi}{٣}\right)$

= جا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(١٠) قا $\left(\frac{-٢\pi}{٣}\right)$ = قا $\left(\frac{-٢}{٣} \times ١٨٠°\right)$

= قا (−١٢٠°) = قا ١٢٠°

= قا (١٨٠° − ٦٠°) = − قا ٦٠°

= −٢

(١١) قا (−٤٨٠°) = قا ٤٨٠° = قا (٣٦٠° + ١٢٠°)

= قا ١٢٠° = قا (١٨٠° − ٦٠°)

= − قا ٦٠° = −٢

(١٢) جا $\left(\frac{-٧\pi}{٤}\right)$ = جا $\left(\frac{-٧ \times ١٨٠°}{٤}\right)$ = جا −٣١٥°

= جا (−٣١٥° + ٣٦٠°)

= جا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٢

(١) جتا ١٢٠° + ظا ٢٢٥° + قتا ٣٣٠° + جتا ٤٢٠°

= جتا (١٨٠° − ٦٠°) + ظا (١٨٠° + ٤٥°)

+ قتا (٣٦٠° − ٣٠°) + جتا (٣٦٠° + ٦٠°)

= − جتا ٦٠° + ظا ٤٥° − قتا ٣٠° + جتا ٦٠°

= $-\frac{١}{٢}$ + ١ − ٢ + $\frac{١}{٢}$ = −١

(٢) ∵ جتا ٩٣٠° = جتا (٢ × ٣٦٠° + ٢١٠°) = جتا ٢١٠°

= جتا (١٨٠° + ٣٠°) = − جتا ٣٠°

∴ جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠°) − جتا ٣٠° ظتا ٢٤٠°

= جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (٣٦٠° − ٦٠°)

− جتا ٣٠° ظتا (١٨٠° + ٦٠°)

= جا ٣٠° جتا ٦٠° − جتا ٣٠° ظتا ٦٠°

= $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -\frac{١}{٤}$

(٣) ظا $\frac{٢\pi}{٣}$ قا $\frac{١١\pi}{٣}$ + ظتا $\frac{١١\pi}{٦}$ قتا $\frac{١٩\pi}{٦}$

+ ظا $\frac{٢٥\pi}{٦}$ قتا $\left(\frac{-١٩\pi}{٣}\right)$

= ظا $\left(\pi - \frac{\pi}{٣}\right)$ قا $\left(\frac{١٢\pi}{٣} - \frac{\pi}{٣}\right)$

+ ظتا $\left(\frac{١٢\pi}{٦} - \frac{\pi}{٦}\right)$ قتا $\left(\frac{١٢\pi}{٦} + \frac{٧\pi}{٦}\right)$

+ ظا $\left(\frac{٢٤\pi}{٦} + \frac{\pi}{٦}\right)$ قتا $\left(\frac{-١٨\pi}{٣} - \frac{\pi}{٣}\right)$

= − ظا $\frac{\pi}{٣}$ قا $\frac{\pi}{٣}$ − ظتا $\left(\frac{\pi}{٦}\right)$ قتا $\left(\pi + \frac{١}{٦}\pi\right)$

− ظا $\frac{\pi}{٦}$ قتا $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

= − ظا $\frac{\pi}{٣}$ قا $\frac{\pi}{٣}$ + ظتا $\frac{\pi}{٦}$ قتا $\frac{\pi}{٦}$ − ظا $\frac{\pi}{٦}$ قتا $\frac{\pi}{٣}$

= $-\sqrt{٣} \times ٢ + \sqrt{٣} \times ٢ - \frac{١}{\sqrt{٣}} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = -\frac{٢}{٣}$

٣

(١) جتا (−٣٠٠°) = جتا ٣٠٠° = جتا (٣٦٠° − ٦٠°)

= جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

، جا ٤٢٠° = جا (٦٠° + ٣٦٠°) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، جتا ٧٥٠° = جتا (٣٠° + ٣٦٠° × ٢) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، جتا ٦٦٠° = جتا (٣٠٠° + ٣٦٠°) = جتا ٣٠٠°

= جتا (٣٦٠° − ٦٠°) = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{٢}$

= صفر = الطرف الأيسر.

(٢) جا ٦٠٠° = جا (٣٦٠° + ٢٤٠°) = جا ٢٤٠°

= جا (١٨٠° + ٦٠°) = − جا ٦٠°

$= -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، جتا (−٣٠°) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

، جتا (−٢٤٠°) = جتا ٢٤٠° = جتا (١٨٠° + ٦٠°)

= − جتا ٦٠° = $-\frac{١}{٢}$

∴ الطرف الأيمن = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times \left(-\frac{١}{٢}\right)$

= −١ = الطرف الأيسر.

(٣) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° − ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

، ظا ٢٢٥° = ظا (١٨٠° + ٤٥°) = ظا ٤٥° = ١

، جتا ٣١٥° = جتا (٣٦٠° − ٤٥°) = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

، قا (−١٢٠°) = قا ١٢٠° = قا (١٨٠° − ٦٠°)

= − قا ٦٠° = −٢

، جا (−١٣٥°) = − جا ١٣٥° = − جا (١٨٠° − ٤٥°)

= − جا ٤٥° = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

، قتا ٢١٠° = قتا (١٨٠° + ٣٠°) = − قتا ٣٠° = −٢

∴ الطرف الأيمن

$= \frac{١}{٢} \times ١ + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times (-٢) + \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right) \times (-٢)$

$= \frac{١}{٢} - \frac{٢}{\sqrt{٢}} + \frac{٢}{\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$ = الطرف الأيسر.

٤

جا θ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا θ = $\frac{-٣}{٥}$

(١) جا (١٨٠° + θ) = − جا θ = $\frac{-٤}{٥}$

(٢) جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - θ\right)$ = جتا (٩٠° − θ) = جا θ = $\frac{٤}{٥}$

(٣) ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ = $-\frac{\frac{٤}{٥}}{\frac{-٣}{٥}} = \frac{٤}{٣}$

(٤) قتا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - θ\right)$ = قتا (٢٧٠° − θ) = − قا θ = $\frac{٥}{٣}$

(٥) قا (θ + π) = قا (θ + ١٨٠°) = − قا θ = $\frac{٥}{٣}$

(٦) جا (θ − π) = جا (θ − ١٨٠°) = جا (١٨٠° + θ)

= − جا θ = $\frac{-٤}{٥}$

٥

جا θ = $\frac{٢}{٣}$ ، جتا θ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

(١) جا (٢٧٠° + θ) = − جتا θ = $-\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

(٢) قا (٢٧٠° + θ) = قتا θ = $\frac{٣}{٢}$

(٣) قتا $\left(θ + \frac{\pi}{٢}\right)$ = قتا (θ + ٩٠°) = قا θ = $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$

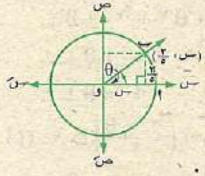
(٤) ظا $\left(\frac{\pi}{٢} - θ\right)$ = ظا (٩٠° − θ) = ظتا θ

$= \frac{\frac{\sqrt{٥}}{٣}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

(٥) ظتا (θ − ١٨٠°) = ظتا θ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$

(٦) قا (− θ) = قا θ = $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$

٦



∵ س² + ص² = ١

∴ س² + $\frac{٩}{٢٥}$ = ١

∴ س² = $\frac{١٦}{٢٥}$

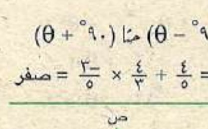
∴ س = $\frac{٤}{٥}$ حيث س > ٠

∴ ب $\left(\frac{٤}{٥} ، \frac{٣}{٥}\right)$

∴ جا (٩٠° − θ) + ظا (٩٠° − θ) جتا (٩٠° + θ)

= جتا θ + ظتا θ (− جا θ) = $\frac{٤}{٥} + \frac{٤}{٣} \times \frac{-٣}{٥}$ = صفر

٧



جتا θ = $-\frac{٣}{٥}$

، ∵ ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

∴ θ تقع فى الربع الثالث

(١) قتا (١٨٠° + θ) = − قتا θ = ٥/٤

(٢) قا (− θ) = قا θ = − ٥/٣

(٣) ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ = − ٤/٣

(٤) ظتا (θ − ٩٠°) = − ظتا (٩٠° − θ)

= − ظا θ = − ٤/٣

(٥) قا (٩٠° + θ) = − قتا θ = ٥/٤

(٦) ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ = ٣/٤

٨

(١) ∵ جا (٣ θ + ١٥°) = جتا (٢ θ − ٥°)

∴ ٣ θ + ١٥° + ٢ θ − ٥° = ٩٠°

∴ ٥ θ + ١٠° = ٩٠°

∴ ٥ θ = ٨٠°   ∴ θ = ١٦°

(٢) ∵ قا (θ + ٢٥°) = قتا (θ + ١٥°)

∴ θ + ٢٥° + θ + ١٥° = ٩٠°

∴ ٢ θ + ٤٠° = ٩٠°

∴ ٢ θ = ٥٠°   ∴ θ = ٢٥°

(٣) ∵ ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣ θ + ٣٠°)

∴ θ + ٢٠° + ٣ θ + ٣٠° = ٩٠°

∴ ٤ θ + ٥٠° = ٩٠°

∴ ٤ θ = ٤٠°   ∴ θ = ١٠°

(٤) ∵ جتا ((θ + ٢٠°)/٢) = جا ((θ + ٤٠°)/٢)

∴ (θ + ٢٠°)/٢ + (θ + ٤٠°)/٢ = ٩٠°

∴ θ + ٢٠° + θ + ٤٠° = ١٨٠°

∴ ٢ θ + ٦٠° = ١٨٠°

∴ ٢ θ = ١٢٠°   ∴ θ = ٦٠°

(٥) ∵ ظا (θ + ١٨° ٢٤′) = ظتا (θ + ٥٢° ١٠′)

∴ θ + ١٨° ٢٤′ + θ + ٥٢° ١٠′ = ٩٠°

∴ ٢ θ + ٧٠° ٣٤′ = ٩٠°

∴ ٢ θ = ١٩° ٢٦′   ∴ θ = ٩° ٤٣′

٩

(١) ∵ جا ٢ θ = جتا θ

∴ ٢ θ ± θ = π/٢ + ٢ π ن حيث ن ∈ ص

∴ إما ٢ θ + θ = π/٢ + ٢ π ن

ومنها ٣ θ = π/٢ + ٢ π ن

∴ θ = π/٦ + (٢π/٣) ن

أ، ٢ θ − θ = π/٢ + ٢ π ن

ومنها θ = π/٢ + ٢ π ن

∴ الحل العام هو: π/٦ + (٢π/٣) ن أ، π/٢ + ٢ π ن

(٢) ∵ جتا ٥ θ = جا θ

∴ جا θ = جتا ٥ θ

∴ θ ± ٥ θ = π/٢ + ٢ π ن

∴ إما θ + ٥ θ = π/٢ + ٢ π ن

ومنها ٦ θ = π/٢ + ٢ π ن

∴ θ = π/١٢ + (π/٣) ن

أ، θ − ٥ θ = π/٢ + ٢ π ن

ومنها −٤ θ = π/٢ + ٢ π ن

∴ θ = − π/٨ − (π/٢) ن

∴ الحل العام هو:

π/١٢ + (π/٣) ن أ، − π/٨ − (π/٢) ن

١٠

(١) ∵ قا (θ + ١٥°) = قتا ٤٢°

∴ (θ + ١٥°) ± (٤٢°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ + ١٥° + ٤٢° = ٩٠°   ∴ θ = ٣٣°

(٢) ∵ جا (θ + ٣٠°) = جتا θ

∴ (θ + ٣٠°) ± θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ θ + ٣٠° + θ = ٩٠°

∴ ٢ θ = ٦٠°   ∴ θ = ٣٠°

(٣) ∵ جا θ = جتا θ ∴ θ ± θ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٢ θ = ٩٠° ∴ θ = ٤٥°

(٤) ∵ جتا $\left(\theta - \frac{\pi}{٦}\right)$ = جا θ

∴ $\left(\theta - \frac{\pi}{٦}\right)$ ± (θ) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٢ θ − ٣٠° = ٩٠°

∴ ٢ θ = ١٢٠° ∴ θ = ٦٠°

(٥) ∵ ظا (θ + ٢٧°) = ظتا ٢ θ

∴ (θ + ٢٧°) + (٢ θ) = ٩٠° + ١٨٠° ن

∴ θ + ٢٧° + ٢ θ = ٩٠°

∴ ٣ θ = ٦٣° ∴ θ = ٢١°

أ، θ + ٢٧° + ٢ θ = ٢٧٠°

∴ ٣ θ = ٢٤٣° ∴ θ = ٨١°

(٦) ∵ ظا (θ + ١٠°) = ظتا (٤ θ − ١٠°)

∴ (θ + ١٠°) + (٤ θ − ١٠°) = ٩٠° + ١٨٠° ن

∴ θ + ١٠° + ٤ θ − ١٠° = ٩٠°

∴ ٥ θ = ٩٠° ∴ θ = ١٨°

أ، ٥ θ = ٢٧٠° ∴ θ = ٥٤°

أ، ٥ θ = ٤٥٠° ∴ θ = ٩٠°

(٧) ∵ جا (٢ θ + ٣٥°) = جتا (٣ θ − ١٠°)

∴ جتا (٣ θ − ١٠°) = جا (٢ θ + ٣٥°)

∴ (٣ θ − ١٠°) ± (٢ θ + ٣٥°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٣ θ − ١٠° + ٢ θ + ٣٥° = ٩٠°

∴ ٥ θ = ٦٥° ∴ θ = ١٣°

أ، ٣ θ − ١٠° + ٢ θ + ٣٥°

= ٩٠° + ٣٦٠° = ٤٥٠°

∴ ٥ θ = ٤٢٥° ∴ θ = ٨٥°

(٨) ∵ جا θ = جتا (٣ θ − ٩٠°)

∴ جتا (٣ θ − ٩٠°) = جا θ

∴ (٣ θ − ٩٠°) ± (θ) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٣ θ − ٩٠° + θ = ٩٠°

∴ ٤ θ = ١٨٠° ∴ θ = ٤٥°

أ، ٣ θ − ٩٠° − θ = ٩٠° ∴ ٢ θ = ١٨٠°

∴ θ = ٩٠° (مرفوض)

(٩) ∵ جا (٤ θ + ٤٨°) = جتا (θ − ٣٣°)

∴ (٤ θ + ٤٨°) ± (θ − ٣٣°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٤ θ + ٤٨° + θ − ٣٣° = ٩٠°

∴ ٥ θ + ١٥° = ٩٠° ∴ θ = ١٥°

أ، ٥ θ + ١٥° = ٤٥٠° ∴ θ = ٨٧°

أ، ٤ θ + ٤٨° − θ + ٣٣° = ٩٠°

∴ ٣ θ + ٨١° = ٩٠° ∴ θ = ٣°

(١٠) ∵ جتا ٨ θ = جا ٢ θ

∴ (٨ θ) ± (٢ θ) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

∴ ٨ θ + ٢ θ = ٩٠°

∴ ١٠ θ = ٩٠° ∴ θ = ٩°

أ، ١٠ θ = ٤٥٠° ∴ θ = ٤٥°

أ، ١٠ θ = ٨١٠° ∴ θ = ٨١°

أ، ٨ θ − ٢ θ = ٩٠°

∴ ٦ θ = ٩٠° ∴ θ = ١٥°

أ، ٦ θ = ٤٥٠° ∴ θ = ٧٥°

١١

(١) ∵ ظا θ − ١ = ٠ ∴ ظا θ = ١

، ∵ ظا موجبة فى الربع الأول والثالث

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°

، ∵ θ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[∴ θ = ٤٥°

(٢) ∵ ٢ جتا θ − ١ = ٠ ∴ جتا $\theta = \frac{١}{٢}$

، ∵ جتا موجبة فى الربع الأول والرابع

∴ θ = ٦٠° أ، θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

، ∵ $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ∴ θ = ٦٠°

(٣) ∵ ٢ جتا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = ١$

∴ جتا (٩٠° − θ) = $\frac{١}{٢}$ ∴ جا $\theta = \frac{١}{٢}$

، ∵ جا موجبة فى الربع الأول والثانى

∴ θ = ٣٠° أ، θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

، ∵ $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ∴ θ = ٣٠°

(٤) ∵ ٢ جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \sqrt{٣}$

∴ جا (٩٠° − θ) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ جتا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ∵ جتا موجبة فى الربع الأول والرابع

∴ θ = ٣٠° أ، θ = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠°

، ∵ $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ ∴ θ = ٣٠°

١٢

(١) جتا $\theta = -\frac{١}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{١}{٢}$ هى ٦٠°

∴ θ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

أ، θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

∴ مجموعة الحل = {١٢٠° ، ٢٤٠°}

(٢) قا $\theta = \sqrt{٢}$ ∴ جتا $\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ٤٥°

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

∴ مجموعة الحل = {٤٥° ، ٣١٥°}

(٣) جا $\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ θ = ٦٠° أ، θ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

∴ مجموعة الحل = {٦٠° ، ١٢٠°}

(٤) جتا θ = −١ ∴ مجموعة الحل = {١٨٠°}

(٥) جا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع.

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

أ، θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ مجموعة الحل = {٢٤٠° ، ٣٠٠°}

(٦) ظا θ = −١ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها = ١ هى ٤٥°

∴ θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

أ، θ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°

∴ مجموعة الحل = {١٣٥° ، ٣١٥°}

(٧) قتا $\theta = -\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ∴ جا $\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ θ = ١٨٠° + ٦٠° = ٢٤٠°

أ، θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ مجموعة الحل = {٢٤٠° ، ٣٠٠°}

(٨) جا^{٢} $\theta = \frac{١}{٤}$ ∴ جا $\theta = \pm\frac{١}{٢}$

∴ جا $\theta = \frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها $= \frac{١}{٢}$ هى ٣٠°

∴ $\theta = ٣٠^\circ$ أ، $\theta = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ$

أ، $\text{جا}\,\theta = -\frac{١}{٢}$ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ $\theta = ١٨٠^\circ + ٣٠^\circ = ٢١٠^\circ$

أ، $\theta = ٣٦٠^\circ - ٣٠^\circ = ٣٣٠^\circ$

∴ مجموعة الحل $= \{٣٠^\circ ، ١٥٠^\circ ، ٢١٠^\circ ، ٣٣٠^\circ\}$

١٣

∵ $\text{جتا}\left(\frac{٣\pi}{٢} - \theta\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\text{جتا}\,(٢٧٠^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $-\text{جا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\text{جا}\,\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

، ∵ $\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right) = \frac{١}{٢}$ ∴ $\text{جا}\,(٩٠^\circ + \theta) = \frac{١}{٢}$

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{١}{٢}$

، ∵ جا سالبة و جتا موجبة ∴ θ تقع فى الربع الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيبها $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٦٠°

∴ $\theta = ٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠٠^\circ$

١٤

∵ $\frac{\text{جا}\,(٣\theta - ٢٥^\circ)}{\text{جتا}\,(٢\theta - ٣٥^\circ)} = ١$

∴ $\text{جا}\,(٣\theta - ٢٥^\circ) = \text{جتا}\,(٢\theta - ٣٥^\circ)$

∴ $(٣\theta - ٢٥^\circ) \pm (٢\theta - ٣٥^\circ) = ٩٠^\circ + ٣٦٠^\circ$ ن

∴ $٣\theta - ٢٥^\circ + ٢\theta - ٣٥^\circ = ٩٠^\circ$

∴ $٥\theta = ١٥٠^\circ$ ∴ $\theta = ٣٠^\circ$

∴ $\frac{\text{جا}\,١٨^\circ}{\text{جتا}\,٧٢^\circ} + \text{جا}\,(١٨٠^\circ - \theta)$

$= \frac{\text{جتا}\,٧٢^\circ}{\text{جتا}\,٧٢^\circ} + \text{جا}\,\theta = ١ + \text{جا}\,٣٠^\circ = ١\frac{١}{٢}$

١٥

∵ $\frac{\text{ظا}\,\theta}{\text{ظتا}\,٢\theta} = ١$ ∴ $\text{ظا}\,\theta = \text{ظتا}\,٢\theta$

∴ $\theta + ٢\theta = ٩٠^\circ + ١٨٠^\circ$ ن

∴ $\theta + ٢\theta = ٩٠^\circ$ ∴ $٣\theta = ٩٠^\circ$

∴ $\theta = ٣٠^\circ$

∴ $\text{جا}\,(١٨٠^\circ - ٣\theta)\,\text{جتا}\,(٣٦٠^\circ - ٢\theta)$

$+ \text{ظا}\,٢\theta\,\text{ظتا}\,(\theta - ١٨٠^\circ)$

$= \text{جا}\,(١٨٠^\circ - ٩٠^\circ)\,\text{جتا}\,(٣٦٠^\circ - ٦٠^\circ)$

$+ \text{ظا}\,٦٠^\circ\,\text{ظتا}\,(٣٠^\circ - ١٨٠^\circ)$

$= \text{جا}\,٩٠^\circ\,\text{جتا}\,٦٠^\circ + \text{ظا}\,٦٠^\circ\,\text{ظتا}\,(-١٥٠^\circ)$

$= \text{جتا}\,٦٠^\circ - \text{ظا}\,٦٠^\circ\,\text{ظتا}\,١٥٠^\circ$

$= \text{جتا}\,٦٠^\circ - \text{ظا}\,٦٠^\circ\,\text{ظتا}\,(١٨٠^\circ - ٣٠^\circ)$

$= \text{جتا}\,٦٠^\circ + \text{ظا}\,٦٠^\circ\,\text{ظتا}\,٣٠^\circ = \frac{١}{٢} + \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣\frac{١}{٢}$

١٦

∵ $\text{ظا}\,(\theta - ١٥^\circ) = \text{ظتا}\,(٢\theta + ١٥^\circ)$

∴ $(\theta - ١٥^\circ) + (٢\theta + ١٥^\circ) = ٩٠^\circ + ١٨٠^\circ$ ن

∴ $\theta - ١٥^\circ + ٢\theta + ١٥^\circ = ٩٠^\circ$

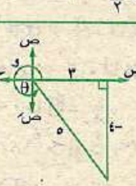
∴ $٣\theta = ٩٠^\circ$ ∴ $\theta = ٣٠^\circ$

∴ $\frac{١ + \text{جا}\,(٢٧٠^\circ + ٢\theta)}{١ + \text{جا}\,(٩٠^\circ + ٢\theta)} = \frac{١ + \text{جا}\,(٢٧٠^\circ + ٦٠^\circ)}{١ + \text{جا}\,(٩٠^\circ + ٦٠^\circ)}$

$= \frac{١ - \text{جتا}\,٦٠^\circ}{١ + \text{جتا}\,٦٠^\circ}$

$= \frac{١ - \frac{١}{٢}}{١ + \frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$

١٧



$\text{جتا}\,\theta = \frac{٣}{٥}$

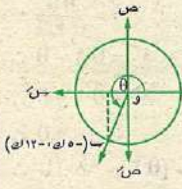
، ∵ $٢٧٠^\circ < \theta < ٣٦٠^\circ$

∴ θ تقع فى الربع الرابع

∴ $\text{جا}\,(١٨٠^\circ - \theta) + \text{ظا}\,(٩٠^\circ - \theta) - \text{ظا}\,(٢٧٠^\circ - \theta)$

$= \text{جا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta - \text{ظتا}\,\theta = \text{جا}\,\theta = \frac{-٤}{٥}$

١٨



∵ س^٢ + ص^٢ = ١

∴ ٢٥ ك^٢ + ١٤٤ ك^٢ = ١

∴ ك^٢ = $\frac{١}{١٦٩}$

∴ ك = $\frac{١}{١٣}$ حيث ك > ٠

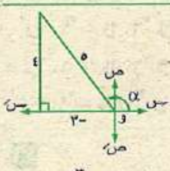
∴ ب $\left(\frac{-٥}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$

∴ قتا (٩٠° − θ) حا (٩٠° + θ) + ١٢ ظا (٢٧٠° + θ)

= قتا θ حتا θ + ١٢ (− ظتا θ)

= − $\frac{١٣}{٥}$ × $\frac{-٥}{١٣}$ − ١٢ × $\frac{٥}{١٢}$ = ١ − ٥ = −٤

١٩



∵ حتا^٢ α = $\frac{٩}{٢٥}$

، ٩٠° < α < ١٨٠°

∴ α تقع فى الربع الثانى

∴ حتا α سالبة ∴ حتا α = $\frac{-٣}{٥}$

∴ ٢٥ حا α − ٤ ظتا α = ٢٥ × $\frac{٤}{٥}$ − ٤ × $\frac{-٣}{٤}$

= ٢٠ + ٣ = ٢٣

٢٠

∵ ظا α = $\frac{٣}{٤}$ (موجبة)

∴ α تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ α أصغر زاوية موجبة

∴ α تقع فى الربع الأول

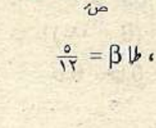
∴ حا α = $\frac{٣}{٥}$ ، حتا α = $\frac{٤}{٥}$

، ظا α = $\frac{٣}{٤}$ ، قتا α = $\frac{٥}{٣}$

، قا α = $\frac{٥}{٤}$ ، ظتا α = $\frac{٤}{٣}$

، ∵ ظا β = $\frac{٥}{١٢}$

، ١٨٠° < β < ٢٧٠°



∴ β تقع فى الربع الثالث

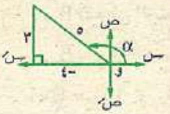
∴ حا β = $\frac{-٥}{١٣}$ ، حتا β = $\frac{-١٢}{١٣}$ ، ظا β = $\frac{٥}{١٢}$

، قتا β = $\frac{-١٣}{٥}$ ، قا β = $\frac{-١٣}{١٢}$ ، ظتا β = $\frac{١٢}{٥}$

∴ حا α حتا β − حتا α حا β

= $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{-١٢}{١٣}$ − $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{-٥}{١٣}$ = $\frac{-٣٦}{٦٥}$ + $\frac{٢٠}{٦٥}$ = $\frac{-١٦}{٦٥}$

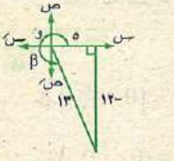
٢١



حا α = $\frac{٣}{٥}$

، ∵ α ∈ $\left]\frac{\pi}{٢} ، \pi\right[$

∴ α تقع فى الربع الثانى



، حتا β = $\frac{٥}{١٣}$

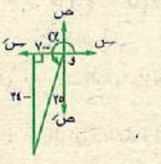
، ∵ β ∈ $\left]\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi\right[$

∴ β تقع فى الربع الرابع

∴ حتا α حتا β + حا α حا β

= $\frac{-٤}{٥}$ × $\frac{٥}{١٣}$ + $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{-١٢}{١٣}$ = $\frac{-٢٠}{٦٥}$ − $\frac{٣٦}{٦٥}$ = $\frac{-٥٦}{٦٥}$

٢٢



حا α = $\frac{-٢٤}{٢٥}$

، ∵ ١٨٠° < α < ٢٧٠°

∴ α تقع فى الربع الثالث

، ظا β = $\frac{-١٢}{٥}$ (سالبة)

∴ β تقع فى الربع الثانى أو الرابع

، ∵ β أكبر زاوية موجبة

، β ∈]٠° ، ٣٦٠°[

∴ β تقع فى الربع الرابع

(١) المقدار = − حا α − حتا β

= − $\frac{-٢٤}{٢٥}$ − $\frac{٥}{١٣}$ = $\frac{١٨٧}{٣٢٥}$

(٢) المقدار = − قتا α ظا β − قا α (− ظا β)

= − $\left(\frac{-٢٥}{٢٤}\right)\left(\frac{-١٢}{٥}\right)$ − $\left(\frac{-٢٥}{٧}\right)\left(\frac{١٢}{٥}\right)$

= $\frac{-٥}{٢}$ + $\frac{٦٠}{٧}$ = $\frac{٨٥}{١٤}$

(٣) المقدار = قتا α (− ظا β) (ظتا α) (− قا β)

$= \frac{٢٥}{-٧} \left(\frac{١٢}{٥}\right) \left(\frac{٧}{٢٤}\right) \left(\frac{-١٣}{-٥}\right) = ٦\frac{١}{٢}$

[٢٣]

∵ θ هى متممة $(٩٠° - \theta)$

∴ θ تعين على دائرة الوحدة النقطة $\left(ص ، \frac{٥}{١٣}\right)$

∵ $س^٢ + ص^٢ = ١$ ∴ $ص^٢ + \frac{٢٥}{١٦٩} = ١$

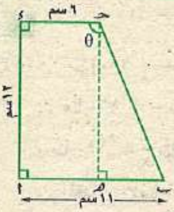
∴ $ص^٢ = \frac{١٤٤}{١٦٩}$ ∴ $ص = \frac{١٢}{١٣}$

∴ θ تعين النقطة $\left(\frac{١٢}{١٣} ، \frac{٥}{١٣}\right)$ على دائرة الوحدة

∴ جتا $\theta = \frac{١٢}{١٣}$ ، جا $\theta = \frac{٥}{١٣}$ ، ظا $\theta = \frac{٥}{١٢}$

، قا $\theta = \frac{١٣}{١٢}$ ، قتا $\theta = \frac{١٣}{٥}$ ، ظتا $\theta = \frac{١٢}{٥}$

[٢٤]



العمل : نرسم $\overline{حه} \perp \overline{أب}$

البرهان :

فى الشكل الرباعى أبحء :

ق(∠ب) $= ١٨٠° - \theta$

فى Δ هبح القائم الزاوية فى ه :

$بح = \sqrt{١٤٤ + ٢٥} = ١٣$ سم

∴ جاب = جا $(١٨٠° - \theta)$ = جا $\theta = \frac{١٢}{١٣}$

[٢٥]

∵ ق(∠أبه) = ق(∠بوح) بالتبادل

، ∵ ق(∠أبه) $= ١٨٠° - \theta$

∴ ق(∠بوح) $= ١٨٠° - \theta$

فى Δ بحو القائم الزاوية فى ح :

$بو = \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول.

∴ قتا(∠بوح) = قتا $(١٨٠° - \theta)$ = قتا $\theta = \frac{\sqrt{١٣}}{٣}$

[٢٦]

إجابة كريم صحيحة لأن : جا $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتا θ

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

[١] (١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ)

(٥) (د) (٦) (أ) (٧) (جـ) (٨) (ب)

(٩) (أ) (١٠) (ب) (١١) (جـ)

إرشادات لحل رقم [١]

(١) ∵ جتا ٩٠° = صفر

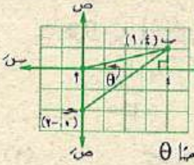
∴ جتا ٤٥° × جتا ٤٦° × جتا ٤٧° × ... × جتا ٩٠° × ... × جتا ١٣٥° = صفر

(٢) ∵ جا ٧٥° = جا (٩٠° − ١٥°) = جتا ١٥°

، جتا ١٢° = جتا (٩٠° − ٧٨°) = جا ٧٨°

∴ جا ٧٥° × جتا ١٢° × قا ١٥° × قتا ٧٨°

= جتا ١٥° × جا ٧٨° × قا ١٥° × قتا ٧٨° = ١



(٣) $أب = \sqrt{(٤)^٢ + (١)^٢}$

$= \sqrt{١٧}$

، ∵ جا (∠ب أ ح)

جا $(٩٠° + \theta)$ = جتا θ

$= \frac{٤}{\sqrt{١٧}}$

(٤) $\frac{قا ١° \times قا ٢° \times ... \times قا ٨٨° \times قا ٨٩°}{قتا ١° \times قتا ٢° \times ... \times قتا ٨٨° \times قتا ٨٩°}$

$= \frac{قا ١° \times قا ٢° \times ... \times قا ٨٨° \times قا ٨٩°}{قتا (٩٠° - ٨٩°) \times قتا (٩٠° - ٨٨°) \times ... \times قتا (٩٠° - ٢°) \times قتا (٩٠° - ١°)}$

$= \frac{قا ١° \times قا ٢° \times ... \times قا ٨٨° \times قا ٨٩°}{قا ٨٩° \times قا ٨٨° \times ... \times قا ٢° \times قا ١°} = ١$

(٥) $\frac{جا ٣س}{جتا ٤س} + \frac{ظا ٢س}{ظتا ٥س} = \frac{جا ٣س}{جتا (٧س - ٣س)}$

$+ \frac{ظا ٢س}{ظتا (٧س - ٢س)} = \frac{جا ٣س}{جتا \left(\frac{\pi}{٢} - ٣س\right)}$

$+ \frac{ظا ٢س}{ظتا \left(\frac{\pi}{٢} - ٢س\right)} = \frac{جا ٣س}{جا ٣س} + \frac{ظا ٢س}{ظا ٢س}$

$= ١ + ١ = ٢$

(٦) ∵ جتا² θ = ١   ∴ جتا θ = ± ١

∴ جتا θ = ١

∴ θ = صفر أ، ± ٢ π أ، ± ٤ π ....

أ، جتا θ = -١ ∴ θ = ± π أ، ± ٣ π أ، ± ٥ π ...

∴ θ = صفر أ، ± π أ، ± ٢ π أ، ± ٣ π أ، ...

= ن π حيث ن ∈ ص

(٧) ظا س = - √٣

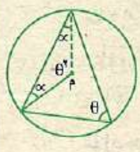
∴ س تنتمى للربع الثانى أو الربع الرابع

∴ يوجد حل للمعادلة كل نصف دوره

، ∵ ٠ ≤ س ≤ ١٥ π بها ١٥ نصف دوره

∴ عدد حلول المعادلة = ١٥ حلًا

(٨) ∵ ٢ θ = ١٨٠° - ٢ α

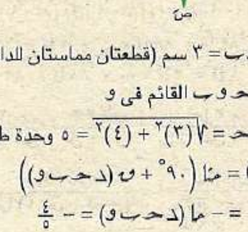


∴ ظا θ = ظا $\left(\frac{١٨٠° - ٢ α}{٢}\right)$

= ظا (٩٠° - α)

= ظتا α

(٩)



∵ و أ = و ب = ٣ سم (قطعتان مماستان للدائرة)

فى Δ جـ و ب القائم فى و

∴ ب جـ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = ٥ وحدة طول.

، جتا θ = جتا (٩٠° + ق(∠ جـ ب و))

= - جا (∠ جـ ب و) = - $\frac{٤}{٥}$

(١٠) ∵ أ ء جـ ب رباعى دائرى

∴ ق (∠ أ ء جـ) = ١٨٠° - θ

∴ جتا (∠ أ ء جـ) = جتا (١٨٠° - θ) = - جتا θ

، ∵ $\overline{أب}$ قطر فى نصف الدائرة م

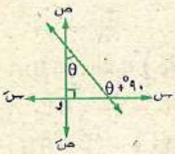
∴ ∠ θ زاوية حادة.

، ∵ جا θ = $\frac{١٢}{١٣}$

∴ جتا θ = $\frac{٥}{١٣}$

∴ جتا (∠ أ ء جـ) = - $\frac{٥}{١٣}$

(١١) ∵ معادلة الخط المستقيم هى ص = $\frac{-٣}{٤}$ س + ٥



∴ ظا (٩٠° + θ) = $\frac{-٣}{٤}$

∴ - ظتا θ = $\frac{-٣}{٤}$

∴ ظتا θ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ظا θ = $\frac{٤}{٣}$

٢

(١) ∵ جتا (١٨٠° - س) = - جتا س

∴ جتا ١٦٠° = - جتا ٢٠°

، جتا ١٤٠° = - جتا ٤٠° ... وهكذا

∴ المقدار = (جتا ٢٠° + جتا ١٦٠°)

+ (جتا ٤٠° + جتا ١٤٠°)

+ (جتا ٦٠° + جتا ١٢٠°)

+ (جتا ٨٠° + جتا ١٠٠°) + جتا ١٨٠°

= (جتا ٢٠° - جتا ٢٠°) + (جتا ٤٠° - جتا ٤٠°)

+ (جتا ٦٠° - جتا ٦٠°) + (جتا ٨٠° - جتا ٨٠°)

+ جتا ١٨٠° = ٠ + ٠ + ٠ + ٠ + (-١) = -١

(٢) ∵ جا (٣٦٠° - س) = - جا س

∴ جا ٣٥٩° = - جا ١°، جا ٣٥٨° = - جا ٢° ... وهكذا

∴ المقدار = (جا ١° + جا ٣٥٩°)

+ (جا ٢° + جا ٣٥٨°) + ... + جا ١٨٠°

= ٠ + ٠ + ... + ٠ = صفر

إرشادات تمارين 11

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (ب) (٥) (أ)
(٦) (د) (٧) (جـ) (٨) (جـ) (٩) (أ) (١٠) (جـ)
(١١) (جـ) (١٢) (د) (١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (ب)
(١٦) (ب) (١٧) (جـ) (١٨) (د) (١٩) (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(١) القيمة العظمى = $\frac{١}{٢}$ ، القيمة الصغرى = $\frac{-١}{٢}$

، المدى = $\left[\frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right]$

(٢) القيمة العظمى = $\frac{١}{٣}$ ، القيمة الصغرى = $\frac{-١}{٣}$

، المدى = $\left[\frac{-١}{٣} ، \frac{١}{٣}\right]$

(٣) القيمة العظمى = ٢ ، القيمة الصغرى = -٢

، المدى = [-٢ ، ٢]

٢

كون الجدول وارسم بنفسك ومن الرسم نجد أن :

(١) القيمة الصغرى = -٤ ، القيمة العظمى = ٤

، المدى = [-٤ ، ٤]

(٢) القيمة الصغرى = -٤ ، القيمة العظمى = ٤

، المدى = [-٤ ، ٤]

(٣) القيمة الصغرى = -٢ ، القيمة العظمى = ٢

، المدى = [-٢ ، ٢]

(٤) القيمة الصغرى = -٣ ، القيمة العظمى = ٣

، المدى = [-٣ ، ٣]

٣

(١) $\because$ ٠° $\leq \theta \leq$ ١٢٠° $\therefore$ ٠° $\leq$ ٣$\theta \leq$ ٣٦٠°

بإعطاء ٣θ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة :

٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٢\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٦}$ ، $\frac{٤\pi}{٦}$ ، ... ، ٢π

$\therefore \theta$ = ٠ ، $\frac{\pi}{١٨}$ ، $\frac{٢\pi}{١٨}$ ، $\frac{٣\pi}{١٨}$ ، $\frac{٤\pi}{١٨}$ ، ... ، $\frac{١٢\pi}{١٨}$

، $\because$ ص = جتا ٣θ

كون الجدول ثم ارسم منحنى الدالة

، ومن الرسم نجد أن :

- القيمة الصغرى = -١ • القيمة العظمى = ١
- مدى الدالة = [-١ ، ١]

(٢) $\because$ ٠° $\leq \theta \leq$ ١٨٠° $\therefore$ ٠° $\leq$ ٢$\theta \leq$ ٣٦٠°

بإعطاء ٢θ قيمًا لبعض الزوايا الخاصة :

٠ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٢\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\pi}{٦}$ ، ... ، ٢π

$\therefore \theta$ = ٠ ، $\frac{\pi}{١٢}$ ، $\frac{٢\pi}{١٢}$ ، $\frac{٣\pi}{١٢}$ ، ... ، π

، $\because$ ص = ٥ جا ٢θ

كون الجدول ثم ارسم منحنى الدالة

، ومن الرسم نجد أن :

- القيمة الصغرى = -٥ • القيمة العظمى = ٥
- مدى الدالة = [-٥ ، ٥]

٤

مثل بنفسك ، ومن الرسم نجد أن :

مدى الدالة : ص = ٤ جتا θ هو [-٤ ، ٤]

القيمة العظمى = ٤ ، القيمة الصغرى = -٤

، مدى الدالة : ص = ٣ جا θ هو [-٣ ، ٣]

، القيمة العظمى = ٣ ، القيمة الصغرى = -٣

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (أ) (٢) (ب) (٣) (د) (٤) (ب)
(٥) (جـ) (٦) (د) (٧) (د) (٨) (ب)

إرشادات الحل :

(١) ∵ −١ ≤ جا س ≤ ١ ∴ ١ ≥ − جا س ≥ −١

∴ −١ ≤ − جا س ≤ ١ ∴ ١ ≤ ٢ − جا س ≤ ٣

∴ $\frac{١}{٣}$ ≤ $\frac{٢ - \text{جا س}}{٣}$ ≤ ١ ∴ $\frac{١}{٣}$ ≤ م ≤ ١

(٢) أكبر قيمة للمقدار (جتا $س_١$ − جتا $س_٢$)

تكون عندما تكون جتا $س_١$ = ١

، جتا $س_٢$ = −١

∴ جتا $س_١$ − جتا $س_٢$ = ١ − (−١) = ٢

(٣) ∵ د (س) = أ جتا ب س

∴ دورتها $\frac{٢\pi}{ب}$ = π ∴ ب = ٢

، مداها [−٣ ، ٣] ∴ أ = ٣

∴ أ + ب = ٥

(٤) أ = جا $\frac{\pi}{٢}$ = ١ ، ب = جا $\left(\frac{٣\pi}{٢}\right)$ = −١

∴ |أ| + |ب| = |١| + |−١| = ٢

(٥) ∵ ب = ٢π ، أ = −π

∴ ب − أ = ٢π − (−π) = ٣π

(٦) المنحنى ص = جا ٣س

∴ يقطع محور السينات فى نقاط عددها

= ٢ × عدد الدورات + ١

، ∵ الدالة ص = جا ٣س لها دورة كاملة كل $\frac{٢\pi}{٣}$

∴ عدد الدورات فى الفترة [٠ ، ٢π]

= ٢π ÷ $\frac{٢\pi}{٣}$ = ٣

∴ عدد نقاط التقاطع المطلوب = ٢ × ٣ + ١ = ٧

(٧) ∵ المنحنى ص = جا (أ س)

∴ يصنع دورة كاملة كل $\frac{٢\pi}{أ}$

∴ عدد الدورات الكاملة فى الفترة [٠ ، ٢π]

= $\frac{٢\pi}{\frac{٢\pi}{أ}}$ = أ

∴ ٩ = ٢ × أ + ١ ∴ أ = ٤

(٨) ∵ المنحنى د (س) = جا ٢س + ١

يصنع دورة كاملة كل $\frac{٢\pi}{٢}$ = π

∴ عدد الدورات الكاملة فى الفترة [٠ ، ٢π] هو ٢

∴ عدد المرات المطلوب = ٢

إرشادات تمارين 12

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (ب)

(٦) (أ) (٧) (أ) (٨) (أ) (٩) (أ) (١٠) (جـ)

(١١) (ب) (١٢) (د) (١٣) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ٣٦° ٥٢′ ١٢″ (٢) ٣٨° ٨′ ٢٥″ (٣) ٦٧° ٥١′ ٣٤″

(٤) ∵ θ = ظا$^{-١}$ (−٠,٨٢٢٧) ، −٠,٨٢٢٧ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − (٣٩° ٢٦′ ٣٩″) = ١٤٠° ٣٣′ ٢١″

(٥) ∵ θ = جا$^{-١}$ (−٠,٤٦٥٢) ، −٠,٤٦٥٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٢٧° ٤٣′ ٢٣″) = ٢٠٧° ٤٣′ ٢٣″

(٦) ∵ θ = جتا$^{-١}$ (−٠,٥٢٠٦) ، −٠,٥٢٠٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − (٥٨° ٣٧′ ٣٩″) = ١٢١° ٢٢′ ٢١″

(٧) ١٥° ٢٣′ ٤١″

(٨) ∵ θ = ظتا$^{-١}$ (−١,٤٦١٢) ، −١,٤٦١٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − (٣٤° ٢٣′ ١٢″) = ١٤٥° ٣٦′ ٤٨″

(٩) ١٧° ٢٢′ ٣٣″

(١٠) ∵ θ = قتا$^{-1}$ (−٢,٥٤٦٦) ، −٢,٥٤٦٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٢٣° ٧′ ١٣″) = ٢٠٣° ٧′ ١٣″

(١١) ∵ θ = قا$^{-1}$ (−٣,٥٧) ، −٣,٥٧ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − (٧٣° ٤٣′ ٥٩″) = ١٠٦° ١٦′ ١″

(١٢) ١٩° ٣٥′ ٥٩″

٢

(١) ∵ θ = جا$^{-1}$ ٠,٨٦٦٠٣ ، ٠,٨٦٦٠٣ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثانى

∴ θ = ٦٠° ٠′ ٢″

أ، θ = ١٨٠° − ٦٠° ٠′ ٢″ = ١١٩° ٥٩′ ٥٨″

(٢) ∵ θ = جتا$^{-1}$ (−٠,٤٧٥٢) ، −٠,٤٧٥٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − (٦١° ٣٧′ ٣٩″) = ١١٨° ٢٢′ ٢١″

أ، θ = ١٨٠° + (٦١° ٣٧′ ٣٩″) = ٢٤١° ٣٧′ ٣٩″

(٣) ∵ θ = قتا$^{-1}$ (−١,٢٥٧٦) ، −١,٢٥٧٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٥٢° ٤٠′ ١٥″) = ٢٣٢° ٤٠′ ١٥″

أ، θ = ٣٦٠° − (٥٢° ٤٠′ ١٥″) = ٣٠٧° ١٩′ ٤٥″

(٤) ∵ θ = ظا$^{-1}$ ١,٥٤١٧ ، ١,٥٤١٧ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

∴ θ = ٥٧° ١′ ٥٢″

أ، θ = ١٨٠° + (٥٧° ١′ ٥٢″) = ٢٣٧° ١′ ٥٢″

(٥) ∵ θ = جتا$^{-1}$ (−٠,٦٤٢) ، −٠,٦٤٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

∴ θ = ١٨٠° − (٥٠° ٣′ ٣٢″) = ١٢٩° ٥٦′ ٢٨″

أ، θ = ١٨٠° + (٥٠° ٣′ ٣٢″) = ٢٣٠° ٣′ ٣٢″

(٦) ∵ θ = قا$^{-1}$ ٢,٠٥١٥ ، ٢,٠٥١٥ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الرابع

∴ θ = ٦٠° ٤٩′ ٣٧″

أ، θ = ٣٦٠° − (٦٠° ٤٩′ ٣٧″) = ٢٩٩° ١٠′ ٢٣″

(٧) ∵ θ = قتا$^{-1}$ (−١,٨٧١٥) ، −١,٨٧١٥ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° + (٣٢° ١٧′ ٥٥″) = ٢١٢° ١٧′ ٥٥″

أ، θ = ٣٦٠° − (٣٢° ١٧′ ٥٥″) = ٣٢٧° ٤٢′ ٥″

(٨) ∵ θ = ظتا$^{-1}$ (−٢,٧٠١٢) ، −٢,٧٠١٢ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − (٢٠° ١٨′ ٥٣″) = ١٥٩° ٤١′ ٧″

أ، θ = ٣٦٠° − (٢٠° ١٨′ ٥٣″) = ٣٣٩° ٤١′ ٧″

(٩) ∵ θ = ظا$^{-1}$ (−٢,١٤٥٦) ، −٢,١٤٥٦ (سالبة)

∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠° − (٦٥° ٠′ ٤٠″) = ١١٤° ٥٩′ ٢٠″

أ، θ = ٣٦٠° − (٦٥° ٠′ ٤٠″) = ٢٩٤° ٥٩′ ٢٠″

٣

(١) ∵ النقطة ب $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ، \frac{1}{2}\right)$ تقع فى الربع الأول

∴ θ تقع فى الربع الأول

، ∵ جا$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ = ٣٠° ∴ θ = ٣٠°

(٢) ∵ النقطة ب $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} ، \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ تقع فى الربع الثانى

∴ θ تقع فى الربع الثانى

، ∵ جا$^{-1}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ٤٥°

∴ θ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

(٣) ∵ النقطة ب $\left(\frac{6}{10} ، \frac{-8}{10}\right)$ تقع فى الربع الرابع

∴ θ تقع فى الربع الرابع

، ∵ جتا$^{-1}$ $\frac{6}{10}$ = ٥٣° ٧′ ٤٨″

∴ θ = ٣٦٠° − (٥٣° ٧′ ٤٨″) = ٣٠٦° ٥٢′ ١٢″

٤

(١) ∵ ظا $\theta = \frac{٨}{٥}$ ∴ $\theta =$ ظا$^{-١}$ $\frac{٨}{٥}$

∴ $\theta \simeq ٥٧° \ ٥٩' \ ٤١''$

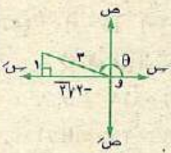
(٢) ∵ جتا $\theta = \frac{٧}{٩}$ ∴ $\theta =$ جتا$^{-١}$ $\frac{٧}{٩}$

∴ $\theta \simeq ٣٨° \ ٥٦' \ ٣٣''$

(٣) ∵ جا $\theta = \frac{٤}{٩}$ ∴ $\theta =$ جا$^{-١}$ $\frac{٤}{٩}$

∴ $\theta \simeq ٢٦° \ ٢٣' \ ١٦''$

٥



(١) ∵ $٩٠° \le \theta \le ١٨٠°$

∴ θ تقع فى الربع الثانى

∴ جا $\theta = \frac{١}{٣}$

∴ $\theta =$ جا$^{-١}$ $\frac{١}{٣}$

∴ $\theta = ١٨٠° - (١٩ \ ٢٨ \ ١٦°) = ١٦٠° \ ٣١' \ ٤٤''$

(٢) جتا $\theta = \frac{-٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، ظا $\theta = \frac{-١}{٢\sqrt{٢}}$

، قا $\theta = -\frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$

٦

∵ جتا أ $= -٠{,}٥٨٠٧$ ∴ ق(∠أ) $= ١٢٥° \ ٣٠'$

∵ ظا ب $= ٠{,}٤٥٧٨$ ∴ ق(∠ب) $= ٢٤° \ ٣٦'$

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) $= ١٥٠° \ ٦'$

∴ ق(∠حـ) $= ١٨٠° - ١٥٠° \ ٦' = ٢٩° \ ٥٤'$

٧

∵ ظا $\theta \simeq ٠{,}٤٩٩$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

∵ $\theta =$ ظا$^{-١}$ $٠{,}٤٩٩$ ∴ $\theta \simeq ٢٦° \ ٣١'$

أ، $\theta = ١٨٠° + ٢٦° \ ٣١' = ٢٠٦° \ ٣١'$

٨

∵ جتا $\theta \simeq -٠{,}٣٥٦٤$ (سالبة)

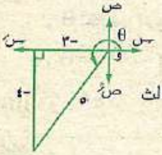
∴ θ تقع فى الربع الثانى أو الثالث

وبفرض جتا $\theta = ٠{,}٣٥٦٤$

∴ $\theta \simeq ٦٩° \ ٧'$ ∴ $\theta = ١٨٠° - ٦٩° \ ٧' = ١١٠° \ ٥٣'$

أ، $\theta = ١٨٠° + ٦٩° \ ٧' = ٢٤٩° \ ٧'$

٩



∵ ظا $\theta = \frac{٤}{٣}$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ θ أكبر زاوية موجبة

، $\theta \in]٠° ، ٣٦٠°[$

∴ θ تقع فى الربع الثالث

∴ جا $\alpha =$ جا$(١٨٠° - ٣٠°)$ (− جا θ)

$+ \frac{١}{٥}$ (− جتا θ) ظا $(١٨٠° + ٤٥°)$

$=$ جا $٣٠° \left(\frac{٤}{٥}\right) + \frac{١}{٥}\left(\frac{٥}{٤}\right)$ ظا $٤٥°$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٥} + \frac{١}{٤} = \frac{٨ + ٥}{٢٠} = \frac{١٣}{٢٠}$

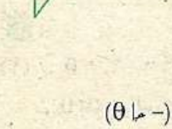
∴ جا $\alpha = \frac{١٣}{٢٠}$ (موجبة)

∴ α تقع فى الربع الأول أو الثانى

∵ $\alpha =$ جا$^{-١}$ $\frac{١٣}{٢٠}$ ∴ $\alpha = ٤٠° \ ٣٢'$

أ، $\alpha = ١٨٠° - ٤٠° \ ٣٢' = ١٣٩° \ ٢٨'$

١٠



جا $\alpha = \frac{٣}{٥}$

، ∵ $٩٠° < \alpha < ١٨٠°$

∴ α تقع فى الربع الثانى

، ∵ $\frac{-٥}{٤}$ جتا $(٣٦٠° - \alpha)$ + ظتا $(٢٧٠° - \theta) = ٢$

∴ $\frac{-٥}{٤}$ جتا α + ظا $\theta = ٢$

∴ $\frac{-٥}{٤} \times \frac{-٤}{٥}$ + ظا $\theta = ٢$

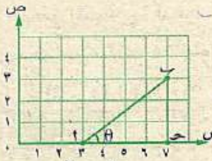
∴ ١ + ظا $\theta = ٢$ ∴ ظا $\theta = ١$ (موجبة)

∴ θ تقع فى الربع الأول أو الثالث

، ∵ ظا $٤٥° = ١$

∴ $\theta \doteq ٤٥°$ أ، $\theta = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°$

١١



من الرسم :

أحـ = ٤ وحدة طول

، ب حـ = ٣ وحدة طول س

، ∵ $ظا\,\theta = \frac{ب حـ}{أ حـ}$ ∴ $ظا\,\theta = \frac{٣}{٤}$

∴ $\theta = ظا^{-1}\,\frac{٣}{٤}$ ∴ $\theta = ٣٦^\circ\,٥٢'\,١٢''$

١٢ إجابة كريم هى الصحيحة وذلك لأن :

$قتا\,\theta = \frac{١٣}{٧}$ أما $قا\,\theta \neq \frac{١٣}{٧}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (أ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (أ) (٥) (جـ)

إرشادات الحل :

(١) $جتا^{-1}$ (صفر) $= \frac{\pi}{٢}$ ∴ $قتا\left(\frac{\pi}{٢}\right) = \frac{١}{جا\left(\frac{\pi}{٢}\right)} = ١$

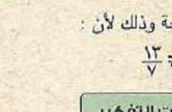
(٢) فى Δ أ ب حـ : ق(∠ب) = ٩٠°

∴ أ حـ $= \sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢} = ١٣$ سم

$ظا^{-1}\left(\frac{٥}{١٢}\right) =$ ق(∠ أ حـ ب)

∴ جا(∠ أ حـ ب) $= \frac{٥}{١٣}$

(٣) ∵ مساحة متوازى الأضلاع



أ ب حـ ء = ٤٠ سم^٢

∴ ب هـ $= \frac{٤٠}{٨} = ٥$ سم

∴ جا أ $= \frac{٥}{٦}$

∴ ق(∠أ) ≃ ٥٦°

(٤) ∵ $ظا\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ $ظا^{-1}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = \frac{\pi}{٦}$

، ∵ $ظتا\left(\frac{\pi}{٦}\right) = \sqrt{٣}$ ∴ $ظتا^{-1}\left(\sqrt{٣}\right) = \frac{\pi}{٦}$

∴ $ظا^{-1}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) + ظتا^{-1}\left(\sqrt{٣}\right) = \frac{\pi}{٦} + \frac{\pi}{٦} = \frac{\pi}{٣}$

(٥) نفرض أن $جتا^{-1}$ س $= \alpha$ ∴ $جتا\,\alpha =$ س

، نفرض أن $جا^{-1}$ س $= \beta$

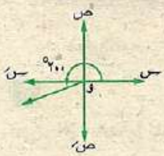
∴ $جا\,\beta =$ س ∴ $جتا\,\alpha = جا\,\beta$

∴ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{٢}$

∴ $جتا^{-1}$ س + $جا^{-1}$ س $= \frac{\pi}{٢}$

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثانية

١



القياس الدائرى

$= ٢٠٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ}$

$\simeq ٣,٤٩$ ء

٢

قياس الزاوية التى يصنعها العقرب بعد مرور ١٠ دقائق = ٦٠°

∴ المسافة التى تقطعها النقطة $= ٦٠^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \times ٦$

$= ٢\,\pi$ سم

٣

المسافة التى يقطعها القمر الصناعى خلال دورة كاملة

$= ٢\,\pi \times ٩٠٠٠ \simeq ٥٦٥٤٨,٦٧$ كم

∴ سرعة القمر الصناعى $= \frac{٥٦٥٤٨,٦٧}{٦}$

$= ٩٤٢٤,٧٨$ كم/ساعة

٤

طول نصف قطر دائرة مسار القمر الصناعى

$= ٦٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١٠٠٠٠$ كم

∴ المسافة التى يقطعها القمر الصناعى خلال دورة كاملة

$= ٢\,\pi \times ١٠٠٠٠ \simeq ٦٢٨٣١,٨٥$ كم

∴ المسافة التى يقطعها القمر الصناعى خلال ساعة واحدة

$= \frac{٦٢٨٣١,٨٥}{٣} \simeq ٢٠٩٤٤$ كم

٥

(١) قياس الزاوية التى يدور الظل عندها بعد مرور ٤ ساعات

$= ١٥ \times ٤ \times \frac{\pi}{١٨٠^\circ} \simeq ١,٠٥$ ء

(٢) القياس الستينى للزاوية $= \frac{٢\,\pi}{٣} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi} = ١٢٠^\circ$

∴ عدد الساعات = ١٢٠° ÷ ١٥° = ٨ ساعات

(٣) القياس الدائرى للزاوية التى يصنعها الظل بعد مرور ١٠ ساعات

$= ١٥° \times ١٠ \times \frac{\pi}{١٨٠°} = \frac{٥\pi}{٦}$

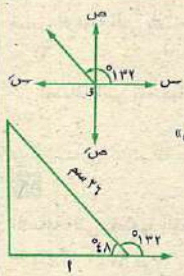
∴ طول القوس $= \frac{٥\pi}{٦} \times ٢٤ = ٢٠\,\pi$ سم

٦

∵ $جا\,\theta_١ = ك\,جا\,\theta_٢$ ∴ $جا\,\theta_٢ = \frac{جا\,٦٠°}{\sqrt{٣}}$

∴ $جا\,\theta_٢ = \frac{١}{٢}$ ∴ $\theta_٢ = ٣٠°$

٧



(١) الزاوية المنتسبة

$= ١٨٠° - ١٣٢°$

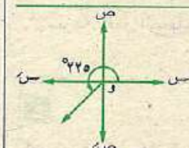
$= ٤٨°$ «توجد حلول أخرى»

(٢) $جتا\,٤٨° = \frac{أ}{٢٦}$

∴ $أ = ٢٦\,جتا\,٤٨°$

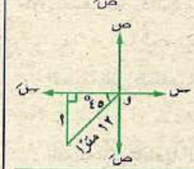
$\simeq ١٧$ سم

٨



(١) $\frac{٥\pi}{٤} = \frac{٥ \times ١٨٠°}{٤}$

$= ٢٢٥°$



(٢) $جا\,٤٥° = \frac{أ}{١٢}$

∴ $أ = ١٢\,جا\,٤٥°$

$\simeq ٨,٤٩$ متر

٩

عندما ف = ١٠ ∴ $٦\,جا\,(١٥\,ن)° = ٠$

∴ $جا\,(١٥\,ن)° = ٠$

∴ ١٥ ن = ٠ ∴ ن = ٠

أ، ١٥ ن = ١٨٠ ∴ ن = ١٢

أ، ١٥ ن = ٣٦٠ ∴ ن = ٢٤

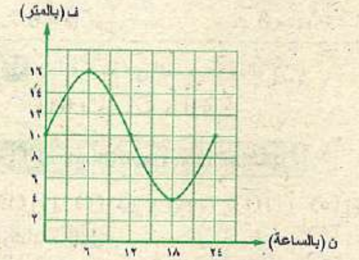
أ، ١٥ ن = ٥٤٠ ∴ ن = ٣٦ (مرفوض)

∴ عمق المياه = ١٠ أمتار

عند ن = ٠ ، ١٢ ، ٢٤ ساعة

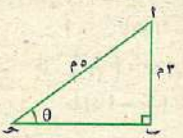
$ف = (٦\,جا\,١٥\,ن)° + ١٠$

ن بالساعة	٠	٦	١٢	١٨	٢٤
ف (بالمتر)	١٠	١٦	١٠	٤	١٠



تستطيع السفينة دخول الميناء عندما ن ∈ [٠ ، ١٢]

١٠



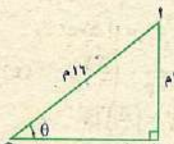
∵ $جا\,\theta = \frac{أب}{أجـ} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\theta = جا^{-١}\,\frac{٣}{٥}$

∴ $\theta = ٣٦°\,٥٢'\,١٢''$

∴ $\theta^{د} = ٣٦°\,٥٢'\,١٢'' \times \frac{\pi}{١٨٠°} \simeq ٠,٦٤٤^{د}$

١١



∵ $جا\,\theta = \frac{أب}{أجـ}$

$= \frac{١٠}{١٦} = \frac{٥}{٨}$

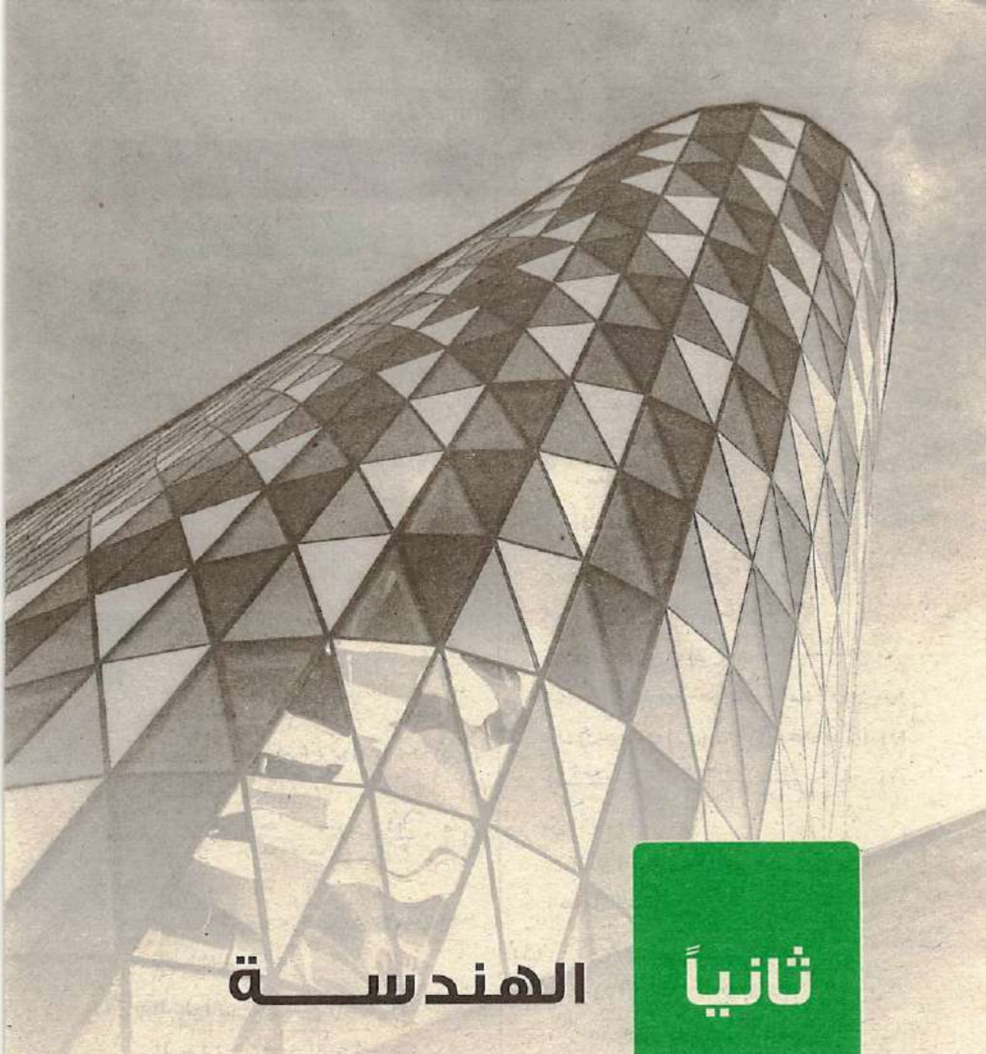
∴ $\theta = جا^{-١}\,\frac{٥}{٨}$

∴ $\theta \simeq ٣٨,٦٨٢°$

١٢

∵ $جا\,\theta = \frac{أجـ}{أب} = \frac{٨}{٦٥}$

∴ $\theta = جا^{-١}\,\frac{٨}{٦٥}$ ∴ $\theta \simeq ٧°\,٤'\,١١''$



ثانياً

الهندسة

إرشادات الوحـدة الثالثة

إرشادات تمـارين 1

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (ب) (٤) (ب)
(٥) (د) (٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (أ)
(٩) (جـ) (١٠) (جـ) (١١) (جـ) (١٢) (د)
(١٣) (أ) (١٤) (أ) (١٥) (أ) (١٦) (د)
(١٧) (أ) (١٨) (جـ) (١٩) (د) (٢٠) (ب)
(٢١) (جـ) (٢٢) (جـ) (٢٣) (ب) (٢٤) (أ)
(٢٥) (أ) (٢٦) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ ق(∠ب) = ق(∠س)
، ق(∠جـ) = ق(∠ص) ، ق(∠د) = ق(∠ع)
∴ ق(∠أ) = ق(∠ل) (١)
، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{ل س}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ل ع}} = \frac{5}{4}$ (٢)
من (١) ، (٢):
∴ المضلع أ ب جـ د ~ المضلع ل س ص ع
، معامل التشابه = $\frac{5}{4}$

(٢) ∵ المضلع و ز س هـ مربع ، المضلع أ ب جـ د مربع
∴ المربع و ز س هـ ~ المربع أ ب جـ د
، معامل التشابه = $\frac{8}{5}$

(٣) ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{س ص}} \neq \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}$ ∴ المضلعان غير متشابهين

(٤) ∵ المضلع أ ب جـ د متوازى أضلاع
∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°
، ∵ المضلع ز و هـ س متوازى أضلاع
∴ ق(∠ز) = ١٨٠° − ١١٠° = ٧٠°
، ∵ ق(∠أ) = ق(∠ز) ، ق(∠ب) = ق(∠و)
، ق(∠جـ) = ق(∠هـ)
، ق(∠د) = ق(∠س) (١)
، $\frac{\text{أب}}{\text{ز و}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{هـ س}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ز س}} = \frac{3}{4}$ (٢)
من (١) ، (٢):
∴ متوازى الأضلاع أ ب جـ د
~ متوازى الأضلاع ز و هـ س
، معامل التشابه = $\frac{3}{4}$

(٥) ∵ المضلع أ ب جـ د معين
∴ ق(∠أ) = ق(∠جـ) = $\frac{360^\circ - 140^\circ}{2} = 110^\circ$
، ∵ المضلع ص س ل ع معين
∴ ق(∠س) = ق(∠ع) = $\frac{360^\circ - 220^\circ}{2} = 70^\circ$
، ∵ ق(∠أ) = ق(∠ص) ، ق(∠ب) = ق(∠س)
، ق(∠جـ) = ق(∠ل) ، ق(∠د) = ق(∠ع) (١)
، $\frac{\text{أب}}{\text{ص س}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ل}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ل ع}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ص ع}} = \frac{10}{7}$ (٢)
من (١) ، (٢):
∴ المعين أ ب جـ د ~ المعين ص س ل ع
، معامل التشابه = $\frac{10}{7}$

(٦) ∵ $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ قاطع لهما
∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ق(∠ب)
، ∵ $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{س ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل ع}}$ قاطع لهما
∴ ق(∠ع) = ١٨٠° − ق(∠ل)
، ∵ ق(∠ب) = ق(∠ل)
∴ ق(∠أ) = ق(∠ع)
، ∵ ق(∠أ) = ق(∠ع) ، ق(∠ب) = ق(∠ل)
، ق(∠جـ) = ق(∠س)
∴ ق(∠د) = ق(∠ص) (١)

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ل س}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ع ص}} = \frac{٥}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع ع ل س ص

معامل التشابه = $\frac{٥}{٤}$

٢

∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ن ك ل

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ن ك}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ك ل}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ن ل}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{١٥}{١٠} = \frac{١٢}{\text{س}} = \frac{١٤}{\text{ص}}$

∴ معامل التشابه = $\frac{١٥}{١٠} = \frac{٣}{٢}$ (المطلوب أولاً)

، س = ٨ سم ، ص = $٩\frac{١}{٣}$ سم (المطلوب ثانيًا)

٣

∵ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع هـ و ز ح

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{و ز}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ز ح}} = \frac{\text{ء أ}}{\text{ح هـ}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{(\text{ص} + ٢)}{٦} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{و ز}} = \frac{١٥}{\text{س}} = \frac{١٢}{٨}$

∴ معامل التشابه = $\frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$ (المطلوب أولاً)

، س = ١٠ سم ، ص + ٢ = ٩

∴ ص = ٧ سم (المطلوب ثانيًا)

٤

∵ Δ أ ء هـ ~ Δ أ ب حـ

∴ ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ ب) وهما متناظرتان

∴ $\overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{ب حـ}}$ (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ حـ}}$ ∴ $\frac{٦}{\text{أب}} = \frac{٤}{١٢} = \frac{٥}{\text{أ حـ}}$

∴ أب = ١٨ سم ∴ ب ء = ١٢ سم

، أ حـ = ١٥ سم

∴ حـ هـ = ١٠ سم (المطلوب ثانيًا)

٥

∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ء و}} = \frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب حـ}}{\text{محيط } \Delta \text{ ء هـ و}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{٨} = \frac{\text{ب حـ}}{٩} = \frac{\text{أ حـ}}{١٠} = \frac{٨١}{٢٧}$

∴ أب = ٢٤ سم ، ب حـ = ٢٧ سم

، أ حـ = ٣٠ سم (وهو المطلوب)

٦

بفرض أن بعدي المستطيل الثاني هما س سم ، ص سم

∵ المستطيلان متشابهان ∴ $\frac{٨}{\text{س}} = \frac{١٢}{\text{ص}} = \frac{٤٠}{٢٠٠}$

∴ س = ٤٠ سم ، ص = ٦٠ سم

∴ مساحة المستطيل الثاني = ٤٠ × ٦٠ = ٢٤٠٠ سم^{٢}

(وهو المطلوب)

٧

∵ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ س) = ١١٥°

∴ ق(∠ س ل ع) = ٣٦٠° − (١١٥° + ٨٥° + ٧٠°)

= ٩٠°

، ∵ المضلع أ ب حـ ء ~ المضلع س ص ع ل

∴ $\frac{\text{ء أ}}{\text{ل س}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{محيط المضلع أ ب حـ ء}}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}}$

∴ $\frac{\text{ء أ}}{٤,٨} = \frac{٦}{٨} = \frac{١٩,٥}{\text{محيط المضلع س ص ع ل}}$

∴ ء أ = ٣,٦ سم (المطلوب أولاً)

، محيط المضلع س ص ع ل = ٢٦ سم (المطلوب ثانيًا)

٨

(١) س ص (٢) حـ ء (٣) أ ء

(٤) س ص ع ل ، أ ب حـ ء

٩

∵ Δ م أ ب ~ Δ م حـ ء ∴ ق(∠ أ) = ق(∠ حـ)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب ء}}$ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب ء حـ رباعى دائرى (المطلوب أولاً)

، ∵ Δ م أ ب ~ Δ م حـ ء

∴ $\frac{\text{م أ}}{\text{م حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{حـ ء}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ء}}$ ∴ $\frac{٤,٨}{\text{م حـ}} = \frac{٨}{٤} = \frac{\text{م ب}}{٢,٥}$

∴ م حـ = ٢,٤ سم ، م ب = ٥ سم

∴ ب حـ = ٢,٤ + ٥ = ٧,٤ سم (المطلوب ثانيًا)

١٠

(١) لاحظ أن المثلث المطلوب تكبير للمثلث أ ب حـ

وبفرض أن Δ أَ بَ حَ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ حَ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أَ حَ}}{\text{أ حـ}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{٥} = \frac{\text{بَ حَ}}{٦} = \frac{\text{أَ حَ}}{٩} = ٢,٥$

∴ أَ بَ = ١٢,٥ سم ، بَ حَ = ١٥ سم

، أَ حَ = ٢٢,٥ سم (وهو المطلوب)

(٢) لاحظ أن المثلث المطلوب تصغير للمثلث أ ب حـ

وبفرض أن Δ أَ بَ حَ ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ حَ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{أَ حَ}}{\text{أ حـ}}$ = معامل التشابه

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{٥} = \frac{\text{بَ حَ}}{٦} = \frac{\text{أَ حَ}}{٩} = ٠,٦$

∴ أَ بَ = ٣ سم ، بَ حَ = ٣,٦ سم

، أَ حَ = ٥,٤ سم (وهو المطلوب)

١١

(١) لاحظ أن المستطيل المطلوب تكبير للمستطيل المعطى

وبفرض أن المستطيل أَ بَ حَ ءَ ~ المستطيل أ ب حـ ء

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ حَ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{محيط المستطيل أَ بَ حَ ءَ}}{\text{محيط المستطيل أ ب حـ ء}}$

= معامل التشابه

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{١٠} = \frac{\text{بَ حَ}}{٦} = \frac{\text{محيط المستطيل أَ بَ حَ ءَ}}{٣٢} = ٣$

∴ أَ بَ = ٣٠ سم ، بَ حَ = ١٨ سم

محيط المستطيل أَ بَ حَ ءَ = ٩٦ سم

، مساحة المستطيل أَ بَ حَ ءَ

= ٣٠ × ١٨ = ٥٤٠ سم^2 (وهو المطلوب)

(٢) لاحظ أن المستطيل المطلوب تصغير للمستطيل المعطى

وبفرض أن المستطيل أَ بَ حَ ءَ ~ المستطيل أ ب حـ ء

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{بَ حَ}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{محيط المستطيل أَ بَ حَ ءَ}}{\text{محيط المستطيل أ ب حـ ء}}$

= معامل التشابه

∴ $\frac{\text{أَ بَ}}{١٠} = \frac{\text{بَ حَ}}{٦} = \frac{\text{محيط المستطيل أَ بَ حَ ءَ}}{٣٢}$

= ٠,٤

∴ أَ بَ = ٤ سم ، بَ حَ = ٢,٤ سم

، محيط المستطيل أَ بَ حَ ءَ = ١٢,٨ سم

، مساحة المستطيل أَ بَ حَ ءَ

= ٤ × ٢,٤ = ٩,٦ سم^2 (وهو المطلوب)

١٢

∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ ء أ ب)

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ مماسة للدائرة المارة برءوس Δ أ ء حـ

(المطلوب أولاً)

∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}$

∴ (أ ب)^2 = ء ب × ب حـ

∴ أ ب وسط متناسب بين ب ء ، ب حـ (المطلوب ثانيًا)

∵ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{ء أ}}$

∴ $\frac{٦}{\text{ء ب}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٧,٥}{\text{ء أ}}$

∴ ء أ = ٥ سم ، ء ب = ٤ سم

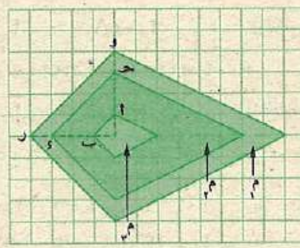
∴ حـ ء = ٩ − ٤ = ٥ سم (المطلوب ثالثًا)

١٣

نفرض أن طول ضلع المربع = وحدة طولية

∴ طول قطر المربع = $\sqrt{٢}$ وحدة طولية

(١)



من فيثاغورث :

∴ ا ب = $\sqrt{٢}$ وحدة طولية

، حـ ء = ٣ $\sqrt{٢}$ وحدة طولية

، و ر = ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طولية

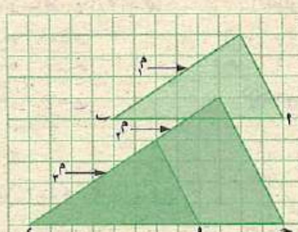
∴ معامل تشابه المضلع م$_١$ للمضلع م$_٣$

$= \frac{\text{و ر}}{\text{ا ب}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٤$

∴ معامل تشابه المضلع م$_٢$ للمضلع م$_٣$

$= \frac{\text{حـ ء}}{\text{ا ب}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٣$

(٢)



∵ ا ب = ٨ وحدة طولية

، حـ ء = ١٢ وحدة طولية

، و ء = ٨ وحدة طولية

∴ معامل تشابه المضلع م$_١$ للمضلع م$_٣$

$= \frac{\text{و ء}}{\text{ا ب}} = \frac{٨}{٨} = ١$

، معامل تشابه المضلع م$_٢$ للمضلع م$_٣$

$= \frac{\text{حـ ء}}{\text{ا ب}} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

ثالثًا **مسائل تقيس مهارات التفكير**

∵ المستطيل ا ب حـ ء ~ المستطيل ا هـ و ن

∴ $\frac{\text{محيط المستطيل ا ب حـ ء}}{\text{محيط المستطيل ا هـ و ن}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا هـ}}$

$= \frac{\text{ا ء}}{\text{ا ن}} = \frac{\text{ا ب} - \text{ا ء}}{\text{ا هـ} - \text{ا ن}}$ (وهو المطلوب)

إرشادات تمارين 2

أولًا **أسئلة الاختيار من متعدد**

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (جـ) (٥) (ب)

(٦) (أ) (٧) (د) (٨) (د) (٩) (جـ) (١٠) (جـ)

(١١) (أ) (١٢) (ب) (١٣) (ب) (١٤) (ب) (١٥) (د)

(١٦) (جـ) (١٧) (د) (١٨) (جـ) (١٩) (ب) (٢٠) (جـ)

(٢١) (ب) (٢٢) (د) (٢٣) (أ) (٢٤) (ب) (٢٥) (ب)

(٢٦) (جـ) (٢٧) (جـ) (٢٨) (ب) (٢٩) (جـ) (٣٠) (ب)

(٣١) (ب) (٣٢) (د) (٣٣) (د) (٣٤) (د) (٣٥) (ب)

(٣٦) (د) (٣٧) (ب) (٣٨) (ب) (٣٩) (جـ) (٤٠) (جـ)

(٤١) (ب) (٤٢) (أ) (٤٣) (ب) (٤٤) (د) (٤٥) (أ)

(٤٦) (أ)

ثانيًا **الأسئلة المقالية**

١

(١) في $\triangle$ ا ب حـ :

ق(∠ا) = ١٨٠° − (٨٠° + ٥٥°) = ٤٥°

∴ ق(∠ا) = ق(∠ء) = ٤٥°

، ق(∠حـ) = ق(∠و) = ٥٥°

∴ $\triangle$ ا ب حـ ~ $\triangle$ ء هـ و

(٢) فى Δ أ ب حـ :

ق(∠ب) = ١٨٠° − (٦٥° + ٣٠°) = ٨٥°

، فى Δ س ص ع :

ق(∠س) = ١٨٠° − (٧٥° + ٦٥°) = ٤٠°

∴ فى ΔΔ أ ب حـ ، س ص ع :

فقط ق(∠أ) = ق(∠ص)

∴ المثلثان غير متشابهين.

(٣) ∵ $\overline{\text{أحـ}} \parallel \overline{\text{ءب}}$ ∴ Δ أ هـ حـ ~ Δ ب هـ ء

(٤) ∵ ΔΔ أ ب حـ ، ء هـ و متساويا الأضلاع

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء هـ و

(٥) ∵ ΔΔ أ ب حـ ، س ع ص متساويا الساقين

، ق(∠ب) = ق(∠ع) = ٧٠°

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ س ع ص

(٦) ΔΔ أ ء هـ ، أ ب حـ غير متشابهين.

(٧) Δ س ص ع ~ Δ ن ل م

لأن : $\frac{\text{س ص}}{\text{ن ل}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ل م}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ن م}} = \frac{٣}{٢}$

(٨) Δ أ هـ حـ ~ Δ ب هـ ء

لأن : $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{حـ هـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{١}{٢}$

، ق(∠أ هـ حـ) = ق(∠ب هـ ء) (بالتقابل بالرأس)

٢

∵ $\frac{\text{س ب}}{\text{أ ب}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{ب ص}}{\text{ب حـ}} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$

، $\frac{\text{س ص}}{\text{أ حـ}} = \frac{١٣,٥}{١٨} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{س ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب ص}}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{أ حـ}}$

∴ Δ س ب ص ~ Δ أ ب حـ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق(∠س ب ص) = ق(∠أ ب حـ)

∴ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ينصف ∠ أ ب س (المطلوب ثانيًا)

٣

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب أ}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

، $\frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ء}} = \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{أ ء}}$

∴ Δ أ ب حـ ~ Δ ء ب أ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ب حـ)

∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ينصف ∠ ء ب حـ (المطلوب ثانيًا)

٤

أ هـ = ٦ − ٢ = ٤ سم

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ ΔΔ أ هـ ء ، أ ب حـ فيهما : ∠أ مشتركة

، $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}} = \frac{١}{٢}$

∴ Δ أ ء هـ ~ Δ أ حـ ب (وهو المطلوب)

٥

∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{٧,٥}{١٠} = \frac{٣}{٤}$ ، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

∴ ΔΔ أ ب هـ ، ء حـ هـ فيهما : $\frac{\text{أ هـ}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}} = \frac{٣}{٤}$

، ق(∠أ هـ ب) = ق(∠حـ هـ ء) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ ء حـ هـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}}$ ∴ $\frac{٦}{\text{ء حـ}} = \frac{٣}{٤}$

∴ ء حـ = ٨ سم (المطلوب ثانيًا)

٦

∵ ΔΔ أ ب م ، أ حـ ب فيهما :

∠أ مشتركة ، ق(∠أ ب م) = ق(∠حـ)

∴ Δ أ ب م ~ Δ أ حـ ب

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب م}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{أ م}}{\text{أ ب}}$

∴ (أ ب)^{٢} = أ م × أ حـ (وهو المطلوب)

٧

(١) $\triangle$ أ د هـ ~ $\triangle$ أ ب جـ

، $\triangle$ أ د س ~ $\triangle$ أ ب ص

، $\triangle$ أ س هـ ~ $\triangle$ أ ص جـ

(٢) ∵ $\triangle$ أ د هـ ~ $\triangle$ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ (١)

∵ $\triangle$ أ د س ~ $\triangle$ أ ب ص

∴ $\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{د س}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{أ س}}{\text{أ ص}}$ (٢)

∵ $\triangle$ أ س هـ ~ $\triangle$ أ ص جـ

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{أ ص}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{ص جـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}}$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ $\frac{\text{د س}}{\text{ب ص}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{ص جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}}$ (وهو المطلوب)

٨

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د ب}} = \frac{٦}{٤,٥} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب و}} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$

∴ $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ د ب و (المطلوب أولاً)

∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ ب و د)

، ∵ ق (∠ ب و د) = ق (∠ هـ و جـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ هـ و جـ)

∴ $\triangle$ هـ و جـ متساوى الساقين (المطلوب ثانيًا)

٩

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ د}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب جـ}}$

، ∵ $\frac{\text{ب د}}{\text{أ د}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{ب جـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{هـ ب}}$

∴ $\triangle$ د ب أ ~ $\triangle$ ب هـ جـ

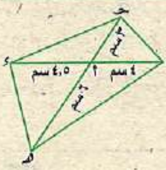
وينتج أن : ق (∠ أ د ب) = ق (∠ جـ ب هـ) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (المطلوب أولًا)

، ق (∠ أ ب د) = ق (∠ جـ هـ ب) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ هـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

١٠



∵ $\triangle\triangle$ أ ب جـ ، أ هـ د

فيهما :

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ د}}$ (كل = $\frac{٢}{٣}$)

، ق (∠ ب أ جـ) = ق (∠ هـ أ د) (بالتقابل بالرأس)

∴ $\triangle$ أ ب جـ ~ $\triangle$ أ هـ د

وينتج أن : ق (∠ أ جـ ب) = ق (∠ أ د هـ)

وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب هـ}}$ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل ب جـ د هـ رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

١١

∵ $\triangle\triangle$ ب د هـ ، ب أ جـ فيهما :

$\frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

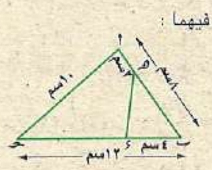
، $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب جـ}}$

، ∵ ∠ ب مشتركة

∴ $\triangle$ ب د هـ ~ $\triangle$ ب أ جـ ، $\frac{\text{د هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{١}{٢}$

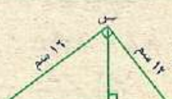
∴ $\frac{\text{د هـ}}{١٠} = \frac{١}{٢}$ ∴ د هـ = ٥ سم (المطلوب أولاً)



وينتج من التشابه أن : ق (∠ ب د هـ) = ق (∠ ب أ جـ)

∴ الشكل أ جـ د هـ رباعى دائرى (المطلوب ثانيًا)

١٢



∵ $(\text{س ص})^2$ = ص ل × ص ع

، $(\text{س ع})^2$ = ع ل × ع ص

∴ $\frac{\text{(س ص)}^{٢}}{\text{(س ع)}^{٢}} = \frac{\text{ص ل}}{\text{ل ع}}$ (المطلوب أولاً)

، ∵ (ص ع)^{٢} = (س ص)^{٢} + (س ع)^{٢}

= ١٤٤ + ٢٥٦ = ٤٠٠

∴ ص ع = ٢٠ سم

، ∵ (س ص)^{٢} = ص ل × ص ع

∴ ١٤٤ = ص ل × ٢٠

∴ ص ل = ٧,٢ سم (المطلوب ثانياً)

، س ل = $\frac{\text{س ص × س ع}}{\text{ص ع}} = \frac{١٢ \times ١٦}{٢٠}$ = ٩,٦ سم

(المطلوب ثالثاً)

١٣

∵ أ ب جـ ء متوازي أضلاع ∴ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{أى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ Δ أ هـ ى ~ Δ جـ هـ ب (المطلوب أولاً)

∴ $\boxed{\frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{هـ ى}}{\text{هـ ب}}} = \frac{\text{أى}}{\text{ب جـ}}$ (١)

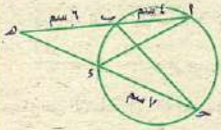
، ∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{جـ و}}$ ∴ Δ أ ب هـ ~ Δ جـ و هـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{جـ و}} = \boxed{\frac{\text{ب هـ}}{\text{و هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{هـ ى}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{و هـ}}$

∴ (هـ ب)^{٢} = هـ ى × و هـ (المطلوب ثانياً)

١٤



∵ ∠ أ ، ∠ جـ

تحصران $\overset{\frown}{\text{ب ء}}$

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ جـ)

، ∵ ∠ هـ مشتركة

∴ Δ ء أ هـ ~ Δ جـ ب هـ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{ء هـ}}{\text{ب هـ}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ء هـ}}{٦} = \frac{١٠}{\text{٧ + ء هـ}}$

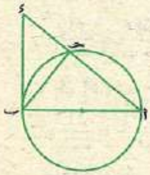
∴ ٧ ء هـ + (ء هـ)^{٢} = ٦٠

∴ (ء هـ)^{٢} + ٧ ء هـ − ٦٠ = ٠

∴ (ء هـ + ١٢) (ء هـ − ٥) = ٠ ∴ ء هـ = ٥ سم

∴ جـ هـ = ١٢ سم (المطلوب ثانياً)

١٥



∵ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة عند ب

∴ $\overline{\text{أب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

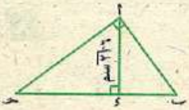
، ∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠°

∴ Δ أ ب ء قائم الزاوية فى ب ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

∴ (ب جـ)^{٢} = جـ أ × جـ ء (وهو المطلوب)

١٦



∵ ء جـ = ٢ ب ء

، أ ء = ٦$\sqrt{٢}$ سم

، ∵ (أ ء)^{٢} = ء ب × ء جـ

∴ $(٦\sqrt{٢})^{٢}$ = ء ب × ٢ ء ب ∴ ٧٢ = ٢ (ب ء)^{٢}

∴ (ب ء)^{٢} = ٣٦ ∴ ب ء = ٦ سم

∴ جـ ء = ١٢ سم ∴ (أب)^{٢} = ٦ × ١٨ = ١٠٨

∴ أب = ٦$\sqrt{٣}$ سم ، (أ جـ)^{٢} = ١٢ × ١٨ = ٢١٦

∴ أ جـ = ٦$\sqrt{٦}$ سم (وهو المطلوب)

١٧

∵ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٩٠° (بالتبادل)

∴ ΔΔ أ ب جـ ، هـ أ ء فيهما :

$\frac{\text{أب}}{\text{هـ أ}} = \frac{٢}{١}$ = ٢ (لأن هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$)

، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ء}} = \frac{١٢}{٦}$ = ٢

، ق(∠ أ) = ق(∠ ب) = ٩٠°

∴ ∆ أ ب جـ ~ ∆ هـ أ ء (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن :

ق(∠ب أ جـ) = ق(∠أ هـ ء) وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أجـ}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

١٨

∵ $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{\text{بجـ}}{\text{بأ}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

∴ ∆∆ أ ب جـ ، ء ب أ فيهما :

$\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{بأ}} = \frac{٣}{٢}$ ، ∠ب مشتركة

∴ ∆ أ ب جـ ~ ∆ ء ب أ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أء}}$ ∴ $\frac{٦}{٤} = \frac{٨}{\text{أء}}$

∴ أء = ٥ $\frac{١}{٣}$ سم (المطلوب ثانيًا)

ومن التشابه ينتج أن : ق(∠ب أ ء) = ق(∠جـ)

∴ $\overline{\text{أب}}$ مماسة للدائرة المارة برءوس ∆ أ ء جـ

(المطلوب ثالثًا)

١٩

∵ $\frac{\text{كـ ى}}{\text{هـ ل}} = \frac{٤,٥}{٩} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{هـ ى}}{\text{ل م}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

، $\frac{\text{هـ كـ}}{\text{هـ م}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ∴ ∆ كـ ى هـ ~ ∆ هـ ل م

∴ ق(∠ى كـ هـ) = ق(∠ل هـ م) وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{\text{ى كـ}}$ // $\overline{\text{ل هـ}}$

، ق(∠ى هـ كـ) = ق(∠ل م هـ) وهما فى وضع تناظر

∴ $\overline{\text{هـ ى}}$ // $\overline{\text{ل م}}$

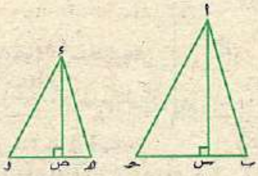
، ∵ $\overline{\text{ل هـ}}$ // $\overline{\text{ى كـ}}$ ∴ ∆ ن كـ ى ~ ∆ ن هـ ل

∴ $\frac{\text{ن كـ}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{كـ ى}}{\text{هـ ل}} = \frac{٤,٥}{٩}$

∴ $\frac{\text{ن كـ}}{\text{ن كـ} + ٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ ٢ ن كـ = ن كـ + ٤

∴ ن كـ = ٤ سم (وهو المطلوب)

٢٠



∵ ∆ أ ب جـ ~ ∆ ء هـ و

∴ ق(∠ب) = ق(∠هـ) ، ق(∠جـ) = ق(∠و)

∴ فى ∆∆ أ ب س ، ء هـ ص :

∵ ق(∠ب) = ق(∠هـ)

، ق(∠ب س أ) = ق(∠هـ ص ء) = ٩٠°

∴ ∆ أ ب س ~ ∆ ء هـ ص

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{ب س}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{أس}}{\text{ءص}}$ (١)

، فى ∆∆ أ س جـ ، ء ص و :

∵ ق(∠جـ) = ق(∠و)

، ق(∠أ س جـ) = ق(∠ء ص و) = ٩٠°

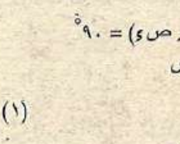
∴ ∆ أ س جـ ~ ∆ ء ص و

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{ءص}} = \frac{\text{س جـ}}{\text{ص و}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{هـ ص}} = \frac{\text{س جـ}}{\text{ص و}}$

∴ ب س × ص و = س جـ × ص هـ (وهو المطلوب)

٢١



∵ $(\text{أجـ})^2 = ٢٢٥$

، $(\text{أب})^2 + (\text{بجـ})^2 = ٢٢٥$

∴ ∠ب قائمة

∴ $\overline{\text{هـء}}$ // $\overline{\text{أب}}$ ∴ ∆ جـ هـ ء ~ ∆ جـ أ ب

∴ $\frac{\text{جـء}}{\text{جـب}} = \frac{\text{هـء}}{\text{أب}}$ ∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{\text{هـء}}{٩}$

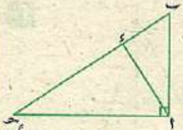
∴ هـء = ٦ $\frac{٣}{٤}$ سم ، ب ء = ١٢ × $\frac{١}{٤}$ = ٣ سم

∴ الشكل أ ب ء هـ شبه منحرف مساحته

= $\frac{\text{أب} + \text{ءهـ}}{٢}$ × ب ء = $\frac{٩ + ٦\frac{٣}{٤}}{٢}$ × ٣

= ٢٣ $\frac{٥}{٨}$ سم² (وهو المطلوب)

٢٢



∵ △△ د ب أ ، أ ب جـ فيهما :

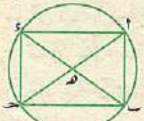
$\frac{\text{د ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$ ، ∠ ب مشتركة

∴ △ د ب أ ~ △ أ ب جـ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق(∠ أ د ب) = ق(∠ جـ أ ب) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أد}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

٢٣



△△ أ ب هـ ، د ب جـ فيهما :

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{د جـ}}$

، ق(∠ ب أ هـ) = ق(∠ ب د جـ)

(محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$)

∴ △ أ ب هـ ~ △ د ب جـ (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ د ب جـ)

∴ $\overrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ أ ب جـ (المطلوب ثانيًا)

٢٤

∵ ∠ جـ تتمم ∠ د أ جـ ، ∠ هـ أ د تتمم ∠ د أ جـ

∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ هـ أ د)

، ق(∠ د هـ أ) = ق(∠ د و جـ) = ٩٠°

∴ △ أ د هـ ~ △ جـ د و (المطلوب أولاً)

∵ (د هـ)^2 = أ هـ × هـ ب ∴ د هـ = $\sqrt{\text{أ هـ × هـ ب}}$

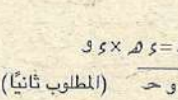
، (د و)^2 = أ و × و جـ

∴ د و = $\sqrt{\text{أ و × و جـ}}$

∴ مساحة المستطيل أ هـ د و = د هـ × د و

= $\sqrt{\text{أ هـ × هـ ب × أ و × و جـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

٢٥



∵ △△ أ ب جـ ، هـ س ص

فيهما :

ق(∠ ب) = ق(∠ هـ س ص) (بالتناظر)

، ق(∠ جـ) = ق(∠ هـ ص س) (بالتناظر)

∴ △ أ ب جـ ~ △ هـ س ص (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ س}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}}$ (١)

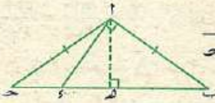
، ∵ $\overline{\text{هـ س}} \,//\, \overline{\text{أ ب}}$ ∴ △ د أ ب ~ △ د هـ س

∴ $\frac{\text{د أ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{هـ س}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{أ د}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{س ص}}$

∴ س ص × أ د = ب جـ × د هـ (المطلوب ثانيًا)

٢٦



العمل : نرسم $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

البرهان :

∵ أ ب = أ جـ ، $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

، ∵ (أ ب)^2 = ب هـ × ب د

∴ (أ ب)^2 = $\frac{1}{2}$ ب جـ × ب د

∴ ٢ (أ ب)^2 = ب د × ب جـ (وهو المطلوب)

٢٧

∵ △△ ب س أ ، جـ د أ فيهما : $\frac{\text{ب س}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{جـ أ}}$

، ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) (محيطيتان تحصران $\overset{\frown}{\text{أ د}}$)

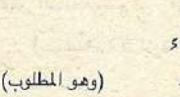
∴ △ ب س أ ~ △ جـ د أ (المطلوب أولاً)

وينتج أن : ق(∠ أ س ب) = ق(∠ أ د جـ)

∴ ق(∠ أ د جـ) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر فى الدائرة. (المطلوب ثانيًا)

٢٨



∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ أ ب جـ)

= ق(∠ أ جـ ب)

∴ ق(∠ أ ب د) = ق(∠ أ جـ هـ) (١)

، ∵ (أ ب)^2 = د ب × جـ هـ

∴ دب/أب = أب/جـهـ   ∴ دب/أجـ = أب/جـهـ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ Δ أبد ~ Δ هـجـأ (وهو المطلوب)

ثالثًا | مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د)   (٢) (جـ)   (٣) (ب)   (٤) (د)   (٥) (ب)

(٦) (ب)   (٧) (جـ)   (٨) (ب)   (٩) (ب)   (١٠) (ب)

(١١) (ب)   (١٢) (جـ)   (١٣) (د)   (١٤) (جـ)

إرشادات الحل :

(١) ∵ (س − ص)/(س + ص) = ٢/٧

∴ ٧ س − ٧ ص = ٢ س + ٢ ص

∴ ٥ س = ٩ ص   ∴ ص/س = ٥/٩

، ∵ دهـ // بجـ   ∴ أهـ/أجـ = دهـ/بجـ

∴ أهـ/(أهـ + ٨) = ص/س = ٥/٩

∴ ٩ أهـ = ٥ أهـ + ٤٠

∴ ٤ أهـ = ٤٠   ∴ أهـ = ١٠ سم

(٢) ∵ م نقطة تلاقى متوسطات Δ أبجـ

∴ أم/أد = ٢/٣

، أد متوسط فى Δ أبجـ

∴ د منتصف بجـ ، ∵ هـد // أجـ

∴ هـد = ١/٢ أجـ = ٩ سم

، فى Δ أهـد : ∵ وم // هـد

∴ Δ أوم ~ Δ أهـد

∴ وم/هـد = أم/أد   ∴ وم/٩ = ٢/٣

∴ وم = ٦ سم

(٣) فى ΔΔ أبجـ ، دبأ

∵ ق(∠بأجـ) = ق(∠د) ، ∠ب مشتركة

∴ Δ أبجـ ~ Δ دبأ

∴ أب/دب = بجـ/أب = أجـ/دأ

∴ ٦/(٥ + بجـ) = بجـ/٦

∴ ٣٦ = ٥ بجـ + (بجـ)^{٢}

∴ (بجـ)^{٢} + ٥ بجـ − ٣٦ = ٠

∴ (بجـ − ٤) (بجـ + ٩) = ٠

∴ بجـ = ٤ سم

(٤) فى ΔΔ أجـد ، أبجـ :

ق(∠أجـد) = ق(∠ب) ، ∠أ مشتركة

∴ Δ أجـد ~ Δ أبجـ

∴ أجـ/أب = جـد/بجـ = أد/أجـ

∴ س/(ص + ع) = ص/س

∴ س^{٢} = ص^{٢} + ص ع

∴ س^{٢} − ص^{٢} = ص ع = ١٦

(٥) ∵ Δ بدهـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠بدهـ) = ق(∠بهـد)

= ق(∠دبهـ) = ٦٠°

∴ ق(∠بدأ) = ق(∠بهـجـ) = ١٢٠°

، ∵ ق(∠دبهـ) = ٦٠°

∴ ق(∠أبد) + ق(∠جـبهـ) = ٦٠°

، ∵ ق(∠بأد) + ق(∠أبد)

= ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق(∠بأد) = ق(∠جـبهـ)

فى ΔΔ دأب ، هـبجـ :

∵ ق(∠أدب) = ق(∠بهـجـ) = ١٢٠°

، ق(∠بأد) = ق(∠جـبهـ)

∴ Δ دأب ~ Δ هـبجـ

∴ دأ/هـب = دب/هـجـ   ∴ ٩/س = س/٤

∴ س^{٢} = ٣٦   ∴ س = ٦ سم

(٦) ∵ ∠ هـ ء و خارجة عن المثلث ا ء حـ

∴ ق (∠ هـ ء و) = ق (∠ ٣) + ق (∠ حـ ا ء)

، ∵ ق (∠ ٣) = ق (∠ ١)

∴ ق (∠ هـ ء و) = ق (∠ ١) + ق (∠ حـ ا ء)

= ق (∠ حـ ا ب)

بالمثل يمكن إثبات أن ق (∠ ء و هـ) = ق (∠ ا ب حـ)

∴ △ ء هـ و ~ △ ا حـ ب

∴ ء هـ : هـ و : و ء = ا حـ : حـ ب : ب ا

= ١٢ : ١١ : ٧

(٧) في △ ء ا هـ : ∵ س ص // ا هـ

∴ ء س / ء ا = س ص / ا هـ

∴ ء س / (ء س + ٤) = ٦ / ٩ = ٢ / ٣

∴ ٣ ء س = ٢ ء س + ٨

∴ ء س = ٨ سم

في △ ا ب حـ : ∵ ء هـ // ب حـ ،

∴ ا هـ / ا حـ = ا ء / ا ب ∴ ٩ / ١٢ = ١٢ / ا ب

∴ ا ب = ١٦ سم

∴ ء ب = ١٦ − ١٢ = ٤ سم

(٨) في △△ ا ب حـ ، هـ ء حـ

∵ ق (∠ ا حـ ب) + ق (∠ هـ حـ ء) = ٩٠°

في △ ا ب حـ : ق (∠ ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ ا حـ ب) + ق (∠ حـ ا ب) = ٩٠°

∴ ق (∠ حـ ا ب) = ق (∠ هـ حـ ء)

∴ △ ا ب حـ ~ △ حـ ء هـ

∴ ا ب / حـ ء = ب حـ / ء هـ = ا حـ / حـ هـ

∴ ٣ / ٦ = س / ص ∴ ص = ٢ س

∵ س² + ص² = (٥ √٥)²

∴ س² + (٢ س)² = ١٢٥

∴ ٥ س² = ١٢٥ ∴ س² = ٢٥

∴ س = ٥ ∴ ص = ١٠

∴ س + ص = ٥ + ١٠ = ١٥ سم

(٩) في الشكل الرباعي ا س و ع :

∵ ق (∠ ا س و) + ق (∠ ا ع و) = ١٨٠°

∴ ا س و ع شكل رباعي دائري

∴ ق (∠ ء و هـ) = ق (∠ ا)

بالمثل ق (∠ و ء هـ) = ق (∠ ب)

∴ △ ا ب حـ ~ △ و ء هـ

∴ ا ب / و ء = ب حـ / ء هـ = ا حـ / و هـ

∴ ١٢ / ٤ = ٩ / و هـ ∴ و هـ = ٣ سم

(١٠) في △ ا ب حـ : ∵ ق (∠ ا) = ٩٠°

∴ ∠ ب تتمم ∠ حـ

في △ ص و حـ : ∵ ق (∠ و) = ٩٠°

∴ ∠ حـ تتمم ∠ و ص حـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ و ص حـ)

في △△ ب هـ ء ، ص و حـ

∵ ق (∠ ء هـ ب) = ق (∠ ص و حـ) = ٩٠°

، ق (∠ ب) = ق (∠ و ص حـ)

∴ △ ب هـ ء ~ △ ص و حـ

∴ ب هـ / ص و = هـ ء / و حـ = ب ء / ص حـ

∴ ٨ / ص و = هـ ء / ٢ ∴ ص و × هـ ء = ١٦

∵ ء هـ و ص مربع ∴ ص و = هـ ء

∴ مساحة المربع ء هـ و ص = (ص و)² = ١٦ سم²

(١١) في △ ا ب حـ : ∵ هـ و // ا ب

∴ حـ و / حـ ب = هـ و / ٣ (١)

، في △ ء ب حـ : ∵ هـ و // ء حـ

∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{و هـ}}{٦}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{جـ و}}{\text{ب جـ}} + \frac{\text{ب و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{و هـ}}{٢} + \frac{\text{و هـ}}{٦}$

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{٢ هـ و} + \text{هـ و}}{٦}$

∴ $\frac{\text{٣ هـ و}}{٦} = ١$ ∴ هـ و = ٢ سم

(١٢) في Δ أ ب جـ : ∵ $\overline{\text{د هـ}} // \overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}}$ (١)

في Δ أ د ب : ∵ $\overline{\text{و هـ}} // \overline{\text{د ب}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{و هـ}}{\text{د ب}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} + \frac{\text{أ هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}} + \frac{\text{و هـ}}{\text{د ب}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ب}} = \frac{٦}{١٤} + \frac{\text{و هـ}}{٦}$

∴ $\frac{\text{و هـ}}{٦} = ١ - \frac{٣}{٧} = \frac{٤}{٧}$

∴ و هـ = $\frac{٢٤}{٧}$ سم

(١٣) ∵ ∠ أ هـ جـ تكمل ∠ ب هـ جـ

، ∠ أ جـ ب تكمل ∠ أ جـ د

، ∵ ق(∠ ب هـ جـ) = ق(∠ أ جـ د)

∴ ق(∠ أ هـ جـ) = ق(∠ أ جـ ب)

في ΔΔ أ هـ جـ ، أ جـ ب

∵ ق(∠ أ هـ جـ) = ق(∠ أ جـ ب)

، ∠ أ مشتركة

∴ Δ أ هـ جـ ~ Δ أ جـ ب

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{٤}{٨} = \frac{٦}{\text{جـ ب}} = \frac{٨}{\text{أ ب}}$

∴ جـ ب = ١٢ سم ، أ ب = ١٦ سم

∴ ب هـ = ١٦ − ٤ = ١٢ سم

∴ ب هـ + ب جـ = ١٢ + ١٢ = ٢٤ سم

(١٤) ∵ $\overline{\text{أ ب}} // \overline{\text{د جـ}}$

∴ Δ أ هـ ب ~ Δ جـ هـ د

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جـ د}} = \frac{٤}{٩}$

∴ أ هـ = ٤ س ، هـ جـ = ٩ س

، ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

∴ $(\text{أ ب})^{٢}$ = أ هـ × أ جـ

∴ ١٦ = ٤ س × ١٣ س

∴ $\text{س}^{٢} = \frac{٤}{١٣}$

، $(\text{ب جـ})^{٢}$ = جـ هـ × جـ أ = ٩ س × ١٣ س

= ٩ × ١٣ $\text{س}^{٢}$ = ٩ × ١٣ × $\frac{٤}{١٣}$

= ٣٦

∴ ب جـ = ٦ سم

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د = $\frac{٤ + ٩}{٢} \times ٦$

= ٣٩ $\text{سم}^{٢}$

إرشادات تمارين 3

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (جـ) (٥) (جـ)

(٦) (أ) (٧) (د) (٨) (أ) (٩) (جـ) (١٠) (ب)

(١١) (جـ) (١٢) (أ) (١٣) (أ) (١٤) (د) (١٥) (د)

(١٦) (د) (١٧) (أ) (١٨) (أ) (١٩) (جـ) (٢٠) (ب)

(٢١) (أ) (٢٢) (ب) (٢٣) (جـ) (٢٤) (جـ) (٢٥) (د)

(٢٦) (ب) (٢٧) (أ) (٢٨) (جـ) (٢٩) (ب) (٣٠) (جـ)

(٣١) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

∵ $\frac{\text{مساحة المثلث الأول}}{\text{مساحة المثلث الثانى}} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} = \frac{٩}{٤}$

وبفرض أن مساحة المثلث الأول = ٩ س

، مساحة المثلث الثانى = ٤ س

∴ ٩ س + ٤ س = ١٢٠   ∴ ١٣ س = ١٣٠

∴ س = ١٠

∴ مساحة المثلث الأول = ٩٠ سم^{2}

، مساحة المثلث الثانى = ٤٠ سم^{2} (وهو المطلوب)

٢

∵ النسبة بين طولى ضلعين متناظرين = ١ : ٣

∴ النسبة بين مساحتى المضلعين = ١ : ٩

وبفرض مساحة الأول = س

∴ مساحة الثانى = ٩ س   ∴ ٩ س − س = ٣٢

∴ ٨ س = ٣٢   ∴ س = ٤

∴ مساحة الأول = ٤ سم^{2}

، مساحة الثانى = ٣٦ سم^{2} (وهو المطلوب)

٣

∵ $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{دجـ}}$

∴ ق(∠ب) = ق(∠د جـ هـ) (متناظرتان) (١)

، ∵ $\overline{\text{أجـ}} \parallel \overline{\text{دهـ}}$

∴ ق(∠ب جـ أ) = ق(∠د هـ) (متناظرتان) (٢)

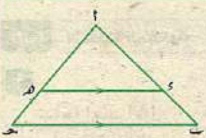
من (١)، (٢): ∴ △ أ ب جـ ~ △ د جـ هـ

∴ $\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أبجـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ دجـهـ}} = \left(\frac{\text{أب}}{\text{دجـ}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

∴ $\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أبجـ}}{16} = \frac{9}{4}$

∴ مساحة △ أ ب جـ = ٣٦ سم^{2} (وهو المطلوب)

٤



∵ $\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

∴ △ أ د هـ

~ △ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أدهـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ أبجـ}} = \left(\frac{\text{أد}}{\text{أب}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

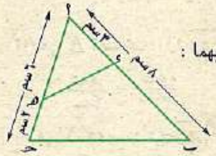
∴ $\frac{60}{\text{مساحة } \triangle \text{ أبجـ}} = \frac{4}{9}$

∴ مساحة △ أ ب جـ = ١٣٥ سم^{2}

∴ مساحة شبه المنحرف د ب جـ هـ

= ١٣٥ − ٦٠ = ٧٥ سم^{2} (وهو المطلوب)

٥



∵ △△ أ د هـ، أ جـ ب فيهما:

$\frac{\text{أد}}{\text{أجـ}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

، $\frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

، ∠أ مشتركة   ∴ △ أ د هـ ~ △ أ جـ ب

∴ $\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أدهـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ أجـب}} = \left(\frac{\text{أد}}{\text{أجـ}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

نفرض أن مساحة △ أ د هـ = س

∴ مساحة △ أ جـ ب = ٤ س

∴ مساحة الشكل د ب جـ هـ = ٤ س − س = ٣ س

∴ $\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أدهـ}}{\text{مساحة الشكل دبجـهـ}} = \frac{\text{س}}{\text{٣ س}} = \frac{1}{3}$

(وهو المطلوب)

٦

∵ △△ أ ب جـ، د ب أ فيهما:

∠ب مشتركة، ق(∠جـ) = ق(∠د أ ب)

∴ △ أ ب جـ ~ △ د ب أ (المطلوب أولًا)

وينتج أن: $\frac{\text{أب}}{\text{دب}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{بأ}}$

∴ $(\text{أب})^2$ = د ب × ب جـ = ٦ × ٩

∴ أ ب = $3\sqrt{6}$ سم (المطلوب ثانيًا)

∴ $\frac{\text{م}(\triangle \text{ أبجـ})}{\text{م}(\triangle \text{ دبأ})} = \left(\frac{\text{بجـ}}{\text{أب}}\right)^2 = \left(\frac{9}{3\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2}$

(المطلوب ثالثًا)

٧

∵ Δ ب هـ و ~ Δ أ ء و

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ ب هـ و})}{\text{م}(\Delta \text{ أ ء و})} = \left(\frac{\text{ب و}}{\text{أ و}}\right)^{٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$

، ∵ م(Δ ب هـ و) = ٩ سم^{٢}

∴ م(Δ أ ء و) = ٩ × ٤ = ٣٦ سم^{٢} (١)

، ∵ Δ ب هـ و ~ Δ حـ هـ ء

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ ب هـ و})}{\text{م}(\Delta \text{ حـ هـ ء})} = \left(\frac{\text{ب و}}{\text{حـ ء}}\right)^{٢}$

$= \left(\frac{\text{ب و}}{\text{ب أ}}\right)^{٢} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = \frac{١}{٩}$

، ∵ م(Δ ب هـ و) = ٩ سم^{٢}

∴ م(Δ حـ هـ ء) = ٩ × ٩ = ٨١ سم^{٢}

∴ م(المضلع ب و ء حـ)

= م(Δ حـ هـ ء) − م(Δ ب هـ و)

= ٨١ − ٩ = ٧٢ سم^{٢} (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = ١٠٨ سم^{٢}

(وهو المطلوب)

٨

∵ $\overline{\text{و حـ}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ قاطع لهما

∴ ق(∠ و) = ق(∠ أ ء هـ) (بالتبادل)

، ∵ ق(∠ حـ) = ق(∠ أ) (خواص متوازى الأضلاع)

∴ Δ ء حـ و ~ Δ هـ أ ء (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ ء حـ و})}{\text{م}(\Delta \text{ هـ أ ء})} = \left(\frac{\text{ء حـ}}{\text{هـ أ}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}\right)^{٢}$

$= \frac{٢٥}{٩}$ (المطلوب ثانيًا)

٩

∵ ق(∠ أ ب حـ)

= ق(∠ س ب ص)

(بالتقابل بالرأس)

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ س) ، ق(∠ حـ) = ق(∠ ص)

، ق(∠ ء) = ق(∠ ع)

، ∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{س ب}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب ص}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{حـ ء}}{\text{ص ع}} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{أ ء}}{\text{س ع}} = \frac{١}{٢}$

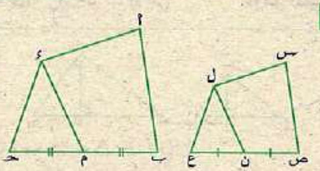
∴ متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

~ متوازى الأضلاع س ب ص ع

∴ $\frac{\text{م (متوازى الأضلاع أ ب حـ ء)}}{\text{م (متوازى الأضلاع س ب ص ع)}} = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$

(وهو المطلوب)

١٠



∵ المضلعين متشابهين

∴ Δ م ء حـ ~ Δ ن ل ع ∴ $\frac{\text{م ء}}{\text{ن ل}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{ل ع}}$

∴ $\frac{\text{م (المضلع أ ب حـ ء)}}{\text{م (المضلع س ص ع ل)}} = \left(\frac{\text{ء حـ}}{\text{ل ع}}\right)^{٢} = \left(\frac{\text{م ء}}{\text{ن ل}}\right)^{٢}$

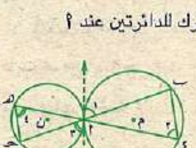
∴ م(المضلع أ ب حـ ء) : م(المضلع س ص ع ل)

= (م ء)^{٢} : (ن ل)^{٢} (وهو المطلوب)

١١

العمل : نرسم المماس المشترك للدائرتين عند أ

البرهان :



∵ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢)

، ق(∠ ٣) = ق(∠ ٤)

، ق(∠ ١) = ق(∠ ٣)

∴ ق(∠ ٢) = ق(∠ ٤)

، ∵ ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ حـ أ هـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أ ب ء ~ Δ أ حـ هـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب ء})}{\text{م}(\Delta \text{ أ حـ هـ})} = \frac{(\text{ب ء})^{٢}}{(\text{حـ هـ})^{٢}}$ (وهو المطلوب)

١٢

∵ ΔΔΔ أ ب هـ ، أ د جـ

، ب د هـ فيهما :

ق (∠ ب أ هـ) = ق (∠ د أ جـ)

= ق (∠ د ب هـ)

، ق (∠ أ هـ ب) = ق (∠ أ جـ د) = ق (∠ ب هـ د)

∴ Δ أ ب هـ ~ Δ أ د جـ ~ Δ ب د هـ

∴ م (Δ أ ب هـ) : م (Δ أ د جـ) : م (Δ ب د هـ)

= $(\text{ب هـ})^2 : (\text{د جـ})^2 : (\text{د هـ})^2$ (وهو المطلوب)

١٣

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ س ص ع

∴ $\frac{\text{م (Δ أ ب جـ)}}{\text{م (Δ س ص ع)}} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}\right)^2$

، ولكن $\frac{\text{م (Δ أ ب جـ)}}{\text{م (Δ س ص ع)}} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{ب جـ} \times \text{أ د}}{\frac{1}{2}\,\text{ص ع} \times \text{س ل}}$

∴ $\left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}\right)^2 = \frac{\text{ب جـ} \times \text{أ د}}{\text{ص ع} \times \text{س ل}}$ ∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{أ د}}{\text{س ل}}$

∴ ب جـ × س ل = أ د × ص ع (وهو المطلوب)

١٤

∵ ΔΔΔ أ ب س

، ب جـ ص ، أ جـ ع

متساويات الأضلاع

∴ Δ أ ب س ~ Δ ب جـ ص ~ Δ أ جـ ع

∴ $\frac{\text{م (Δ أ ب س)}}{\text{م (Δ أ جـ ع)}} = \left(\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}\right)^2 = \frac{(\text{أ ب})^2}{(\text{أ جـ})^2}$ (١)

، $\frac{\text{م (Δ ب جـ ص)}}{\text{م (Δ أ جـ ع)}} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}\right)^2 = \frac{(\text{ب جـ})^2}{(\text{أ جـ})^2}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{م (Δ أ ب س)} + \text{م (Δ ب جـ ص)}}{\text{م (Δ أ جـ ع)}} = \frac{(\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2}{(\text{أ جـ})^2} = \frac{(\text{أ جـ})^2}{(\text{أ جـ})^2}$

∴ م (Δ أ ب س) + م (Δ ب جـ ص) = م (Δ أ جـ ع)

(هو المطلوب)

١٥

∵ ΔΔ ب جـ هـ ، أ ب هـ فيهما :

ق (∠ جـ ب هـ) المماسية

= ق (∠ أ) المحيطية

المشتركة معها فى $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$

، ∠ هـ مشتركة

∴ Δ ب جـ هـ ~ Δ أ ب هـ

∴ $\frac{\text{م (Δ ب جـ هـ)}}{\text{م (Δ أ ب هـ)}} = \left(\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}\right)^2 = \frac{9}{16}$

∴ م (Δ ب جـ هـ) = ٩ س

∴ م (Δ أ ب هـ) = ١٦ س

∴ م (Δ أ ب جـ) = م (Δ أ ب هـ) − م (Δ ب جـ هـ)

= ١٦ س − ٩ س = ٧ س

∴ $\frac{\text{م (Δ أ ب جـ)}}{\text{م (Δ أ ب هـ)}} = \frac{7\,\text{س}}{16\,\text{س}} = \frac{7}{16}$ (وهو المطلوب)

١٦

∵ المضلع أ س ص د

~ المضلع س ب جـ ص

∴ $\frac{\text{م (المضلع أ س ص د)}}{\text{م (المضلع س ب جـ ص)}} = \frac{(\text{أ د})^2}{(\text{س ص})^2}$

لكن من التشابه $\frac{\text{أ د}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}}$

∴ $(\text{س ص})^2 = \text{أ د} \times \text{ب جـ}$

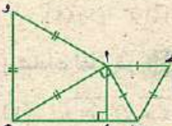
∴ $\frac{\text{م (المضلع أ س ص د)}}{\text{م (المضلع س ب جـ ص)}} = \frac{(\text{أ د})^2}{\text{أ د} \times \text{ب جـ}}$

$= \frac{\text{أ د}}{\text{ب جـ}}$ (١)

، ∵ $\frac{\text{م}(\triangle \text{أبء})}{\text{م}(\triangle \text{ءبحـ})} = \frac{\text{أء}}{\text{بحـ}}$ (لتساوى ارتفاعيهما)(٢)

من (١) ، (٢) : ينتج المطلوب

١٧



∵ △ أءب ~ △ حـءأ

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{حـء}} = \frac{\text{ءب}}{\text{ءأ}} = \frac{\text{أب}}{\text{حـأ}}$ (١)

، ∵ △ أبهـ ~ △ حـأو

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{حـأ}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{أو}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{حـو}}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ أطوال الأضلاع المتناظرة فى المضلعين أءبهـ ، حـءأو متناسبة.

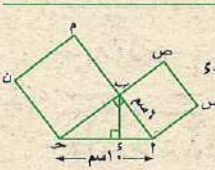
، ∵ الزوايا المتناظرة فى المضلعين أءبهـ ، حـءأو متساوية فى القياس (لماذا ؟)

∴ المضلع أءبهـ ~ المضلع حـءأو (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع أءبهـ})}{\text{م}(\text{المضلع حـءأو})} = \left(\frac{\text{أء}}{\text{حـء}}\right)^{2} = \frac{(\text{أء})^{2}}{(\text{حـء})^{2}}$

$= \frac{\text{بء}\cdot\text{ءحـ}}{(\text{حـء})^{2}} = \frac{\text{بء}}{\text{حـء}}$ (المطلوب ثانيًا)

١٨



∵ △ أبء ~ △ بحـء

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{حـء}}$

$= \frac{\text{أء}}{\text{بء}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{أس}}{\text{بم}} = \frac{\text{سص}}{\text{من}} = \frac{\text{بص}}{\text{حـن}}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{حـء}} = \frac{\text{أء}}{\text{بء}} = \frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{أس}}{\text{بم}} = \frac{\text{سص}}{\text{من}} = \frac{\text{بص}}{\text{حـن}}$

∴ أطوال الأضلاع المتناظرة فى المضلعين ءأسصب ، ءبمنحـ متناسبة

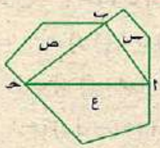
، ∵ الزوايا المتناظرة فى المضلعين ءأسصب ، ءبمنحـ متساوية فى القياس (لماذا ؟)

∴ المضلع ءأسصب ~ المضلع ءبمنحـ (المطلوب أولاً)

، ∵ بحـ = $\sqrt{\text{١٠٠} - \text{٣٦}}$ = ٨ سم

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع ءأسصب})}{\text{م}(\text{المضلع ءبمنحـ})} = \left(\frac{\text{٦}}{\text{٨}}\right)^{2} = \frac{\text{٣٦}}{\text{٦٤}} = \frac{\text{٩}}{\text{١٦}}$ (المطلوب ثانيًا)

١٩



∵ المضلع س ~ المضلع ع

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع س})}{\text{م}(\text{المضلع ع})}$

$= \left(\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}\right)^{2} = \frac{(\text{أب})^{2}}{(\text{أحـ})^{2}}$ (١)

، ∵ المضلع ص ~ المضلع ع

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع ص})}{\text{م}(\text{المضلع ع})} = \left(\frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}}\right)^{2} = \frac{(\text{بحـ})^{2}}{(\text{أحـ})^{2}}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ $\frac{\text{م}(\text{المضلع س}) + \text{م}(\text{المضلع ص})}{\text{م}(\text{المضلع ع})}$

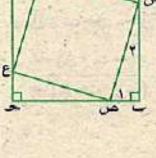
$= \frac{(\text{أب})^{2} + (\text{بحـ})^{2}}{(\text{أحـ})^{2}}$

∴ $\frac{\text{٤٠} + \text{٨٥}}{\text{١٢٥}} = \frac{(\text{أب})^{2} + (\text{بحـ})^{2}}{(\text{أحـ})^{2}}$

∴ $(\text{أحـ})^{2} = (\text{أب})^{2} + (\text{بحـ})^{2}$

∴ △ أبحـ قائم الزاوية فى ب (وهو المطلوب)

٢٠



بفرض أن المربع أبحـء

طول ضلعه ل وحدة طول

∴ أس = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ل وحدة طول

، بس = $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ل وحدة طول

، ب ص = $\frac{1}{4}$ ك وحدة طول ، أ ل = $\frac{3}{4}$ ك وحدة طول

∴ ΔΔ أ س ل ، ب ص س القائما الزاوية فيهما :

س ب = أ ل ، ب ص = أ س

∴ Δ أ س ل ≡ Δ ب ص س

∴ س ل = س ص وبالمثل يمكن إثبات أن :

ل ع = ع ص ، ق(∠ ١) = ق(∠ ٣)

، ∵ ق(∠ ١) + ق(∠ ٢) = 90°

∴ ق(∠ ٢) + ق(∠ ٣) = 90°

∴ ق(∠ ل س ص) = 90°

∴ س ص ع ل مربع (المطلوب أولًا)

، طول ضلعه = $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\text{ك}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\text{ك}\right)^2}$

= $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ك وحدة طول

، ∵ كل المربعات متشابهة

∴ $\frac{\text{م (المربع س ص ع ل)}}{\text{م (المربع أ ب حـ د)}} = \left(\frac{\frac{\sqrt{10}}{4}\text{ك}}{\text{ك}}\right)^2 = \frac{5}{8}$

(المطلوب ثانيًا)

١١

∵ ق(∠ حـ ب ص) = ق(∠ حـ د ص)

(محيطيتان مشتركتان في ⌒حـ ص)

، ق(∠ حـ د ص) = ق(∠ س) (بالتناظر)

∴ ق(∠ حـ ب ص) = ق(∠ س)

، ∵ ق(∠ ب د س) = ق(∠ ب حـ ص) خارجة عن الرباعي الدائري ب حـ ص د

∴ Δ د ب س ~ Δ حـ ص ب

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{د ب س})}{\text{م}(\Delta\ \text{حـ ص ب})} = \frac{(\text{ب س})^2}{(\text{ص ب})^2}$ (وهو المطلوب)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ (١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (جـ) (٤) (جـ)

(٥) (ب) (٦) (جـ) (٧) (جـ) (٨) (جـ)

(٩) (أ) (١٠) (ب) (١١) (د)

إرشادات لحل رقم ١

(١) ∵ $\overline{\text{و ص}}$ // $\overline{\text{حـ د}}$ ∴ Δ أ و ص ~ Δ أ حـ د

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ و ص})}{\text{م}(\Delta\ \text{أ حـ د})} = \left(\frac{\text{أ و}}{\text{أ حـ}}\right)^2$

∴ $\left(\frac{\text{أ و}}{\text{أ حـ}}\right)^2 = \frac{5}{5 + 40} = \frac{1}{9}$

، ∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$

∴ Δ أ هـ و ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ هـ و})}{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب حـ})} = \left(\frac{\text{أ و}}{\text{أ حـ}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ هـ و})}{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب حـ})} = \frac{1}{9}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ هـ و})}{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب حـ}) - \text{م}(\Delta\ \text{أ هـ و})} = \frac{1}{9 - 1} = \frac{1}{8}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ هـ و})}{32} = \frac{1}{8}$

∴ م(Δ أ هـ و) = ٤ سم^2

(٢) ∵ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ Δ أ س ص ~ Δ أ ب حـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\ \text{أ س ص})}{\text{م}(\Delta\ \text{أ ب حـ})} = \left(\frac{\text{أ ص}}{\text{أ حـ}}\right)^2$

∴ $\left(\frac{\text{أ ص}}{\text{أ حـ}}\right)^2 = \frac{40}{40 + 50} = \frac{4}{9}$

، ∵ $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{حـ د}}$

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{أ ع}}{\text{أ د}}$ ∴ $\left(\frac{\text{أ ع}}{\text{أ د}}\right)^2 = \frac{4}{9}$

∴ $\frac{\text{أ ع}}{\text{أ د}} = \frac{2}{3}$ ∴ $\frac{\text{د ع}}{\text{د أ}} = \frac{1}{3}$

، ∵ $\overline{\text{عم}} \parallel \overline{\text{أهـ}}$ ∴ Δ ءعم ~ Δ ءأهـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ءعم})}{\text{م}(\Delta \text{ءأهـ})} = \left(\frac{\text{ءع}}{\text{ءأ}}\right)^2$

$\frac{13}{13 + \text{م (الشكل أهـ م ع)}} = \frac{1}{9}$

∴ ١٣ + م (الشكل أهـ م ع) = ١١٧

∴ م (الشكل أهـ م ع) = ١١٧ − ١٣ = ١٠٤ سم^2

(٣) في Δ أهـء ، Δ ب حـ أ

∵ ق (∠ أهـء) = ق (∠ أحـب) = ٩٠°

، ق (∠ ءأهـ) = ق (∠ حـب أ)

∴ Δ أهـء ~ Δ بحـأ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{أهـء})}{\text{م}(\Delta \text{بحـأ})} = \left(\frac{\text{أء}}{\text{أب}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{أهـء})}{\text{م}(\Delta \text{بحـأ})} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

∴ $\frac{6}{\text{م}(\Delta \text{بحـأ})} = \frac{1}{9}$

∴ م (Δ أحـب) = ٥٤ سم^2

∴ مساحة الجزء المظلل = ٥٤ − ٦ = ٤٨ سم^2

(٤) في Δ أس ص : ∵ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{ءهـ}}$

∴ Δ أءهـ ~ Δ أس ص

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{أءهـ})}{\text{م}(\Delta \text{أس ص})} = \left(\frac{\text{أهـ}}{\text{أص}}\right)^2 = \left(\frac{2}{8}\right)^2 = \frac{1}{16}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{أءهـ})}{\text{م}(\Delta \text{أءهـ}) + \text{م (الشكل ءس ص هـ)}} = \frac{1}{16}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{أءهـ})}{\text{م}(\Delta \text{أءهـ}) + 30} = \frac{1}{16}$

∴ ١٦ م (Δ أءهـ) = م (Δ أءهـ) + ٣٠

∴ ١٥ م (Δ أءهـ) = ٣٠

∴ م (Δ أءهـ) = ٢ سم^2

في Δ أب حـ : ∵ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

∴ Δ أس ص ~ Δ أب حـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{أس ص})}{\text{م}(\Delta \text{أبحـ})} = \left(\frac{\text{أص}}{\text{أحـ}}\right)^2$

∴ $\frac{2 + 30}{\text{م}(\Delta \text{أبحـ})} = \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{16}{25}$

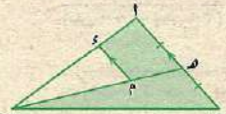
∴ م (Δ أب حـ) = $\frac{32 \times 25}{16}$ = ٥٠ سم^2

∴ مساحة الشكل س ب حـ ص = ٥٠ − ٣٢

= ١٨ سم^2

(٥) العمل :

نرسم $\overrightarrow{\text{حـم}}$ ليقطع $\overline{\text{أب}}$ عند هـ



∵ م هي نقطة تلاقي متوسطات Δ أب حـ

∴ $\overline{\text{حـهـ}}$ متوسط

∴ م (Δ أهـحـ) = $\frac{1}{2}$ م (Δ أب حـ)

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦ = ١٨ سم^2

، ∵ $\frac{\text{حـم}}{\text{حـهـ}} = \frac{2}{3}$ ، ∵ $\overline{\text{مء}} \parallel \overline{\text{أهـ}}$

∴ Δ حـمء ~ Δ حـهـأ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{حـمء})}{\text{م}(\Delta \text{حـهـأ})} = \left(\frac{\text{حـم}}{\text{حـهـ}}\right)^2$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{حـمء})}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

∴ م (Δ حـمء) = ٨ سم^2

∴ مساحة الجزء المظلل = ٣٦ − ٨ = ٢٨ سم^2

(٦) في ΔΔ وءهـ ، أب حـ :

∵ ق (∠ وءهـ) = ق (∠ أب حـ) (بالتناظر)

، ق (∠ وهـء) = ق (∠ أحـب) (بالتناظر)

∴ Δ وءهـ ~ Δ أب حـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{وءهـ})}{\text{م}(\Delta \text{أبحـ})} = \left(\frac{\text{ءهـ}}{\text{بحـ}}\right)^2$

∴ $\frac{6}{\text{م}(\Delta \text{أبحـ})} = \left(\frac{3}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}$

∴ م (Δ أب حـ) = ٥٤ سم^2

∴ مساحة المنطقة المظللة = ٥٤ − ٦ = ٤٨ سم^2

(٧) $\because \triangle \text{أ ب جـ} \sim \triangle \text{ء هـ و}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})}{\text{م}(\triangle \text{ء هـ و})} = \left(\dfrac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}}\right)^{٢}$

$\therefore \dfrac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٧} = \left(\dfrac{\text{س}}{\text{س} + ١}\right)^{٢}$

$\therefore \dfrac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٧} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}$

$\therefore \dfrac{\text{س} + ٢}{(\text{س} + ٧) - (\text{س} + ٢)}$

$= \dfrac{\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١) - \text{س}^{٢}}$

$\therefore \dfrac{\text{س} + ٢}{٥} = \dfrac{\text{س}^{٢}}{٢\text{س} + ١}$

$\therefore (\text{س} + ٢)(٢\text{س} + ١) = ٥\text{س}^{٢}$

$\therefore ٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٢ = ٥\text{س}^{٢}$

$\therefore ٣\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ٢ = ٠$

$\therefore (٣\text{س} + ١)(\text{س} - ٢) = ٠$

$\therefore \text{س} = -\frac{١}{٣}$ مرفوض أ، $\text{س} = ٢$

(٨) فى $\triangle \text{أ ب جـ}$: $\because \overline{\text{ء هـ}} // \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore \triangle \text{أ ء هـ} \sim \triangle \text{أ ب جـ}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ء هـ})}{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})} = \left(\dfrac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}\right)^{٢}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ء هـ})}{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})} = \left(\dfrac{٢}{٥}\right)^{٢} = \dfrac{٤}{٢٥}$

$\therefore \text{م}(\triangle \text{أ ء هـ}) = \frac{٤}{٢٥} \times \text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})$

، $\because \overline{\text{هـ و}} // \overline{\text{أ ب}}$

$\therefore \triangle \text{جـ و هـ} \sim \triangle \text{جـ ب أ}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{جـ و هـ})}{\text{م}(\triangle \text{جـ ب أ})} = \left(\dfrac{\text{و هـ}}{\text{ب أ}}\right)^{٢}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{جـ و هـ})}{\text{م}(\triangle \text{جـ ب أ})} = \left(\dfrac{٣}{٥}\right)^{٢} = \dfrac{٩}{٢٥}$

$\therefore \text{م}(\triangle \text{جـ و هـ}) = \frac{٩}{٢٥} \times \text{م}(\triangle \text{جـ ب أ})$

$\therefore$ مساحة $(\square \text{ء ب و هـ}) = \text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})$

$- \left(\text{م}(\triangle \text{أ ء هـ}) + \text{م}(\triangle \text{جـ و هـ})\right)$

$= \text{م}(\triangle \text{أ ب جـ}) - \left(\frac{٤}{٢٥} \times \text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})\right.$

$\left. + \frac{٩}{٢٥} \times \text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})\right)$

$= \frac{١٢}{٢٥} \times \text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})$

$\therefore \dfrac{\text{مساحة } (\square \text{ء ب و هـ})}{\text{م}(\triangle \text{أ ب جـ})} = \dfrac{١٢}{٢٥}$

(٩) مساحة المربع أ ب جـ ء $= ٦ \times ٦ = ٣٦$ سم^{٢}

$\therefore$ مساحة $\triangle \text{ء ب جـ} = \frac{١}{٢} \times ٣٦ = ١٨$ سم^{٢}

$\because \overline{\text{و ص}} // \overline{\text{ب جـ}}$

$\therefore \triangle \text{ء و ص} \sim \triangle \text{ء جـ ب}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{ء و ص})}{\text{م}(\triangle \text{ء جـ ب})} = \left(\dfrac{\text{ء و}}{\text{ء جـ}}\right)^{٢}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{ء و ص})}{١٨} = \left(\dfrac{٢}{٣}\right)^{٢}$

$\therefore \text{م}(\triangle \text{ء و ص}) = ٨$ سم^{٢}

، $\because \overline{\text{س هـ}} // \overline{\text{ص و}}$

$\therefore \triangle \text{ء هـ س} \sim \triangle \text{ء و ص}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{ء هـ س})}{\text{م}(\triangle \text{ء و ص})} = \left(\dfrac{\text{ء هـ}}{\text{ء و}}\right)^{٢}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{ء هـ س})}{٨} = \left(\dfrac{١}{٢}\right)^{٢}$

$\therefore \text{م}(\triangle \text{ء هـ س}) = ٢$ سم^{٢}

$\therefore$ مساحة (الشكل س ص و هـ) $= ٨ - ٢$

$= ٦$ سم^{٢}

(١٠) فى $\triangle\triangle$ أ ب هـ ، هـ ب و

$\overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس ب

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ ب هـ})}{\text{م}(\triangle \text{هـ ب و})} = \dfrac{\text{أ هـ}}{\text{هـ و}}$ $\quad \therefore \dfrac{\text{أ هـ}}{\text{هـ و}} = \dfrac{٢}{٣}$

، $\because \overline{\text{ب أ}} // \overline{\text{و ء}}$

$\therefore \triangle \text{أ هـ ب} \sim \triangle \text{و هـ ء}$

$\therefore \dfrac{\text{م}(\triangle \text{أ هـ ب})}{\text{م}(\triangle \text{و هـ ء})} = \left(\dfrac{\text{أ هـ}}{\text{و هـ}}\right)^{٢} = \left(\dfrac{٢}{٣}\right)^{٢} = \dfrac{٤}{٩}$

∴ $\frac{٢}{م(\triangle و هـ ء)} = \frac{٤}{٩}$

∴ م($\triangle$ و هـ ء) = ٤,٥ سم^{٢}

، مساحة المستطيل = ٢ مساحة $\triangle$ ب و ء

= ٢ × (٣ + ٤,٥) = ١٥ سم^{٢}

∴ مساحة الجزء المظلل = ١٥ − (٢ + ٣ + ٤,٥)

= ٥ $\frac{١}{٢}$ سم^{٢}

(١١) ∵ معامل تشابه المضلع م$_{١}$ للمضلع م$_{٢}$ هو $\frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{م(المضلع م_{١})}{م(المضلع م_{٢})} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$

، معامل تشابه المضلع م$_{٣}$ للمضلع م$_{٢}$ هو $\frac{١}{٣}$

∴ $\frac{م(المضلع م_{٣})}{م(المضلع م_{٢})} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} = \frac{١}{٩}$

∴ م(المضلع م$_{١}$) : م(المضلع م$_{٢}$) : م(المضلع م$_{٣}$)

= ٤ : ٩ : ١

∴ $\sqrt{مساحة (م_{١})} + \sqrt{مساحة (م_{٣})}$

= $\sqrt{٤ ك} + \sqrt{ك} = ٣\sqrt{ك}$

، $\sqrt{مساحة (م_{٢})} = \sqrt{٩ ك} = ٣\sqrt{ك}$

٢

∵ أى مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان متشابهين

∴ $\frac{م(المربع أ ب جـ ء)}{م(المربع أَ بَ جـَ ءَ)} = \frac{(أ ب)^{٢}}{(أَ بَ)^{٢}}$

بفرض أن طول نصف قطر الدائرة = نق

∴ أ ب = نق $\sqrt{٢}$ (لأن قطر المربع أ ب جـ ء قطر فى الدائرة)

، أَ بَ = ٢ نق

(لأن طول ضلع المربع أَ بَ جـَ ءَ يساوى طول قطر الدائرة)

∴ $\frac{م(المربع أ ب جـ ء)}{م(المربع أَ بَ جـَ ءَ)} = \frac{(نق \sqrt{٢})^{٢}}{(٢ نق)^{٢}} = \frac{١}{٢}$ (وهو المطلوب)

إرشادات تمارين 4

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (أ) (٤) (جـ) (٥) (أ)

(٦) (أ) (٧) (د) (٨) (ب) (٩) (أ) (١٠) (جـ)

(١١) (جـ) (١٢) (أ) (١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (أ)

(١٦) (أ) (١٧) (جـ) (١٨) (ب) (١٩) (أ) (٢٠) (جـ)

(٢١) (أ) (٢٢) (أ) (٢٣) (د) (٢٤) (د) (٢٥) (د)

(٢٦) (ب) (٢٧) (جـ) (٢٨) (ب) (٢٩) (جـ) (٣٠) (ب)

(٣١) (د) (٣٢) (ب) (٣٣) (د) (٣٤) (أ) (٣٥) (أ)

(٣٦) (جـ)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ أ هـ × هـ ب = ٦ × ٧ = ٤٢

، جـ هـ × هـ ء = ٥ × ٨,٤ = ٤٢

∴ أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ ء

∴ النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع على دائرة واحدة

(٢) ، (٣) النقط أ ، ب ، جـ ، ء لا تقع على دائرة واحدة لأن النقط أ ، ب ، ء تقع على استقامة واحدة.

(٤) ∵ أ هـ × هـ ب = ٥ × ٢٠ = ١٠٠

، جـ هـ × هـ ء = ١٠ × ١٠ = ١٠٠

∴ أ هـ × هـ ب = جـ هـ × هـ ء

∴ النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

(٥) ∵ أ هـ × ب هـ = ١٢ × ٣ = ٣٦

، جـ هـ × ء هـ = ٩ × ٤ = ٣٦

∴ النقط أ ، ب ، جـ ، ء تقع على دائرة واحدة.

(٦) ∵ أ هـ × هـ ب = ٦ × ٣,٦ = ٢١,٦

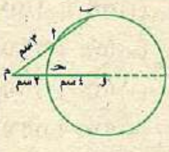
، حـ هـ × ء هـ = ٧,٢ × ٢,٨ = ٢٠,١٦

∴ أ هـ × ب هـ ≠ حـ هـ × ء هـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء لا تقع على دائرة واحدة.

٢ (١) ، (٤) ، (٦)

٣



نرسم $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ ليقطع الدائرة

في حـ ، ء

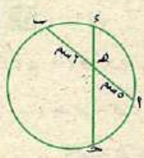
∴ م ء = ٦ + ٤ = ١٠ سم

، ∵ م أ × م ب = م حـ × م ء

∴ ٣ × م ب = ٢ × ١٠ ∴ م ب = ٦ $\frac{٢}{٣}$ سم

∴ أ ب = ٦ $\frac{٢}{٣}$ − ٣ = ٣ $\frac{٢}{٣}$ سم (وهو المطلوب)

٤



بفرض حـ هـ = س سم

∴ ء هـ = (١١,٥ − س) سم

، ∵ أ هـ × هـ ب = حـ هـ × هـ ء

∴ ٥ × ٦ = س $\left(\frac{٢٣}{٢} - \text{س}\right)$

∴ ٢ س^{٢} − ٢٣ س + ٦٠ = ٠

∴ (٢ س − ١٥) (س − ٤) = ٠

∴ طولا $\overline{\text{حـ هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ء}}$ هما ٧,٥ سم ، ٤ سم

(وهو المطلوب)

٥

∵ (أ ب)^{٢} = أ حـ × أ ء

∴ $\left(٥\sqrt{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ أ ء × أ ء ∴ ٥٠ = $\frac{١}{٢}$ (أ ء)^{٢}

∴ أ ء = ١٠ سم (وهو المطلوب)

٦

من الدائرة الكبرى :

(س ص)^{٢} = س حـ × س ء (١)

، من الدائرة الصغرى :

(س ص)^{٢} = س أ × س ب (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ س حـ × س ء = س أ × س ب

∴ $\frac{\text{س حـ}}{\text{س ب}} = \frac{\text{س أ}}{\text{س ء}}$ (وهو المطلوب)

٧

∵ م ب × م أ = م ص × م س . (١)

، ∵ م حـ × م ء = م ص × م س (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م ب × م أ = م حـ × م ء

∴ أ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة (وهو المطلوب)

٨

∵ ΔΔ س ل م ، س ع ص فيهما :

$\frac{\text{س ل}}{\text{س ع}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{\text{س م}}{\text{س ص}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

، ∠ س مشتركة

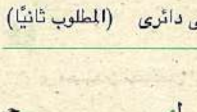
∴ Δ س ل م ~ Δ س ع ص (المطلوب أولًا)

، $\frac{\text{س ل}}{\text{س ع}} = \frac{\text{س م}}{\text{س ص}}$

∴ س ل × س ص = س م × س ع

∴ الشكل ل ص ع م رباعى دائرى (المطلوب ثانيًا)

٩



∵ أ هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ب هـ

، ب هـ = ٦ سم

∴ أ هـ = ٢,٥ سم

، ∵ ء هـ = $\frac{٣}{٥}$ حـ هـ ، حـ هـ = ٥ سم

∴ ء هـ = ٣ سم

∵ أ هـ × ب هـ = ٢,٥ × ٦ = ١٥

، ء هـ × هـ حـ = ٣ × ٥ = ١٥

∴ أ هـ × هـ ب = ء هـ × هـ حـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة

(وهو المطلوب)

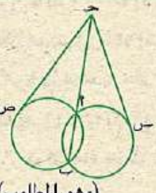
١٠

∵ (ن س)^{٢} = ن ب × ن أ ، (ن س)^{٢} = ن جـ × ن ء

∴ ن ب × ن أ = ن جـ × ن ء

∴ $\frac{\text{ن ب}}{\text{ن جـ}} = \frac{\text{ن ء}}{\text{ن أ}}$ (وهو المطلوب)

١١



∵ (جـ س)^{٢} = جـ أ × جـ ب

، (جـ ص)^{٢} = جـ أ × جـ ب

∴ جـ س = جـ ص

(وهو المطلوب)

١٢

فى الدائرة م :

(أ ب)^{٢} = أ و × أ هـ ∴ (أ ب)^{٢} = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ أ ب = ٦ سم (١)

فى الدائرة ن : (أ جـ)^{٢} = أ هـ × أ ء = ٩ × ١٦ = ١٤٤

∴ أ جـ = ١٢ سم (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

∴ ب منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ (وهو المطلوب)

١٣

نرسم $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ ليقطع الدائرة فى ء ، هـ

∴ م هـ = ١٢ + ٨ = ٢٠ سم

، ∵ م أ × م ب = م ء × م هـ

∴ م أ (م أ + ١١) = ٤ × ٢٠

∴ (م أ)^{٢} + ١١ م أ − ٨٠ = ٠

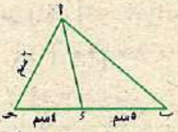
∴ (م أ + ١٦) (م أ − ٥) = ٠

∴ م أ = ٥ سم (المطلوب أولًا)

، ∵ (م جـ)^{٢} = م ء × م هـ = ٤ × ٢٠ = ٨٠

∴ م جـ = $\sqrt{٨٠}$ = ٤$\sqrt{٥}$ سم (المطلوب ثانيًا)

١٤



∵ (أ جـ)^{٢} = جـ ء × ب جـ

∴ $\overline{\text{أ جـ}}$ مماسة للدائرة

المارة بالنقط أ ، ب ، ء (المطلوب أولًا)

، ∵ ΔΔ أ جـ ء ، ب جـ أ فيهما :

ق (∠ء أ جـ) = ق (∠ب)

(مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\overset\frown{\text{أ ء}}$)

، ∠جـ مشتركة

∴ Δ أ جـ ء ~ Δ ب جـ أ (المطلوب ثانيًا)

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ جـ ء})}{\text{م}(\Delta \text{ ب جـ أ})} = \left(\frac{\text{جـ ء}}{\text{أ جـ}}\right)^{٢} = \left(\frac{٤}{٦}\right)^{٢} = \frac{٤}{٩}$

∴ م (Δ أ جـ ء) = ٤ ك ، م (Δ ب جـ أ) = ٩ ك

∴ م (Δ أ ب ء) = ٥ ك

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{ أ ب ء})}{\text{م}(\Delta \text{ أ ب جـ})} = \frac{٥ \text{ ك}}{٩ \text{ ك}} = \frac{٥}{٩}$ (المطلوب ثالثًا)

١٥

العمل : نرسم القطر $\overline{\text{س ص}}$

فى الدائرة الكبرى

، يقطع الدائرة الصغرى فى ب

البرهان : ∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ∩ $\overline{\text{س ص}}$ = {ب}

∴ أ ب × ب ء = س ب × ب ص

= ٥ × ١٩ = ٩٥ (وهو المطلوب)

١٦

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية

فى ب ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ (أ ب)^{٢} = أ هـ × أ جـ (١)

، ∵ الشكل و هـ جـ ء رباعى دائرى

(لأن ق (∠ء) + ق (∠و هـ جـ) = ١٨٠°)

∴ أ و × أ ء = أ هـ × أ جـ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $(أب)^{٢}$ = أو × أء (المطلوب أولاً)

∴ $(٦)^{٢}$ = أو × ٨

∴ أو = ٤,٥ سم (المطلوب ثانيًا)

١٧

∵ $\overline{مح} \perp \overline{أب}$

∴ ح منتصف $\overline{أب}$

∴ أح = حب = ٤ سم

نرسم $\overline{ءه}$ قطرًا في الدائرة

وبفرض أن طول نصف القطر = نق ∴ ءه = ٢ نق

∴ هح = ءه − ءح = (٢ نق − ٢) سم

، ∵ أح × حب = ءح × حه

∴ ٤ × ٤ = ٢ (٢ نق − ٢)

∴ نق = ٥ سم (وهو المطلوب)

١٨

العمل : نرسم $\overline{سأ}$ ، $\overline{سب}$

البرهان : ∵ ∠ أ س ب قائمة

«محيطية مرسومة في نصف دائرة»

، $\overline{سح} \perp \overline{أب}$ ∴ $(سح)^{٢}$ = أح × حب

لكن أح × حب = ءح × حه

∴ $(سح)^{٢}$ = ءح × حه (وهو المطلوب)

١٩

العمل : نرسم $\overline{مب}$

البرهان :

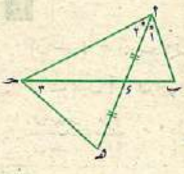
∵ ق(∠ م ب أ) = ٩٠°

، $\overline{بح} \perp \overline{أم}$

∴ $(أب)^{٢}$ = أء × أم لكن $(أب)^{٢}$ = أس × أص

∴ أس × أص = أء × أم (وهو المطلوب)

٢٠



∵ $(أء)^{٢}$ = ءب × ءح

∴ أء × ءه = ءب × ءح

∴ أ ب ه ح رباعي دائري

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٣)

لكن ق(∠ ١) = ق(∠ ٢) ∴ ق(∠ ٢) = ق(∠ ٣)

∴ ΔΔ ه ح ء ، ه أ ح فيهما :

ق(∠ ٢) = ق(∠ ٣) ، ∠ ه مشتركة

∴ Δ ه ح ء ~ Δ ه أ ح (المطلوب أولاً)

وينتج من التشابه أن : $\frac{هح}{هأ} = \frac{هء}{هح}$

∴ $(هح)^{٢}$ = هء × هأ = هء × ٢ هء = ٢ $(هء)^{٢}$

(المطلوب ثانيًا)

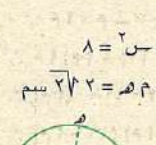
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (جـ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (ب)

(٥) (أ) (٦) (جـ) (٧) (أ) (٨) (جـ)

(٩) (ب) (١٠) (ب)

إرشادات الحل :



(١) نفرض أن هء = هم = س

∴ مء = ٢ س = نق

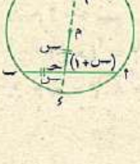
∴ وم = ٢ س = نق

، ∵ هأ × هح = هء × هو

∴ ٨ × ٣ = س × ٣ س

∴ ٣ $س^{٢}$ = ٢٤ ∴ $س^{٢}$ = ٨

∴ س = ٢ $\sqrt{٢}$ ∴ مه = ٢ $\sqrt{٢}$ سم



(٢) نفرض أن :

مح = حب = س

∴ حه × حء

= حأ × حب

∴ (٦ + س) (٦ − س) = (س + ١) (س)

∴ ٣٦ − س^{٢} = س^{٢} + س

∴ ٢ س^{٢} + س − ٣٦ = ٠

∴ (٢ س + ٩) (س − ٤) = ٠

∴ س = − $\frac{٩}{٢}$ (مرفوض) أ، س = ٤

∴ أجـ = ٤ + ١ = ٥ سم ، جـب = ٤ سم

∴ أب = ٥ + ٤ = ٩ سم

(٣) ∵ $\overline{\text{جـس}}$ قطعة مماسة للدائرة

∴ (جـس)^{٢} = جـب × جـأ

∴ (٨)^{٢} = جـب × (جـب + ٣٠)

∴ (جـب)^{٢} + ٣٠ (جـب) − ٦٤ = ٠

∴ ((جـب) − ٢) ((جـب) + ٣٢) = ٠

∴ جـب = ٢ سم أ، جـب = −٣٢ (مرفوض)

، ∵ $\overline{\text{ءص}}$ قطعة مماسة للدائرة

∴ (ءص)^{٢} = ءب × ءأ

∴ (٢٠)^{٢} = ءب (ءب + ٣٠)

∴ (ءب)^{٢} + ٣٠ (ءب) − ٤٠٠ = ٠

∴ ((ءب) − ١٠) ((ءب) + ٤٠) = ٠

∴ ءب = ١٠ سم أ، ءب = −٤٠ (مرفوض)

∴ ءجـ = ١٠ − ٢ = ٨ سم

(٤) ∵ $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ مماس للدائرة الكبرى في هـ

∴ (وهـ)^{٢} = وجـ × وء

∴ (وهـ)^{٢} = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ وهـ = ٦ سم

، ∵ وهـ × وب = وجـ × وأ

∴ ٦ × وب = ٤ × ٣ ∴ وب = ٢ سم

∴ بهـ = ٢ + ٦ = ٨ سم

(٥) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ مماسان للدائرة الصغرى عند ب ، ء

∴ أب = أء = س ∴ أجـ = س − ١

، أهـ = س + ٢

، ∵ (أب)^{٢} = أجـ × أهـ

∴ س^{٢} = (س − ١) (س + ٢)

∴ س^{٢} = س^{٢} + س − ٢

∴ س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

(٦) ∵ $\overline{\text{جـب}}$ مماس للدائرة

∴ (جـب)^{٢} = جـهـ × جـء

∴ (جـب)^{٢} = ٣ × (٣ + ١٨) = ٦٣

∴ جـب = $\sqrt{٦٣}$ = ٣ $\sqrt{٧}$ سم

، ∵ أب = أء (مماسان للدائرة)

∴ أجـ − أء = أجـ − أب = جـب = ٣ $\sqrt{٧}$ سم

(٧) نرسم $\overline{\text{أء}}$

∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر في نصف الدائرة (م)

∴ $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{بهـ}}$

في △ أبهـ :

∵ بء = ءهـ = ٦ سم ، $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{بهـ}}$

∴ △ أبهـ متساوي الساقين

∴ أهـ = أب

، ∵ هـجـ × هـأ = هـء × هـب

∴ ٤ × هـأ = ٦ × ١٢ ∴ هـأ = ١٨ سم

∴ أب = ١٨ سم

∴ نق = ١٨ ÷ ٢ = ٩ سم

(٨) ∵ $\frac{\text{سهـ}}{\text{هـص}} = \frac{٢}{٣}$

∴ سهـ = ٢ ك ، هـص = ٣ ك

∵ هـ أ × هـ ب = هـ س × هـ ء

∴ هـ أ × هـ ب = ٢ ل × (٣ ل + ٦)   (١)

، ∵ هـ أ × هـ ب = هـ ص × هـ حـ

∴ هـ أ × هـ ب = ٣ ل (٢ ل + (حـ س))   (٢)

من (١) ، (٢) :

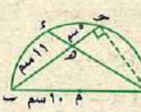
∴ ٢ ل (٣ ل + ٦) = ٣ ل (٢ ل + (حـ س))

∴ ٦ ل^{٢} + ١٢ ل = ٦ ل^{٢} + ٣ ل (حـ س)

∴ ١٢ ل = ٣ ل (حـ س)

∴ حـ س = ٤ سم

(٩) نرسم $\overline{\text{أحـ}}$



∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى نصف الدائرة

∴ ق (∠ أحـ ب) = ٩٠°

فى Δ أحـ ب : أحـ = $\sqrt{(٢٠)^{٢} - (١٦)^{٢}}$

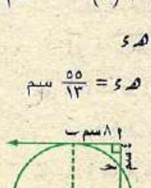
∴ أحـ = ١٢ سم

فى Δ أحـ هـ : أهـ = $\sqrt{(١٢)^{٢} + (٥)^{٢}}$ = ١٣ سم

، ∵ هـ حـ × هـ ب = هـ أ × هـ ء

∴ ٥ × ١١ = ١٣ × هـ ء   ∴ هـ ء = $\frac{٥٥}{١٣}$ سم

(١٠) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس للدائرة



∴ (أب)^{٢} = أحـ × أء

∴ (٨)^{٢} = ٤ × أء

∴ أء = ١٦ سم

∴ حـ ء = ١٦ − ٤ = ١٢ سم

، ∵ $\overline{\text{مهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$ ∴ هـ فى منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$

∴ هـ حـ = ٦ سم

∴ نق = ب م = ٤ + ٦ = ١٠ سم

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثالثة

١

∵ معامل التشابه = مقياس رسم الوحدة السكنية

∴ معامل التشابه = $\frac{١}{١٥٠}$

∴ أبعاد حجرة الاستقبال هى :

٥,٦ × ١٥٠ = ٨٤٠ سم = ٨,٤ متر

، ٣,٤ × ١٥٠ = ٥١٠ سم = ٥,١ متر (المطلوب أولًا)

، أبعاد حجرة النوم هى :

٢,٦ × ١٥٠ = ٣٩٠ سم = ٣,٩ متر

، ٣,٤ × ١٥٠ = ٥١٠ سم = ٥,١ متر (المطلوب ثانيًا)

، أبعاد حجرة المعيشة هى :

٢,٤ × ١٥٠ = ٣٦٠ سم = ٣,٦ متر

، ٣,٦ × ١٥٠ = ٥٤٠ سم = ٥,٤ متر

∴ مساحة حجرة المعيشة = ٣,٦ × ٥,٤ = ١٩,٤٤ متر^{٢}

(المطلوب ثالثًا)

طول الحمام والمطبخ وحجرة المعيشة

= (٢,٦ + ٢,٦ + ٣,٦) × ١٥٠

= ١٣٢٠ سم = ١٣,٢ متر

وعرض هذا الجزء = ٢,٤ × ١٥٠ = ٣٦٠ سم = ٣,٦ متر

∴ مساحة هذا الجزء = ٣,٦ × ١٣,٢ = ٤٧,٥٢ متر^{٢}

طول حجرة النوم وحجرة الاستقبال

= (٢,٦ + ٥,٦) × ١٥٠ = ١٢٣٠ سم = ١٢,٣ متر

وعرض هذا الجزء = ٣,٤ × ١٥٠ = ٥١٠ سم = ٥,١ متر

∴ مساحة هذا الجزء = ١٢,٣ × ٥,١ = ٦٢,٧٣ متر^{٢}

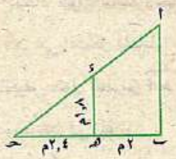
∴ مساحة الوحدة السكنية = ٤٧,٥٢ + ٦٢,٧٣

= ١١٠,٢٥ متر^{٢}

(المطلوب رابعًا)

٢

∵ $\overline{\text{ءه}} \parallel \overline{\text{أب}}$



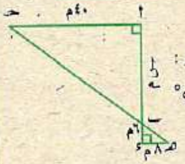
∴ Δ أب ح ~ Δ ءه ح

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءه}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ه ح}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{1,8} = \frac{4,4}{2,4}$

∴ أب = $\frac{4,4 \times 1,8}{2,4} = 3,3$ م (وهو المطلوب)

٣



(١) فى ΔΔ أب ح ، ء ب ه :

ق(∠أ) = ق(∠ء) = ٩٠°

، ق(∠أ ب ح)

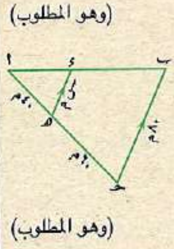
= ق(∠ء ب ه) (بالتقابل بالرأس)

∴ Δ أب ح ~ Δ ء ب ه

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ء ب}} = \frac{\text{أح}}{\text{ءه}}$ ∴ $\frac{\text{س}}{6} = \frac{40}{8}$

∴ س = ٣٠ مترًا (وهو المطلوب)

(٢) ∵ $\overline{\text{ءه}} \parallel \overline{\text{ب ح}}$



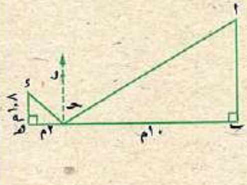
∴ Δ أب ح ~ Δ أءه

∴ $\frac{\text{ب ح}}{\text{ءه}} = \frac{\text{أح}}{\text{أه}}$

∴ $\frac{80}{\text{س}} = \frac{100}{40}$

∴ س = ٣٢ مترًا (وهو المطلوب)

٤



فى ΔΔ أب ح

، ء ه ح :

∵ ق(∠أ ح و)

= ق(∠ء ح و)

(قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس)

∴ ق(∠أ ح ب) = ق(∠ء ح ه)

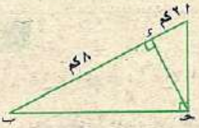
، ق(∠ب) = ق(∠ه) = ٩٠°

∴ Δ أب ح ~ Δ ء ه ح

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ءه}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{ه ح}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{1,8} = \frac{10}{2}$

∴ أب = $\frac{10 \times 1,8}{2} = 9$ م (وهو المطلوب)

٥



∵ Δ أب ح قائم الزاوية

فى ح ، $\overline{\text{ح ء}} \perp \overline{\text{أب}}$

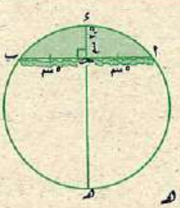
∴ $(\text{ح ء})^2$ = أء × ء ب = ٢ × ٨ = ١٦

∴ ح ء = ٤ كم

، $(\text{ب ح})^2$ = ب ء × ب أ = ٨ × ١٠ = ٨٠

∴ ب ح = ٤ $\sqrt{5}$ كم (وهو المطلوب)

٦



∵ ح منتصف $\overline{\text{أب}}$

، $\overline{\text{ح ء}} \perp \overline{\text{أب}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ء ح}}$ يمر بمركز الدائرة.

∴ أح × ح ب = ء ح × ح ه

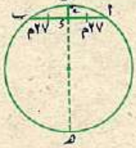
∴ ٥ × ٥ = ٢,٥ × ح ه ∴ ح ه = ١٠ سم

∴ ء ه = ١٠ + ٢,٥ = ١٢,٥ سم

∴ طول نصف قطر القرص = $\frac{12,5}{2}$ = ٦,٢٥ سم

(وهو المطلوب)

٧



∵ ء منتصف $\overline{\text{أب}}$

∴ $\overline{\text{ح ء}} \perp \overline{\text{أب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{ح ء}}$ يمر بمركز الدائرة

ويقطعها فى ه ∴ أء × ء ب = ح ء × ء ه

∴ ٢٧ × ٢٧ = ٩ × ءهـ

∴ ءهـ = ٨١ م

∴ حـهـ = ٨١ + ٩ = ٩٠ م

∴ طول نصف قطر دائرة القوس = $\frac{٩٠}{٢}$ = ٤٥ م

(وهو المطلوب)

٨

∵ ١٥ × س = ١٠ × ١٢ ∴ س = ٨

∴ بعد نافورة المياه عن المدخل حـ هو ٨ أمتار

(وهو المطلوب)

٩

لإيجاد طول السلك $\overline{\text{أب}}$

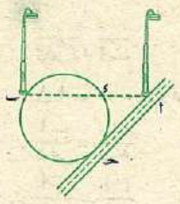
كما فى الشكل المقابل

تقيس طول الطريق $\overline{\text{أحـ}}$ ، $\overline{\text{أء}}$

ونعوض فى القانون :

$(\text{أحـ})^2 = \text{أء} \times \text{أب}$

∴ $\text{أب} = \frac{(\text{أحـ})^2}{\text{أء}}$



(وهو المطلوب)

إرشادات الوحـدة الرابعة

إرشادات تمـارين 5

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) أولًا : (ب) ثانيًا : (د) ثالثًا : (ب)

(٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (ب) (٥) (ب) (٦) (ب)

(٧) (جـ) (٨) (أ) (٩) (أ) (١٠) (جـ) (١١) (د)

(١٢) (جـ) (١٣) (جـ) (١٤) (ب) (١٥) (ب) (١٦) (د)

(١٧) (ب) (١٨) (د) (١٩) (ب) (٢٠) (أ) (٢١) (ب)

(٢٢) (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

١

(١) $\because \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ ، $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} \neq \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ $\therefore \overline{\text{ءهـ}}$ لا توازى $\overline{\text{بجـ}}$

(٢) $\because \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}} = \frac{45}{63} = \frac{5}{7}$ ، $\frac{\text{أب}}{\text{أء}} = \frac{55}{77} = \frac{5}{7}$

$\therefore \frac{\text{أجـ}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أء}}$ $\therefore \overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

(٣) $\because \frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{3}{4}$ ، $\frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}}$ $\therefore \overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

(٤) $\because \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ، $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ $\therefore \overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

(٥) $\because \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$ ، $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{42}{24} = \frac{7}{4}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} \neq \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$ $\therefore \overline{\text{ءهـ}}$ لا توازى $\overline{\text{بجـ}}$

(٦) فى Δ أهـء القائم الزاوية فى هـ :

$\because (\text{أء})^2 = (\text{أهـ})^2 + (\text{هـء})^2$

$= 225 + 400 = 625$

$\therefore$ أء $= 25$ سم

$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ ، $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءب}}$ $\therefore \overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

٢ $\because \frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{\text{بهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{بهـ}}{\text{هـجـ}}$

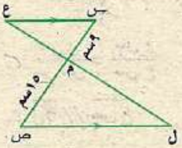
$\therefore \overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{جـء}}$ (وهو المطلوب)

٣ $\because \overline{\text{سع}} \parallel \overline{\text{لص}}$

$\therefore \frac{\text{عم}}{\text{عل}} = \frac{\text{سم}}{\text{سص}}$

$\therefore \frac{\text{عم}}{36} = \frac{9}{24}$

$\therefore$ عم $= 13.5$ سم (وهو المطلوب)



٤

(١) $\because \overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ $\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}}$

$\therefore \frac{4}{8} = \frac{\text{س}}{6}$ $\therefore$ س $= 3$ سم

(٢) $\because \overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$ $\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـجـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{ءب}}$

$\therefore \frac{\text{س}}{5} = \frac{\text{س} - 2}{3}$ $\therefore 5\text{س} - 10 = 3\text{س}$

$\therefore 2\text{س} = 10$ $\therefore$ س $= 5$ سم

(٣) $\because \overline{\text{ءو}} \parallel \overline{\text{أجـ}}$ $\therefore \frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{جـو}}{\text{جـب}}$

$\therefore \frac{\text{س}}{21} = \frac{6}{14}$ $\therefore$ س $= 9$ سم

(٤) $\because 2\,\text{ءب} = 12$ $\therefore$ ءب $= 6$ سم

، $\because 3\,\text{وجـ} = 12$ $\therefore$ وجـ $= 4$ سم

، $\because \overline{\text{ءو}} \parallel \overline{\text{أجـ}}$ $\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{جـو}}{\text{جـب}}$

∴ $\frac{س}{٦} = \frac{٤}{س + ٥}$ ∴ س (س + ٥) = ٢٤

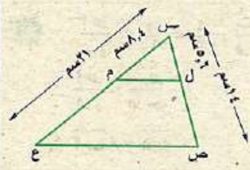
∴ س^{٢} + ٥ س − ٢٤ = ٠

∴ (س + ٨) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٨ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ س = ٣ سم

٥



∵ $\frac{س ل}{س ص} = \frac{٥,٦}{١٤}$

$= \frac{٢}{٥}$

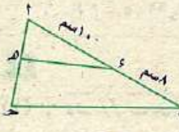
، $\frac{س م}{س ع} = \frac{٨,٤}{٢١}$

$= \frac{٢}{٥}$

∴ $\frac{س ل}{س ص} = \frac{س م}{س ع}$

∴ $\overline{ل م}$ // $\overline{ص ع}$ (وهو المطلوب)

٦



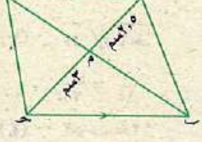
∵ ٥ أ هـ = ٤ هـ جـ

∴ $\frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{٤}{٥}$

، $\frac{أ د}{د ب} = \frac{١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$ ∴ $\frac{أ هـ}{هـ جـ} \neq \frac{أ د}{د ب}$

∴ $\overline{د هـ}$ لا توازى $\overline{ب جـ}$ (وهو المطلوب)

٧



∵ $\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ $\frac{م أ}{أ جـ} = \frac{م د}{د ب}$

∴ $\frac{٢,٥}{٣ + ٢,٥} = \frac{م د}{٧\frac{١}{٢}}$

∴ م د = ٣$\frac{١}{٢}$ سم (المطلوب أولاً)

∴ م ب = ٧$\frac{١}{٢}$ − ٣$\frac{١}{٢}$ = ٤ سم (المطلوب ثانياً)

٨

فى Δ أ ب جـ : ∵ $\overline{د و}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ $\frac{أ د}{د ب} = \frac{أ و}{و جـ}$ ∴ $\frac{٦}{٥} = \frac{أ و}{٥,٥}$

∴ أ و = ٦,٦ سم

∴ هـ و = ٦,٦ − ٣,٦ = ٣ سم (المطلوب أولاً)

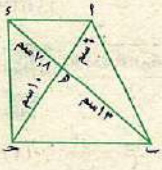
، فى Δ أ ب و :

∵ $\frac{أ د}{د ب} = \frac{٦}{٥}$ ، $\frac{أ هـ}{هـ و} = \frac{٣,٦}{٣} = \frac{٦}{٥}$

∴ $\frac{أ د}{د ب} = \frac{أ هـ}{هـ و}$

∴ $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب و}$ (المطلوب ثانياً)

٩



∵ $\frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

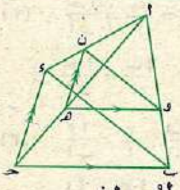
، $\frac{د هـ}{هـ ب} = \frac{٧,٨}{١٣} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{أ هـ}{هـ جـ} = \frac{د هـ}{هـ ب}$

∴ $\overline{أ د}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف (وهو المطلوب)

١٠



∵ $\overline{هـ و}$ // $\overline{جـ ب}$

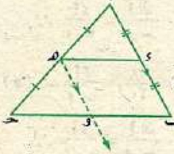
∴ $\frac{أ هـ}{أ جـ} = \frac{أ و}{أ ب}$

، ∵ $\overline{هـ ن}$ // $\overline{جـ د}$

∴ $\frac{أ هـ}{أ جـ} = \frac{أ ن}{أ د}$ ∴ $\frac{أ و}{أ ب} = \frac{أ ن}{أ د}$

∴ فى Δ أ ب د : $\overline{و ن}$ // $\overline{ب د}$ (وهو المطلوب)

١١



المعطيات :

أ ب جـ مثلث ، د منتصف $\overline{أ ب}$

، هـ منتصف $\overline{أ جـ}$

المطلوب : إثبات أن :

(١) $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

(٢) $\text{ءهـ} = \frac{1}{2}\,\text{بحـ}$

العمل : نرسم $\overleftrightarrow{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{أب}}$ ويقطع $\overline{\text{بحـ}}$ فى و

البرهان :

$\because \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = 1$ ، $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = 1$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}}$

$\therefore \overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ (المطلوب أولاً)

$\because \overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أحـ}}$

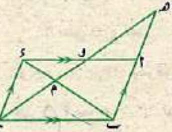
$\therefore$ و منتصف $\overline{\text{بحـ}}$

$\therefore \text{بو} = \frac{1}{2}\,\text{بحـ}$

، $\because$ الشكل ب ء هـ و متوازى أضلاع

$\therefore \text{ءهـ} = \text{بو} = \frac{1}{2}\,\text{بحـ}$ (المطلوب ثانيًا)

١٢



$\because \overline{\text{ءو}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

$\therefore \frac{\text{حـم}}{\text{مو}} = \frac{\text{بم}}{\text{مء}}$

، $\because \overline{\text{حـء}} \parallel \overline{\text{بهـ}}$

$\therefore \frac{\text{مهـ}}{\text{محـ}} = \frac{\text{مب}}{\text{مء}}$ $\therefore \frac{\text{حـم}}{\text{مو}} = \frac{\text{مهـ}}{\text{محـ}}$

$\therefore (\text{حـم})^2 = \text{مو} \times \text{مهـ}$ (وهو المطلوب)

١٣

$\because \overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بهـ}}$

$\therefore \frac{\text{أن}}{\text{نب}} = \frac{\text{ءن}}{\text{نهـ}}$

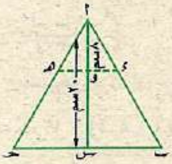
، $\because \overline{\text{نب}} \parallel \overline{\text{حـء}}$

$\therefore \frac{\text{ءن}}{\text{نهـ}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{بهـ}}$ $\therefore \frac{\text{أن}}{\text{نب}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{بهـ}}$

، $\because \overline{\text{بى}} \parallel \overline{\text{ءهـ}}$ $\therefore \frac{\text{بحـ}}{\text{بهـ}} = \frac{\text{حـى}}{\text{ىء}}$

$\therefore \frac{\text{أن}}{\text{نب}} = \frac{\text{حـى}}{\text{ىء}}$ (وهو المطلوب)

١٤



فى $\triangle$ أ ب س :

$\because 3\,\text{أء} = 2\,\text{ءب}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{2}{3}$

، $\because \frac{\text{أو}}{\text{وس}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أو}}{\text{وس}}$ $\therefore \overline{\text{ءو}} \parallel \overline{\text{بس}}$ (١)

فى $\triangle$ أ س حـ :

$\because 5\,\text{حـهـ} = 3\,\text{أحـ}$ $\therefore \frac{\text{أحـ}}{\text{حـهـ}} = \frac{5}{3}$

، $\because \frac{\text{أس}}{\text{سو}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ $\therefore \frac{\text{أحـ}}{\text{حـهـ}} = \frac{\text{أس}}{\text{سو}}$

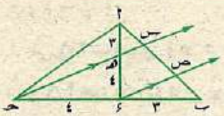
$\therefore \overline{\text{وهـ}} \parallel \overline{\text{سحـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

$\therefore$ النقط ء ، و ، هـ على استقامة واحدة

(وهو المطلوب)

١٥



فى $\triangle$ أ ء ص :

$\because \overline{\text{هـس}} \parallel \overline{\text{ءص}}$

$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{\text{أس}}{\text{سص}} = \frac{3}{4}$ (١)

، فى $\triangle$ ب حـ س : $\because \overline{\text{ءص}} \parallel \overline{\text{حـس}}$

$\therefore \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{بص}}{\text{سص}} = \frac{3}{4}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{\text{أس}}{\text{سص}} = \frac{\text{بص}}{\text{سص}}$

$\therefore \text{أس} = \text{بص}$ (وهو المطلوب)

١٦

فى $\triangle$ أ ب حـ : $\because \overline{\text{ءس}} \parallel \overline{\text{أحـ}}$

$\therefore \frac{\text{بس}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{بأ}}$ $\therefore \frac{\text{بس}}{13.5} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ بس = ٥,٤ سم

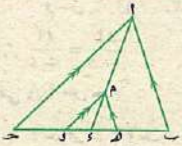
، ∵ هـ ص // أ ب ∴ حـ ص / حـ ب = حـ هـ / حـ أ

∴ حـ ص / ١٣,٥ = ٤ / ٩ ∴ حـ ص = ٦ سم

∴ س ص = ب حـ − (ب س + حـ ص)

= ١٣,٥ − (٥,٤ + ٦) = ٢,١ سم (وهو المطلوب)

١٧



∵ م هـ // أ ب

∴ ء م / ء أ = ء هـ / ء ب

، ∵ م و // أ حـ

∴ ء م / ء أ = ء و / ء حـ ∴ ء هـ / ء ب = ء و / ء حـ

، ∵ ء ب = ء حـ ∴ ء هـ = ء و

∴ ء منتصف هـ و (المطلوب أولاً)

، ∵ ء منتصف ب حـ

∴ أ ء متوسط فى Δ أ ب حـ

∴ ء م = $\frac{1}{3}$ أ ء

∴ فى Δ أ ب ء يكون ء هـ = $\frac{1}{3}$ ب ء

، فى Δ أ حـ ء يكون ء و = $\frac{1}{3}$ ء حـ

وبالجمع : ∴ ء هـ + ء و = $\frac{1}{3}$ (ب ء + ء حـ)

∴ هـ و = $\frac{1}{3}$ ب حـ (المطلوب ثانيًا)

١٨

∵ مساحة Δ أ ء هـ / مساحة Δ أ ب هـ = أ ء / أ ب

(لاحظ أن لهما نفس الارتفاع)

، مساحة Δ أ ب هـ / مساحة Δ أ ب حـ = أ هـ / أ حـ

(لاحظ أن لهما نفس الارتفاع)

، ∵ أ ء / أ ب = أ هـ / أ حـ (لأن ء هـ // ب حـ)

∴ مساحة Δ أ ء هـ / مساحة Δ أ ب هـ = مساحة Δ أ ب هـ / مساحة Δ أ ب حـ (وهو المطلوب)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ (١) (جـ) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (ب)

(٥) (ب)

إرشادات لحل رقم ١

(١) ∵ ق (∠ ى ء و) = ق (∠ ى حـ ب) (بالتناظر)

، ∵ ق (∠ أ ء ى) = ق (∠ حـ ء ب) (بالتقابل بالرأس)

، ∵ ق (∠ أ ء ى) = ق (∠ و ء ى)

∴ ق (∠ حـ ء ب) = ق (∠ ء حـ ب)

∴ ب حـ = ب ء = ١٥ سم

فى Δ أ ب حـ : ∵ ء هـ // ب حـ

∴ أ ء / أ ب = ء هـ / ب حـ ∴ أ ء / (أ ء + ١٥) = ١٠ / ١٥ = ٢ / ٣

∴ ٢ أ ء + ٣٠ = ٣ أ ء ∴ أ ء = ٣٠ سم

(٢) ∵ ٢ $س^2$ − ٣ س ص − ٥ $ص^2$ = ٠

∴ (٢ س − ٥ ص) (س + ص) = ٠

∴ ٢ س = ٥ ص أى أن : ص / س = ٢ / ٥

أو س = − ص (مرفوض)

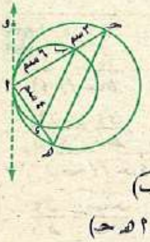
فى Δ أ ب حـ : ∵ هـ ء // ب حـ

∴ أ هـ / أ ب = هـ ء / ب حـ ∴ أ هـ / ١٠ = ص / س = ٢ / ٥

∴ أ هـ = ٤ سم

∴ هـ ب = ١٠ − ٤ = ٦ سم

(٣) نرسم المماس المشترك $\overleftrightarrow{\text{أو}}$



∵ ق (∠ و أ ب)

= ق (∠ أ ء ب)

(زاوية مماسية

وزاوية محيطية

مشتركتان فى القوس أ ب)

، ∵ ق (∠ و أ حـ) = ق (∠ أ هـ حـ)

(زاوية مماسية وزاوية محيطية مشتركتان فى القوس أ حـ)

$\therefore$ ق ($\angle$ أ ء ب) = ق ($\angle$ أ هـ حـ) وهما فى وضع تناظر

$\therefore \overline{ءب} // \overline{هـحـ}$ $\therefore \frac{أب}{بحـ} = \frac{أء}{ءهـ}$

$\therefore \frac{٦}{٣} = \frac{٤}{ءهـ}$ $\therefore$ ءهـ = ٢ سم

(٤) فى $\Delta\Delta$ أحـهـ ، هـحـو :

$\because \overline{أهـ}$ ، $\overline{هـو}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس حـ

$\therefore \frac{م(\Delta أحـهـ)}{م(\Delta حـهـو)} = \frac{أهـ}{هـو}$

$\therefore \frac{أهـ}{هـو} = \frac{١٥}{٩} = \frac{٥}{٣}$ $\therefore \frac{أهـ}{أو} = \frac{٥}{٨}$

فى Δ أبو : $\because \overline{ءهـ} // \overline{بو}$

$\therefore \frac{أء}{أب} = \frac{أهـ}{أو}$ $\therefore \frac{أء}{١٦} = \frac{٥}{٨}$

$\therefore$ أء = ١٠ سم

(٥) فى $\Delta\Delta$ حـبهـ ، هـبأ :

$\because \overline{حـهـ}$ ، $\overline{هـأ}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس ب

$\therefore \frac{م(\Delta أبهـ)}{م(\Delta حـبهـ)} = \frac{أهـ}{حـهـ}$

$\therefore \frac{م(\Delta أبهـ)}{٩} = \frac{٤}{٢}$

$\therefore$ م (Δ أبهـ) = ١٨ سم^٢

فى Δ أبحـ : $\because \overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

$\therefore \frac{أء}{ءب} = \frac{أهـ}{هـحـ} = \frac{٤}{٢} = \frac{٢}{١}$

$\therefore \frac{أء}{أب} = \frac{٢}{٣}$

فى $\Delta\Delta$ أءهـ ، أبهـ :

$\overline{أء}$ ، $\overline{أب}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس هـ

$\therefore \frac{م(\Delta أءهـ)}{م(\Delta أبهـ)} = \frac{أء}{أب}$

$\therefore \frac{م(\Delta أءهـ)}{١٨} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore$ م (Δ أءهـ) = ١٢ سم^٢

٢

$\because \frac{أء}{ءب} = \frac{حـهـ}{هـأ}$ $\therefore \frac{أء}{أء + ءب} = \frac{حـهـ}{حـهـ + هـأ}$

$\therefore \frac{أء}{أب} = \frac{حـهـ}{حـأ}$ (١)

، $\because \overline{هـى} // \overline{بحـ}$ $\therefore \frac{حـهـ}{حـأ} = \frac{بى}{بأ}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

$\therefore \frac{أء}{أب} = \frac{بى}{أب}$ $\therefore$ أء = بى

، $\because$ أس = بس (معطى)

$\therefore$ أء − أس = بى − بس

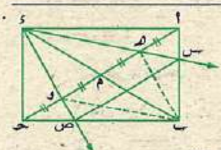
$\therefore$ ءس = س ى

$\therefore$ فى Δ ءهـى :

$\because$ س منتصف $\overline{ءى}$ ، $\overline{سو} // \overline{ىهـ}$

$\therefore$ و منتصف $\overline{ءهـ}$ (وهو المطلوب)

٣



العمل :

نرسم $\overline{بهـ}$ ، $\overline{بو}$

البرهان : فى الشكل ب هـ ء و :

$\because$ م منتصف كل من $\overline{هـو}$ ، $\overline{بء}$

$\therefore$ الشكل ب هـ ء و متوازى أضلاع

فى Δ أبو : $\because \overline{سهـ} // \overline{بو}$

$\therefore \frac{أس}{سب} = \frac{أهـ}{هـو} = \frac{١}{٢}$ (١)

، فى Δ بحـهـ : $\because \overline{وص} // \overline{هـب}$

$\therefore \frac{حـص}{صب} = \frac{حـو}{وهـ} = \frac{١}{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) : $\therefore \frac{أس}{سب} = \frac{حـص}{صب}$

وذلك فى Δ أبحـ :

$\therefore \overline{سص} // \overline{أحـ}$ (وهو المطلوب)

إرشادات تمارين 6

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (ب) (٥) (ب)
(٦) (جـ) (٧) (ب) (٨) (ب) (٩) (ب) (١٠) (جـ)
(١١) (جـ) (١٢) (د) (١٣) (أ) (١٤) (جـ) (١٥) (جـ)
(١٦) (د) (١٧) (جـ)

ثانياً الأسئلة المقالية

1

(١) هـ و (٢) ء و (٣) ء هـ (٤) ء و
(٥) م هـ (٦) ء و (٧) م هـ (٨) م حـ

2

(١) ∵ أب // ءهـ ، ب هـ = هـ حـ
∴ أء = ء حـ   ∴ ٣ س − ١ = ٢ س + ٣
∴ س = ٤
، ∵ ب هـ = هـ حـ ∴ ٢ ص + ٧ = ١٣
∴ ٢ ص = ٦   ∴ ص = ٣

(٢) ∵ أء // ب هـ // حـ و
، ء هـ = هـ و = و م
∴ أب = ب حـ = حـ م
∴ س² − ٣ = ٣ س + ١
∴ س² − ٣ س − ٤ = ٠
∴ (س − ٤) (س + ١) = ٠
∴ س = ٤ أ، س = −١ (مرفوض)
، ∵ ب حـ = حـ م   ∴ ٢ ص − ١ = ١٣
∴ ٢ ص = ١٤   ∴ ص = ٧

(٣) ∵ أب // ء حـ // هـ و
∴ أم / ب م = م ء / م حـ = ء و / حـ هـ
∴ (ص − ٤) / (٤ س − ١) = ٢ / ٣ = (ص − ٤) / (٢ س + ٧)
∴ ٤ س − ١ = ٢ س + ٧
∴ ٢ س = ٨   ∴ س = ٤
∴ (ص − ٤) / ١٥ = ٢ / ٣   ∴ ص − ٤ = ١٠
∴ ص = ١٤

(٤) ∵ أب // حـ ء // هـ و ، ب ء = ء و
∴ أحـ = حـ هـ
∴ ٢ س − ٣ = س + ٢ ∴ س = ٥
∵ ب ء = ء و
∴ ص + ٣ = ٦   ∴ ص = ٣

(٥) ∵ س + ٣ = ٢ ص + ٥
∴ س − ٢ ص = ٢   (١)
، س − ٣ = ص + ٢
∴ س − ص = ٥   (٢)
بطرح (١) من (٢) : ∴ ص = ٣
، بالتعويض في (٢) : ∴ س = ٨

(٦) ∵ ءهـ // ب حـ ، أء = ء ب
∴ أهـ = هـ حـ   ∴ س + ٦ = ٣ س − ٢
∴ ٢ س = ٨   ∴ س = ٤
في Δ أب حـ :
∵ ء ، هـ منتصفا أب ، أحـ على الترتيب
∴ ءهـ = ½ ب حـ
∴ ٣ ص − ٢ = ½ (٥ ص − ١)
∴ ٦ ص − ٤ = ٥ ص − ١   ∴ ص = ٣

(٧) ∵ ٢ س + ١ = ص − ٣
∴ س² − ٥ = ٣ س − ١
∴ س² − ٣ س − ٤ = ٠
∴ (س − ٤) (س + ١) = ٠
∴ س = ٤ أ، س = −١ (مرفوض)
∴ ص − ٣ = ٩   ∴ ص = ١٢

(٨) ∴ $\frac{\text{٣س} + ٢}{١٥} = \frac{\text{٢س} + ٤}{١٢}$

∴ ١٢ (٣س + ٢) = ١٥ (٢س + ٤)

∴ ٣٦س + ٢٤ = ٣٠س + ٦٠

∴ ٦س = ٣٦ ∴ س = ٦

∴ $\frac{\text{ص}}{١٥} = \frac{١١}{١٢}$ ∴ ص = $١٣\frac{٣}{٤}$

(٩) ∵ $\frac{\text{س} + ١}{٩} = \frac{٦}{٥} = \frac{١٠}{\text{ص}}$

∴ س + ١ = $\frac{٥٤}{٥} = ١٠\frac{٤}{٥}$

∴ س = $٩\frac{٤}{٥}$ ، ص = $\frac{٥٠}{٦} = ٨\frac{١}{٣}$

٣

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ده}}$ // $\overleftrightarrow{\text{سو}}$

، $\overleftrightarrow{\text{حب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حأ}}$ قاطعان لها

∴ $\frac{\text{حس}}{\text{حو}} = \frac{\text{سه}}{\text{وء}} = \frac{\text{به}}{\text{ءأ}}$

∴ $\frac{٥}{٧,٥} = \frac{٤}{\text{وء}} = \frac{\text{به}}{٦}$

∴ وء = ٦ سم ، به = ٤ سم (وهو المطلوب)

٤

∵ $\overline{\text{أح}}$ // $\overline{\text{وه}}$ // $\overline{\text{ءب}}$ ∴ $\frac{\text{مه}}{\text{مو}} = \frac{\text{هب}}{\text{وء}}$

∴ $\frac{٦}{\text{مو}} = \frac{٩}{١٥}$

∴ مو = ١٠ سم (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{أم}}{\text{مب}} = \frac{\text{حم}}{\text{مء}}$ ∴ $\frac{\text{أم}}{١٥} = \frac{١٨}{٢٥}$

∴ أم = ١٠,٨ سم (المطلوب ثانيًا)

٥

∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حء}}$ // $\overline{\text{هو}}$

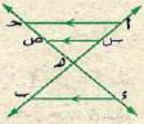
∴ $\frac{\text{أح}}{\text{بء}} = \frac{\text{حك}}{\text{ءك}} = \frac{\text{كو}}{\text{كه}} = \frac{\text{أو}}{\text{به}}$

∴ $\frac{٥}{\text{بء}} = \frac{١٠}{\text{ءك}} = \frac{٧,٥}{\text{كه}} = \frac{٢٢,٥}{١٨}$

∴ بء = ٤ سم ، ءك = ٨ سم ، كه = ٦ سم

(وهو المطلوب)

٦



∵ $\overline{\text{سص}}$ // $\overline{\text{بء}}$ // $\overline{\text{أح}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{حص}} = \frac{\text{هب}}{\text{هء}}$

∴ أس × هء = حص × هب (وهو المطلوب)

٧

∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حء}}$ // $\overline{\text{هو}}$ // $\overline{\text{سص}}$ // $\overline{\text{عك}}$

∴ $\frac{\text{أح}}{\text{بء}} = \frac{\text{حه}}{\text{ءو}} = \frac{\text{هس}}{\text{وص}} = \frac{\text{سع}}{\text{صك}}$

∴ $\frac{٢}{٢,٥} = \frac{\text{حه}}{\text{ءو}} = \frac{\text{هس}}{٤,٥} = \frac{\text{سع}}{٣}$

∴ هس = ٣,٦ سم ، سع = ٢,٤ سم

∴ هح = ١٢ − (٣,٦ + ٢,٤) = ٦ سم

∴ ءو = ٧,٥ سم (وهو المطلوب)

٨

∵ أس : سص : صح = ٢ : ٣ : ٥

∴ بء : ءه : هح = ٢ : ٣ : ٥

∴ $\frac{\text{بء}}{٢} = \frac{\text{ءه}}{٣} = \frac{\text{هح}}{٥}$ ∴ $\frac{\text{بء}}{٢} = \frac{٧,٥}{٣} = \frac{\text{هح}}{٥}$

∴ بء = ٥ سم ، هح = ١٢,٥ سم

، ∵ $\frac{\text{أس}}{\text{أح}} = \frac{\text{بء}}{\text{بح}}$ ∴ $\frac{٤}{\text{أح}} = \frac{٥}{٥ + ٧,٥ + ١٢,٥}$

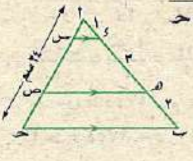
∴ أح = ٢٠ سم (وهو المطلوب)

٩

∵ $\overline{\text{ءس}}$ // $\overline{\text{هص}}$ // $\overline{\text{بح}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{أء}} = \frac{\text{سص}}{\text{ءه}}$

$= \frac{\text{صح}}{\text{هب}}$



∴ أس/١ = س ص/٣ = ص حـ/٢

= (أس + س ص + ص حـ)/(١ + ٣ + ٢) = أحـ/٦

= ٢٤/٦ = ٤

∴ أس = ٤ سم ، س ص = ١٢ سم

، ص حـ = ٨ سم (وهو المطلوب)

١٠

∵ أب : ب حـ : حـ ء

١ : ٢

٤ : ٥

٢ : ٤ : ٥

، ∵ ل١ // ل٢ // ل٣ // ل٤

∴ س ص/أب = ص ع/ب حـ = ع ن/حـ ء

∴ س ص/٢ = ص ع/٤ = ع ن/٥ = (س ص + ص ع + ع ن)/(٢ + ٤ + ٥)

= س ن/١١ = ١٦,٥/١١ = ٣/٢

∴ س ص = ٣ سم ، ص ع = ٦ سم

، ع ن = ٧,٥ سم (وهو المطلوب)

١١

∵ ب ء : ء أ : أ هـ

= ٥ : ٣ : (ب ء + ء أ)/٢

= ٥ : ٣ : ٤

، ب حـ // ء س // هـ ص

∴ حـ س/ب ء = س أ/ء أ = أ ص/أ هـ

∴ حـ س/٥ = س أ/٣ = ١٤/٤

∴ حـ س = ١٧,٥ سم ، س أ = ١٠,٥ سم

∴ أحـ = ١٧,٥ + ١٠,٥ = ٢٨ سم (وهو المطلوب)

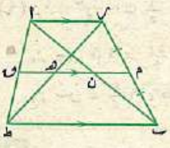
١٢

∵ ء حـ // و هـ ∴ ء ى/ى و = حـ ى/ى هـ

، ∵ ء ى/ى و = أ ى/ى حـ (معطى) ∴ حـ ى/ى هـ = أ ى/ى حـ

∴ (حـ ى)^{٢} = أ ى × ى هـ (وهو المطلوب)

١٣



∵ أر // م ق // ب ط

، ب ر ، ب أ قاطعان لها

∴ ب م/ب ن = م ر/ن أ

، ∵ ب م = م ر ∴ ب ن = ن أ

∴ ن منتصف ب أ

وبالمثل يمكن إثبات أن :

هـ منتصف ر ط ، ق منتصف أ ط (المطلوب أولاً)

∴ من Δ ر ب ط :

∵ م ، هـ منتصفا ر ب ، ر ط على الترتيب

∴ م هـ = ½ ب ط (١)

، من Δ أ ر ط :

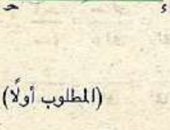
∵ هـ ، ق منتصفا ر ط ، أ ط على الترتيب

∴ هـ ق = ½ أ ر (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ م هـ + هـ ق = ½ (أ ر + ب ط)

∴ م ق = ½ (أ ر + ب ط) (المطلوب ثانيًا)

١٤



في Δ أ ب حـ :

∵ هـ منتصف ب حـ

، هـ ص // أ ب

∴ ص منتصف أ حـ

، هـ ص = ½ أ ب (المطلوب أولاً)

، ∵ $\overline{\text{أب}} // \overline{\text{وهـ}} // \overline{\text{ءحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءب}}$ قاطعان لهم

∴ $\frac{\text{أم}}{\text{بم}} = \frac{\text{مص}}{\text{مس}} = \frac{\text{صحـ}}{\text{سء}}$

∴ $\frac{\text{أم} + \text{مص}}{\text{بم} + \text{مس}} = \frac{\text{مص} + \text{صحـ}}{\text{مس} + \text{سء}}$

∴ $\frac{\text{أص}}{\text{بس}} = \frac{\text{محـ}}{\text{مء}}$ ∴ $\frac{\text{أص}}{\text{محـ}} = \frac{\text{بس}}{\text{ءم}}$ (المطلوب ثانيًا)

١٥

يمكن إيجاد $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}}$ بثلاث طرق :

الطريقة الأولى : باستخدام البُعد بين نقطتين فى المستوى الإحداثى :

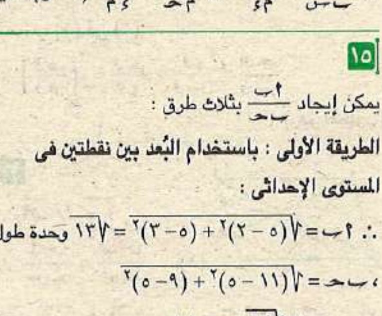
∴ $\text{أب} = \sqrt{(٥ - ٢)^٢ + (٥ - ٣)^٢} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول

، $\text{بحـ} = \sqrt{(١١ - ٥)^٢ + (٩ - ٥)^٢}$

$= ٢\sqrt{١٣}$ وحدة طول

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{\sqrt{١٣}}{٢\sqrt{١٣}} = \frac{١}{٢}$

الطريقة الثانية :



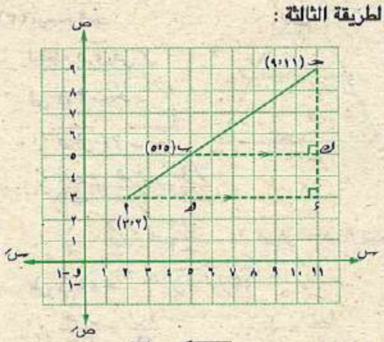
نجعل $\overline{\text{أحـ}}$ وترًا فى مثلث قائم الزاوية فى ء (١١ ، ٣)

ثم نرسم $\overleftrightarrow{\text{بهـ}} // \overline{\text{حـء}}$ ويقطع $\overline{\text{أء}}$ فى هـ (٥ ، ٣)

فى Δ أءحـ :

∵ $\overline{\text{بهـ}} // \overline{\text{حـء}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـء}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

الطريقة الثالثة :



كما سبق ولكن برسم $\overleftrightarrow{\text{بك}} // \overline{\text{أء}}$

ويقطع $\overline{\text{حـء}}$ فى ك (١١ ، ٥)

فى Δ أءحـ :

∴ $\overline{\text{بك}} // \overline{\text{أء}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{ءك}}{\text{كحـ}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ (١) (ب) (٢) (ب) (٣) (جـ) (٤) (د)

إرشادات لحل رقم ١

(١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}} // \overleftrightarrow{\text{حـء}} // \overleftrightarrow{\text{هـو}}$

∴ $\frac{\text{س}}{٤} = \frac{٣}{\text{ص}}$ ∴ س ص = ١٢

، $(\text{س} + \text{ص})^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + ٢\,\text{س ص}$

$= ٥٧ + ٢ \times ١٢ = ٨١$

∴ س + ص = ٩ سم

(٢) المسافة بين النقطتين (٠ ، ٦) ، (-٢ ، ٢)

$= \sqrt{(٠ + ٢)^٢ + (٦ - ٢)^٢} = ٢\sqrt{٥}$ سم

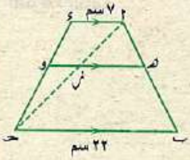
، المسافة بين النقطتين (-٢ ، ٢) ، (-٣ ، ٠)

$= \sqrt{(-٢ + ٣)^٢ + (٢ - ٠)^٢} = \sqrt{٥}$ سم

∴ $\frac{\text{س}}{\sqrt{٥}} = \frac{٢\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$ ∴ $\text{س} = ٢\sqrt{٥}$

(٣) نرسم $\overline{\text{أجـ}}$

لتقطع $\overline{\text{هـو}}$ في ن



في $\triangle$ أ ب جـ :

$\because \overline{\text{هـن}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{هـن}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أن}}{\text{أجـ}}$

$\therefore \frac{٢}{٥} = \frac{\text{هـن}}{٢٢} = \frac{\text{أن}}{\text{أجـ}}$ $\quad \therefore$ هـ ن = ٨,٨ سم

في $\triangle$ أ ء جـ : $\because \overline{\text{نو}} \parallel \overline{\text{أء}}$

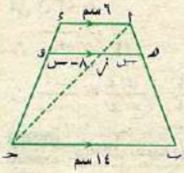
$\therefore \frac{\text{جـن}}{\text{جـأ}} = \frac{\text{نو}}{\text{أء}}$ $\quad \therefore \frac{٣}{٥} = \frac{\text{نو}}{٧}$

$\therefore$ ن و = ٤,٢ سم

$\therefore$ هـ و = ٨,٨ + ٤,٢ = ١٣ سم

(٤) نرسم $\overline{\text{أجـ}}$

ليقطع $\overline{\text{هـو}}$ في ن



نفرض أن هـ ن = س

في $\triangle$ أ ب جـ :

$\because \overline{\text{هـن}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

$\therefore \frac{\text{أن}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{هـن}}{\text{بجـ}}$ $\quad \therefore \frac{\text{أن}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{س}}{١٤}$ (١)

في $\triangle$ أ ء جـ : $\because \overline{\text{نو}} \parallel \overline{\text{أء}}$

$\therefore \frac{\text{جـن}}{\text{جـأ}} = \frac{\text{نو}}{\text{أء}}$

$\therefore \frac{\text{جـن}}{\text{جـأ}} = \frac{٨ - \text{س}}{٦}$ (٢)

يجمع (١) ، (٢) :

$\therefore \frac{\text{أن}}{\text{أجـ}} + \frac{\text{جـن}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{س}}{١٤} + \frac{٨ - \text{س}}{٦}$

$\therefore \frac{\text{أجـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٦\text{س}}{٨٤} + \frac{١١٢ - ١٤\text{س}}{٨٤}$

$\therefore \frac{١١٢ - ٨\text{س}}{٨٤} = ١$ $\quad \therefore ١١٢ - ٨\text{س} = ٨٤$

$\therefore ٨\text{س} = ٢٨$ $\quad \therefore \text{س} = ٣\frac{١}{٢}$

، $\because \frac{\text{أهـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{هـن}}{\text{بجـ}} = \frac{٣\frac{١}{٢}}{١٤} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \frac{\text{أهـ}}{\text{هـب}} = \frac{١}{٣}$

٢

$\because \overline{\text{بجـ}} \parallel \overline{\text{هـء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وء}}$ قاطعان لهما

$\therefore \frac{\text{وب}}{\text{وهـ}} = \frac{\text{وجـ}}{\text{وء}}$ (١)

، $\because \overline{\text{بء}} \parallel \overline{\text{هـس}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{وس}}$ قاطعان لهما

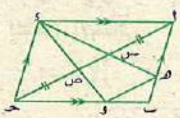
$\therefore \frac{\text{وب}}{\text{وهـ}} = \frac{\text{وء}}{\text{وس}}$ (٢)

وبضرب (١) في (٢) :

$\therefore \left(\frac{\text{وب}}{\text{وهـ}}\right)^٢ = \frac{\text{وجـ}}{\text{وء}} \times \frac{\text{وء}}{\text{وس}} = \frac{\text{وجـ}}{\text{وس}}$

(وهو المطلوب)

٣



$\because \overline{\text{أهـ}} \parallel \overline{\text{جـء}}$

$\therefore \frac{\text{أس}}{\text{سجـ}} = \frac{\text{هـس}}{\text{سء}}$ (١)

، $\because \overline{\text{جـو}} \parallel \overline{\text{أء}}$ $\quad \therefore \frac{\text{جـص}}{\text{أص}} = \frac{\text{وص}}{\text{صء}}$ (٢)

، $\because$ أ س = ص جـ (٣)

وبإضافة س ص للطرفين :

$\therefore$ أ ص = س جـ (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) : $\therefore \frac{\text{هـس}}{\text{سء}} = \frac{\text{وص}}{\text{صء}}$

$\therefore \overline{\text{هـو}} \parallel \overline{\text{سص}}$ (وهو المطلوب)

إرشادات تمارين 7

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (د)	(٢) (جـ)	(٣) (أ)	(٤) (ب)	(٥) (جـ)
(٦) (جـ)	(٧) (أ)	(٨) (جـ)	(٩) (د)	(١٠) (أ)
(١١) (جـ)	(١٢) (جـ)	(١٣) (د)	(١٤) (جـ)	(١٥) (ب)
(١٦) (د)	(١٧) (أ)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (جـ)
(٢١) (أ)	(٢٢) (جـ)	(٢٣) (جـ)	(٢٤) (د)	(٢٥) (ب)
(٢٦) (ب)	(٢٧) (د)	(٢٨) (جـ)	(٢٩) (أ)	(٣٠) (جـ)
(٣١) (أ)	(٣٢) (جـ)	(٣٣) (د)	(٣٤) (د)	(٣٥) (د)

(٣٦) (جـ) (٣٧) (أ) (٣٨) (جـ) (٣٩) (جـ) (٤٠) (ب)
(٤١) (د) (٤٢) (جـ) (٤٣) (ب) (٤٤) (أ) (٤٥) (د)
(٤٦) (ب) (٤٧) (جـ) (٤٨) (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

(١) ∵ $\overrightarrow{\text{بء}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{ءجـ}}{\text{أء}} = \frac{\text{جـب}}{\text{أب}}$ ∴ $\frac{\text{س} + ١}{٥} = \frac{\text{س} + ٤}{٨}$

∴ ٨ س + ٨ = ٥ س + ٢٠

∴ ٣ س = ١٢ ∴ س = ٤

(٢) ∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أجـ}}$ ∴ $\frac{٦\,\text{س}}{٥\,\text{س}} = \frac{١٠\,\text{س} + ٤}{٩\,\text{س} + ٢}$

∴ ٦ س (٩ س + ٢) = ٥ س (١٠ س + ٤)

∴ ٥٤ $\text{س}^٢$ + ١٢ س = ٥٠ $\text{س}^٢$ + ٢٠ س

∴ ٤ $\text{س}^٢$ − ٨ س = ٠

∴ ٤ س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٢

٢

(١) ∵ ق (∠ب) = ق (∠جـ)

∴ أب = أجـ = ٧ سم

، ∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = ١$ ∴ $\frac{\text{س}}{٤} = ١$

∴ س = ٤

∴ محيط △ أ ب جـ = ٧ + ٧ + ٨ = ٢٢ سم

(٢) في △ أ ء جـ القائم الزاوية في ء :

$(\text{ءجـ})^٢ = (٥٠)^٢ - (٣٠)^٢ = ١٦٠٠$

∴ ءجـ = ٤٠ سم

، ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ينصف ∠ ء أ جـ

∴ $\frac{\text{ءب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{أء}}{\text{أجـ}} = \frac{٣٠}{٥٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{\text{ءب} + \text{بجـ}}{\text{بجـ}} = \frac{٣ + ٥}{٥}$

∴ $\frac{\text{ءجـ}}{\text{س}} = \frac{٨}{٥}$ ∴ $\frac{٤٠}{\text{س}} = \frac{٨}{٥}$

∴ س = ٢٥ ∴ ءب = ٤٠ − ٢٥ = ١٥ سم

، أب = $\sqrt{\text{ءأ} \times \text{أجـ} - \text{بء} \times \text{بجـ}}$

= $\sqrt{٥٠ \times ٣٠ - ١٥ \times ٢٥} = ١٥\sqrt{٥}$ سم

∴ محيط △ أ ب جـ = $١٥\sqrt{٥} + ٥٠ + ٢٥$

= $(٧٥ + ١٥\sqrt{٥})$ سم

(٣) ∵ $\overrightarrow{\text{بء}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{بجـ}}$ ∴ $\frac{٤}{\text{س}} = \frac{٦}{\text{س} + ٣}$

∴ ٦ س = ٤ س + ١٢

∴ ٢ س = ١٢ ∴ س = ٦

∴ محيط △ أ ب جـ = ٦ + ٩ + ١٠ = ٢٥ سم

٣

(١) ∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ∴ $\frac{٣}{٤} = \frac{٤}{\text{س}}$

∴ س = $٥\frac{١}{٣}$

∴ أء = $\sqrt{\text{أب} \times \text{أجـ} - \text{بء} \times \text{ءجـ}}$

= $\sqrt{٤ \times ٥\frac{١}{٣} - ٣ \times ٤} = \frac{٢\sqrt{٢١}}{٣}$ سم

(٢) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ ب أ جـ ، $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{أهـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ جـ أ و

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{جـء}} = \frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ∴ $\frac{\text{س} + ١٠}{\text{س} + ١} = \frac{١٢}{٦} = ٢$

∴ ٢ س + ٢ = س + ١٠

∴ س = ٨

∴ أء = $\sqrt{\text{بء} \times \text{جـء} - \text{أب} \times \text{أجـ}}$

= $\sqrt{١٨ \times ٩ - ١٢ \times ٦} = ٣\sqrt{١٠}$ سم

٤

∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ب أ ج

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$

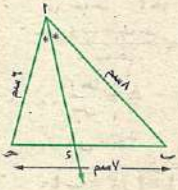
$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

∴ $\frac{\text{ب د} + \text{د ج}}{\text{د ج}} = \frac{4+3}{3}$

∴ $\frac{\text{ب ج}}{\text{د ج}} = \frac{7}{3}$ ∴ $\frac{7}{\text{د ج}} = \frac{7}{3}$

∴ د ج = ٣ سم

، ب د = ٧ − ٣ = ٤ سم (وهو المطلوب)



٥

∵ $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ب أ ج من الخارج ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{د ب}}{\text{د ج}}$

∴ $\frac{6}{8} = \frac{\text{د ب}}{\text{د ج}}$ ∴ $\frac{6}{8-6} = \frac{\text{د ب}}{\text{د ج} - \text{د ب}}$

∴ $\frac{6}{2} = \frac{\text{د ب}}{5}$ ∴ $\text{د ب} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ سم

∴ $\text{أ د} = \sqrt{\text{د ج} \times \text{د ب} - \text{أ ج} \times \text{أ ب}}$

$= \sqrt{20 \times 15 - 8 \times 6} = 6\sqrt{7}$ سم

(وهو المطلوب)

٦

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ب

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د ج}} = \frac{4}{5}$

∴ $\frac{\text{أ ب} + \text{ب ج}}{\text{ب ج}} = \frac{4+5}{5}$

، ∵ محيط المثلث = ٢٧ سم ، أ ج = ٩ سم

∴ أ ب + ب ج = ٢٧ − ٩ = ١٨ سم

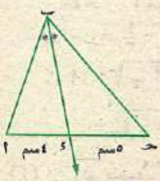
∴ $\frac{18}{\text{ب ج}} = \frac{9}{5}$ ∴ ب ج = ١٠ سم

∴ أ ب = ٨ سم

∴ $\text{ب د} = \sqrt{\text{أ ب} \times \text{ب ج} - \text{أ د} \times \text{د ج}}$

$= \sqrt{10 \times 8 - 4 \times 5} = 2\sqrt{15}$ سم

(وهو المطلوب)



٧

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ب أ د ∴ $\frac{\text{د س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$

، ∵ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب ج}}$

∴ $\frac{\text{د س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{د ص}}{\text{ص ج}}$

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{ص ج}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$ (وهو المطلوب)

٨

∵ $\overleftrightarrow{\text{د س}}$ ينصف ∠أ د ج

∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ج}} = \frac{\text{د أ}}{\text{د ج}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

، ∵ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{2}{3}$ ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ج}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}}$

∴ $\overline{\text{هـ س}} \parallel \overline{\text{ب ج}}$ (وهو المطلوب)

٩

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ب أ ج ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$

، ∵ $\overline{\text{هـ د}} \parallel \overline{\text{أ ج}}$ ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د ج}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ أ}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ أ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$ (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{6 - \text{ب هـ}} = \frac{6}{9}$ ∴ ٩ ب هـ = ٣٦ − ٦ ب هـ

∴ ١٥ ب هـ = ٣٦

∴ ب هـ = ٢,٤ سم ، أ هـ = ٦ − ٢,٤ = ٣,٦ سم

(المطلوب ثانيًا)

١٠

∵ $\overleftrightarrow{\text{د س}}$ ينصف ∠أ د ب ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د ب}}$ (١)

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{د ص}}$ ينصف ∠أ د ج ∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{ص ج}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د ج}}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

، ∵ د ب = د ج ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص ج}}$

∴ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب ج}}$ (وهو المطلوب)

١١

∵ $\overrightarrow{\text{أس}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ب س}}{\text{س حـ}}$ (١)

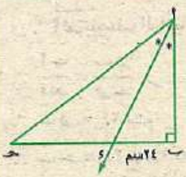
، ∵ $\overrightarrow{\text{أص}}$ ينصف ∠ ء أ حـ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ص حـ}}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) :

، ∵ أب = أء ∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س حـ}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ص حـ}}$

∴ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب ء}}$ (وهو المطلوب)

١٢



∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{٢٤}{\text{ء حـ}} = \frac{٣}{٥}$

∴ ء حـ = ٤٠ سم

∴ ب حـ = ٤٠ + ٢٤ = ٦٤ سم

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{٣}{٥}$ ∴ أب = ٣ م ، أحـ = ٥ م

من فيثاغورس : ∴ ب حـ = ٤ م

∴ ٤ م = ٦٤ ∴ م = ١٦

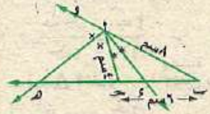
بالتعويض : ∴ أب = ٣ × ١٦ = ٤٨ سم

، أحـ = ٥ × ١٦ = ٨٠ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٨٠ + ٤٨ + ٦٤ = ١٩٢ سم

(وهو المطلوب)

١٣



∵ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ حـ أ و

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ حـ}}$

∴ $\frac{\text{حـ هـ} + ٦}{\text{حـ هـ}} = \frac{٨}{٤} = \frac{٢}{١}$

∴ ٢ حـ هـ = حـ هـ + ٦ ∴ حـ هـ = ٦ سم

، ∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٨}{٤}$

∴ $\frac{\text{ب ء} + \text{ء حـ}}{\text{ء حـ}} = \frac{٨ + ٤}{٤}$ ∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ء حـ}} = \frac{١٢}{٤}$

∴ $\frac{٦}{\text{ء حـ}} = ٣$ ∴ ء حـ = ٢ سم

∴ ء هـ = حـ هـ + ء حـ = ٦ + ٢ = ٨ سم

∴ ب ء = ٦ − ٢ = ٤ سم

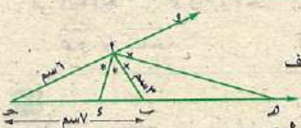
∴ أء = $\sqrt{\text{أب} \times \text{أحـ} - \text{ب ء} \times \text{ء حـ}}$

= $\sqrt{٨ \times ٤ - ٤ \times ٢} = ٢\sqrt{٦}$ سم

، أهـ = $\sqrt{\text{ب هـ} \times \text{حـ هـ} - \text{ب أ} \times \text{أحـ}}$

= $\sqrt{١٢ \times ٦ - ٨ \times ٤} = ٢\sqrt{١٠}$ سم (وهو المطلوب)

١٤



∵ $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ ب أ و

∴ $\frac{\text{حـ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{أب}} = \frac{٦}{٣} = ٢$

∴ حـ هـ = ٢ هـ ب ∴ حـ ب = ب هـ

∴ ب منتصف $\overline{\text{حـ هـ}}$

∴ $\overline{\text{أب}}$ متوسط فى Δ أ حـ هـ (المطلوب أولاً)

∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ ب ء = $\frac{٧}{٣}$ سم ، ء حـ = $\frac{١٤}{٣}$ سم ، ب هـ = ٧ سم

∴ هـ ء = $\frac{٧}{٣} + ٧ = \frac{٢٨}{٣}$ سم ، هـ حـ = ١٤ سم

∴ $\frac{م(\Delta \text{ أ ء هـ})}{م(\Delta \text{ أ حـ هـ})} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{حـ هـ}} = \frac{\frac{٢٨}{٣}}{١٤} = \frac{٢}{٣}$

(لأن لهما نفس الارتفاع) (المطلوب ثانيًا)

١٥

(١) ∵ $\overrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

، ∵ $\frac{\text{حـ و}}{\text{أ و}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{حـ و}}{\text{أ و}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ (وهو المطلوب)

(٢) في △ أ ب ء :

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب ء

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ء}}$ (١)

في △ أ ء حـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ ينصف ∠ أ ء حـ

∴ $\frac{\text{أ و}}{\text{و حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{ء حـ}}$ (٢)

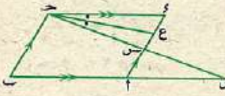
، ∵ أ ب = أ ء ، ب ء = ء حـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{أ و}}{\text{و حـ}}$

في △ أ ء حـ : ∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ء حـ}}$

∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ (وهو المطلوب)

١٦



∵ $\overline{\text{أ س}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{س حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{س ص}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{س حـ}}$ (١)

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{حـ ع}}$ ينصف ∠ ء حـ س

∴ $\frac{\text{ء ع}}{\text{ع س}} = \frac{\text{ء حـ}}{\text{حـ س}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ، ∵ أ ب = ء حـ

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ء ع}}{\text{ع س}}$ (وهو المطلوب)

١٧

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ء}}$ (١)

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ينصف ∠ حـ أ ء

∴ $\frac{\text{ء و}}{\text{و حـ}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}}$ (٢)

بضرب (١) في (٢) :

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} \times \frac{\text{ء و}}{\text{و حـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ء}} \times \frac{\text{أ ء}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ حـ}}$

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ∴ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} \times \frac{\text{ء و}}{\text{و حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$ (وهو المطلوب)

١٨

∵ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ س}}{\text{س ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{ص حـ}}$

∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{\text{أ ص}}{٣}$

∴ أ ص = ١,٥ سم (المطلوب أولًا)

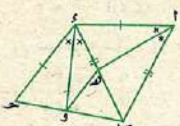
، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند أ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ حـ}}$ ∴ $\frac{٦}{٤,٥} = \frac{\text{ب هـ}}{١٨}$

∴ ب هـ = ٢٤ سم

∴ ب حـ = ٢٤ − ١٨ = ٦ سم (المطلوب ثانيًا)

١٩



∵ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ ء

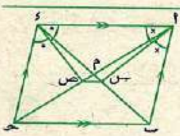
∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}}$ (١)

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{ء و}}$ ينصف ∠ ب ء حـ ∴ $\frac{\text{ء ب}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و حـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ، ∵ أ ب = ب ء ، أ ء = ء حـ

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ء}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و حـ}}$ ∴ $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{ء حـ}}$ (وهو المطلوب)

٢٠



في △ أ ب ء :

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ ء

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س ء}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ ء}}$ (١)

، في △ أ حـ ء : ∵ $\overleftrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف ∠ أ ء حـ

∴ $\frac{\text{حـ ص}}{\text{ص أ}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ء أ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ، ∵ حـ ء = ب أ

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س ء}} = \frac{\text{حـ ص}}{\text{ص أ}}$

∴ $\overline{\text{ب حـ}} \parallel \overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{أ ء}}$ (وهو المطلوب)

[٢١]

∵ هـ منتصف $\overset{\frown}{\text{أب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ينصف ∠ أ د ب

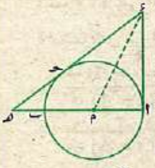
∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ $\frac{م(\Delta \text{أ د جـ})}{م(\Delta \text{ب د جـ})} = \frac{م(\Delta \text{أ هـ جـ})}{م(\Delta \text{ب هـ جـ})} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}}$

∴ $\frac{م(\Delta \text{أ د جـ}) + م(\Delta \text{أ هـ جـ})}{م(\Delta \text{ب د جـ}) + م(\Delta \text{ب هـ جـ})} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{م(\Delta \text{أ د هـ})}{م(\Delta \text{ب د هـ})} = \frac{٢}{٣}$ (وهو المطلوب)

[٢٢]



العمل : نرسم $\overline{\text{د م}}$

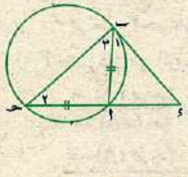
البرهان :

∵ $\overline{\text{د أ}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$ مماستان للدائرة

∴ $\overleftrightarrow{\text{د م}}$ ينصف ∠ أ د جـ ∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د هـ}}$

، ∵ أ د = د جـ (نظرية) ∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{د هـ}}$ (وهو المطلوب)

[٢٣]



∵ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢)

(مماسية ومحيطية مشتركتان فى $\overset{\frown}{\text{أب}}$)

، ق (∠ ٢) = ق (∠ ٣) (لأن أ ب = أ جـ)

∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٣) ∴ $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ينصف ∠ د ب جـ

∴ $\frac{\text{د أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{د ب}}{\text{ب جـ}}$

، ∵ أ ب = أ جـ ∴ $\frac{\text{د أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{د ب}}{\text{ب جـ}}$

∴ د ب × ب أ = د أ × ب جـ (وهو المطلوب)

ثالثا مسائل تقيس مهارات التفكير

[١]

(١) (ب)	(٢) (أ)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)
(٥) (أ)	(٦) (ب)	(٧) (جـ)	(٨) (جـ)
(٩) (د)	(١٠) (أ)	(١١) (أ)	(١٢) (د)
(١٣) (ب)			

إرشادات لحل رقم [١]

(١) فى Δ أ ب جـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}}$ ∴ $\frac{٦}{\text{أ جـ}} = \frac{٣}{\text{د جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{د جـ}} = \frac{٦}{٣} = ٢$

فى Δ أ جـ د : ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ينصف ∠ أ جـ د

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$ ∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}} = \frac{٢}{١} = ٢$

(٢) فى Δ أ ب جـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ينصف ∠ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{د جـ}}$ ∴ $\frac{٣}{\text{ب جـ}} = \frac{٢}{٤}$

∴ ب جـ = ٦ سم

، فى Δ أ ب جـ : $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف الزاوية الخارجة عند أ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$ ∴ $\frac{٣}{٦} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب هـ} + ٦}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب هـ} + ٦} = \frac{١}{٢}$ ∴ ٢ ب هـ = ب هـ + ٦

∴ ب هـ = ٦ سم

(٣) فى Δ أ د جـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ينصف ∠ أ د جـ

∴ $\frac{\text{جـ د}}{\text{أ د}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{٣}{٤}$ (١)

، فى Δ أ د ب : ∵ $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ ينصف ∠ أ د ب

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{أ د}} = \frac{\text{ب و}}{\text{أ و}} = \frac{٢}{٣}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{أ د}} + \frac{\text{جـ د}}{\text{أ د}} = \frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{ب د} + \text{د جـ}}{\text{أ د}} = \frac{١٧}{١٢}$ ∴ $\frac{١٧}{\text{أ د}} = \frac{١٧}{١٢}$

∴ أ د = ١٢ سم

، من (١) : $\frac{\text{جـ د}}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ ∴ جـ د = ٩ سم

(٤) في Δ أ ب جـ : ∵ ق(∠د أ ب) = ق(∠د أ جـ)

∴ $\overrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠جـ أ ب

∴ $\frac{\text{دجـ}}{\text{دب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أب}}$

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{٨}{٤} = \frac{٢}{١}$ (١)

، ∵ ق(∠ب) = ٢ ق(∠د أ ب) = ٢ ق(∠د أ جـ)

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ أ ب)

∴ جـ أ = جـ ب = ١٢ سم

، من (١) : ∴ $\frac{١٢}{\text{أب}} = \frac{٢}{١}$ ∴ أ ب = ٦ سم

(٥) ب د = $\sqrt{(٣-١)^{٢} + (٣-١)^{٢}} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول

، د جـ = $\sqrt{(١-٠)^{٢} + (١-٠)^{٢}} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

في Δ أ ب جـ : $\overrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ب أ جـ

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{دجـ}}{\text{دب}}$

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$

(٦) في ΔΔ أ ب د ، أ د جـ :

$\overline{\text{بد}}$ ، $\overline{\text{دجـ}}$ على استقامة واحدة ، مشتركان في الرأس أ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{أبد})}{\text{م}(\Delta \text{أدجـ})} = \frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ} + \text{بد}} = \frac{٣}{٣ + ٥} = \frac{٣}{٨}$

∴ $\frac{\text{بد}}{٨} = \frac{٣}{٨}$ ∴ ب د = ٣ سم

∴ د جـ = ٨ − ٣ = ٥ سم

، ∵ $\overrightarrow{\text{أد}}$ ينصف ∠ب أ جـ

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{٣}{٥}$

نفرض أن : أ ب = ٣ س ، أ جـ = ٥ س

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∴ $(\text{بجـ})^{٢} = (\text{أجـ})^{٢} - (\text{أب})^{٢}$

∴ $(\text{بجـ})^{٢} = (٥\text{س})^{٢} - (٣\text{س})^{٢}$

∴ $(٨)^{٢} = ٢٥\text{س}^{٢} - ٩\text{س}^{٢}$

∴ $١٦\text{س}^{٢} = ٦٤$ ∴ $\text{س}^{٢} = ٤$

∴ س = ٢ ∴ أ ب = ٣ × ٢ = ٦ سم

(٧) في Δ د ب جـ : ∵ $\overrightarrow{\text{دو}}$ ينصف ∠ب د جـ

∴ $\frac{\text{بد}}{\text{دجـ}} = \frac{\text{بو}}{\text{وجـ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

في ΔΔ ب د و ، و د جـ :

$\overline{\text{بو}}$ ، $\overline{\text{وجـ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس د

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{بدو})}{\text{م}(\Delta \text{ودجـ})} = \frac{\text{بو}}{\text{وجـ}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١٠}{\text{م}(\Delta \text{ودجـ})} = \frac{١}{٢}$

∴ م(Δ و د جـ) = ٢٠ $\text{سم}^{٢}$

∴ م(Δ جـ د ب) = ٢٠ + ١٠ = ٣٠ $\text{سم}^{٢}$

في ΔΔ جـ د ب ، جـ د أ :

$\overline{\text{دب}}$ ، $\overline{\text{دأ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس جـ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{جـدب})}{\text{م}(\Delta \text{جـدأ})} = \frac{\text{بد}}{\text{دأ}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{٣٠}{\text{م}(\Delta \text{جـدأ})} = \frac{٢}{٣}$

∴ م(Δ جـ د أ) = ٤٥ $\text{سم}^{٢}$

في Δ أ ب جـ : ∵ $\overline{\text{دهـ}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{بد}}{\text{بأ}} = \frac{\text{جـهـ}}{\text{جـأ}}$ ∴ $\frac{\text{جـهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

في ΔΔ د هـ جـ ، د أ جـ :

∵ $\overline{\text{هـجـ}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان في الرأس د

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{دهـجـ})}{\text{م}(\Delta \text{دأجـ})} = \frac{\text{هـجـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٢}{٥}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta \text{دهـجـ})}{٤٥} = \frac{٢}{٥}$

∴ م(Δ د هـ جـ) = ١٨ $\text{سم}^{٢}$

(٨) ∵ ق($\overset{\frown}{\text{ب س}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{س ص}}$)

∴ ق(∠ب جـ س) = ق(∠س جـ ص)

∴ $\overrightarrow{\text{جـد}}$ ينصف ∠ب جـ أ

∴ $\frac{\text{بجـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{بد}}{\text{أد}}$ ∴ $\frac{\text{بجـ}}{\text{أجـ}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٤\sqrt{٣}} = \frac{١}{٢}$

نفرض أن : ب حـ = س ، حـ أ = ٢ س

فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

∴ $(\text{أ حـ})^2 - (\text{ب حـ})^2 = (\text{أ ب})^2$

∴ $(٢\,\text{س})^2 - (\text{س})^2 = (٦\sqrt{٣})^2$

∴ ٣ س^2 = ١٠٨ ∴ س^2 = ٣٦

∴ س = ٦

∴ ب حـ = ٦ سم ، حـ أ = ١٢ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م

∴ $(\text{أ ب})^2$ = أ ص × أ حـ

∴ $(٦\sqrt{٣})^2$ = أ ص × ١٢

∴ أ ص = ٩ سم

(٩) فى Δ أ ب حـ : ∵ ق(∠ ب أ حـ) = ٩٠°

∴ ب حـ = $\sqrt{(٦)^2 + (٨)^2}$ = ١٠ سم

، م(Δ أ ب حـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم^2

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف الزاوية الخارجة عن Δ أ ب حـ عند الرأس أ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}} = \frac{٣}{١}$

فى $\Delta\Delta$ أ ب ء ، أ ب حـ :

∵ $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{حـ ب}}$ على استقامة واحدة

، مشتركان فى الرأس أ

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب ء})}{\text{م}(\Delta\,\text{أ ب حـ})} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}} = \frac{٣}{١}$

∴ م(Δ أ ب ء) = ٣ × ٢٤ = ٧٢ سم^2

(١٠) نفرض أن : هـ ء = ء حـ = س

فى Δ أ ء ب : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ينصف ∠ ء أ حـ

∴ $\frac{\text{ء حـ}}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{أ ء}}{\text{أ ب}}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{حـ ب}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

∴ حـ ب = ٢ س

، ∵ $(\text{أ حـ})^2$ = أ ء × أ ب − حـ ء × حـ ب

∴ $(\sqrt{٦})^2$ = ٣ × ٦ − س × ٢ س

∴ ٢ س^2 = ١٨ − ٦ = ١٢

∴ س^2 = ٦ ∴ س = $\sqrt{٦}$

∴ ء هـ = ء حـ = $\sqrt{٦}$

، ∵ ء أ × ء و = ء هـ × ء حـ

∴ ٣ × ء و = $\sqrt{٦} \times \sqrt{٦}$ ∴ ء و = ٢ سم

(١١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف الزاوية الخارجة عن Δ أ ب حـ عند الرأس أ

∴ ق(∠ هـ أ ء) = ٩٠°

∵ ظا θ = − ظا (١٨٠° − θ) = − ظا (∠ أ هـ ء)

= − $\frac{\text{أ ء}}{\text{أ هـ}} = \frac{-٨}{٦} = \frac{-٤}{٣}$

(١٢) فى Δ أ ب حـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}} = \frac{١}{٣}$ (١)

، فى Δ أ ب هـ : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف ∠ ب أ هـ

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س هـ}} = \frac{٨}{٤} = \frac{٢}{١}$

، ∵ $\overline{\text{س و}} \parallel \overline{\text{هـ حـ}}$ ∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{س هـ}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و حـ}} = \frac{٢}{١}$

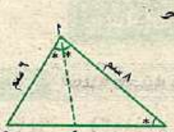
∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{ب حـ}} = \frac{٢}{٣}$ (٢)

بطرح (١) من (٢) : ∴ $\frac{\text{ب و}}{\text{ب حـ}} - \frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}} = \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{ء و}}{\text{ب حـ}} = \frac{١}{٣}$

(١٣) نرسم $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ

ويقطع $\overline{\text{ب حـ}}$ فى ء



، ∵ ق(∠ أ)

= ٢ ق(∠ ب)

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ب أ ء)

∴ ب ء = ء أ

نفرض أن : ب د = د أ = س

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$ ∴ $\frac{\text{س}}{\text{د جـ}} = \frac{٨}{٦}$

∴ د جـ = $\frac{٣}{٤}$ س

، ∵ $(\text{أ د})^2$ = أ ب × أ جـ − ب د × د جـ

∴ $(\text{س})^2$ = ٨ × ٦ − س × $\frac{٣}{٤}$ س

∴ س^2 = ٤٨ − $\frac{٣}{٤}$ س^2

∴ $\frac{٧}{٤}$ س^2 = ٤٨ ∴ $\text{س}^2 = \frac{١٩٢}{٧}$

∴ س = $\frac{٨\sqrt{٢١}}{٧}$

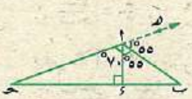
، ∵ ب جـ = ب د + د جـ

= $\frac{٨\sqrt{٢١}}{٧} + \frac{٣}{٤}\left(\frac{٨\sqrt{٢١}}{٧}\right)$

= $\frac{٨\sqrt{٢١}}{٧} + \frac{٦\sqrt{٢١}}{٧} = ٢\sqrt{٢١}$ سم

٢

العمل : نرسم $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ فيكون



ق(∠ هـ أ ب) = °٥٥

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ينصف ∠ هـ أ د

∴ $\frac{\text{د أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}}$

∴ أ د × ب جـ = أ جـ × ب د = ٣٦ سم^2

∴ مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ د

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦ = ١٨ سم^2

(وهو المطلوب)

8 إرشادات تمارين

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (أ) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ)

(٥) (د) (٦) (ب) (٧) (د) (٨) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

١

∵ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

، $\frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}} = \frac{٤,٢}{١٠,٥ - ٤,٢}$

$= \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د جـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ (وهو المطلوب)

٢

∵ $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}} = \frac{٦}{٣,٦} = \frac{٥}{٣}$

، $\frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}} = \frac{٤ + ٦}{٦} = \frac{٥}{٣}$

∴ $\frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{ب أ}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ جـ أ هـ (وهو المطلوب)

٣

(١) ∵ $\overleftarrow{\text{د هـ}}$ ينصف ∠ أ د جـ في Δ أ د جـ

∴ $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{أ د}} = \frac{٢٨}{٤٢} = \frac{٢}{٣}$

، ∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب أ}} = \frac{٣٦}{٥٤} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{أ هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب أ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ب هـ}}$ ينصف ∠ أ ب جـ في Δ أ ب جـ

(وهو المطلوب)

(٢) ∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ

∴ $(\text{ب جـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ جـ})^2$

$= (٣٠)^2 + (٤٠)^2 = ٢٥٠٠$

∴ ب جـ = ٥٠ سم

، ∵ $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ أ د = $\frac{\text{أ ب} \times \text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$ (نظرية إقليدس)

∴ أ د = ٢٤ سم

∴ أهـ = ٢٤ − ٩ = ١٥ سم

، ∵ Δ أب جـ ~ Δ د ب أ

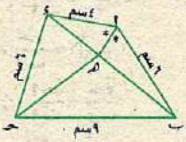
∴ $\frac{\text{أب}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب أ}}$ ∴ $\frac{٣٠}{\text{د ب}} = \frac{٥٠}{٣٠}$

∴ د ب = ١٨ سم ∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{أب}} = \frac{١٨}{٣٠} = \frac{٣}{٥}$

، $\frac{\text{د هـ}}{\text{أهـ}} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$ ∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{أب}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{أهـ}}$

∴ ب هـ ينصف ∠ أب جـ (وهو المطلوب)

٤



∵ أهـ ينصف ∠ د أب

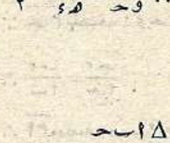
∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أد}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ د}}$

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ د}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ د}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ د}}$

∴ جـ هـ ينصف ∠ ب جـ د (المطلوب ثانيًا)

٥



في Δ أ جـ د :

∵ ٢ أهـ = ٣ هـ د

∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـ د}} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ هـ و // د جـ ∴ $\frac{\text{أو}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ د}} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{أو}}{\text{و جـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}}$

∴ ب و ينصف ∠ أب جـ في Δ أب جـ

(وهو المطلوب)

٦

∵ د هـ ينصف ∠ أ د ب ∴ $\frac{\text{أد}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ ب}}$ (١)

، ∵ هـ و // ب جـ ∴ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{أو}}{\text{و جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

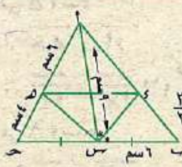
، ∵ ب د = د جـ ∴ $\frac{\text{أد}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أو}}{\text{و جـ}}$

∴ د و ينصف ∠ أ د جـ (المطلوب أولاً)

، ∵ د هـ ينصف ∠ أ د ب ، د و ينصف ∠ أ د جـ

، د ∈ ب جـ ∴ هـ د ⊥ د و (المطلوب ثانيًا)

٧



∵ س د ينصف ∠ أ س ب

∴ $\frac{\text{أد}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أس}}{\text{س ب}} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$ (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{أد}}{\text{د ب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ د هـ // ب جـ (المطلوب ثانيًا)

، ∵ $\frac{\text{أس}}{\text{س ب}} = \frac{٣}{٢}$ ، س ب = س جـ

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{س جـ}} = \frac{٣}{٢}$

، ∵ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{س جـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ س هـ ينصف ∠ أ س جـ (المطلوب ثالثًا)

٨

∵ ب س ينصف ∠ أب جـ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أس}}{\text{س جـ}}$

، ∵ س ص // جـ د ∴ $\frac{\text{أس}}{\text{س جـ}} = \frac{\text{أص}}{\text{ص د}}$

∴ $\frac{\text{أب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أص}}{\text{ص د}}$

، ∵ أب = أجـ ، ب جـ = جـ د ∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{أص}}{\text{ص د}}$

∴ جـ ص ينصف ∠ أ جـ د (وهو المطلوب)

٩

∵ أهـ ينصف ∠ ب أ جـ ∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ ب}}$

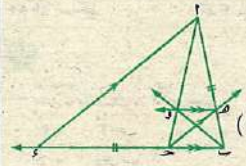
، ∵ هـ و // ب د ∴ $\frac{\text{هـ جـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{و د}}$

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{و د}}$

، ∵ أب = أد ∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أد}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{و د}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أو}}$ ينصف ∠ جـ أ د (وهو المطلوب)

١٠



في Δ أ ب د :

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{أد}}$

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ أ}}$ (١)

في Δ أ ب جـ :

∵ $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{جـ و}}{\text{و أ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ أ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جـ د}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{و أ}}$

، ∵ أ ب = جـ د ∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{جـ و}}{\text{و أ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{ب و}}$ ينصف ∠ أ ب جـ في Δ أ ب جـ (وهو المطلوب)

١١

∵ $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ب ∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د م}}{\text{م جـ}}$ (١)

، ∵ $\overleftarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ أ ∴ $\frac{\text{أ د}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{د م}}{\text{م جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ + أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{د ب}}{١٦} = \frac{\text{أ د}}{٨} = \frac{١٢}{٢٤}$ ∴ أ د = ٤ سم (وهو المطلوب)

١٢

∵ $\overleftarrow{\text{ع م}}$ ينصف ∠ س ع ل

، ∵ $\overleftarrow{\text{ص م}}$ ينصف ∠ س ص ل

∴ م هى نقطة تلاقى منصفات زوايا المثلث الداخلة

∴ $\overleftarrow{\text{س م}}$ ينصف ∠ ع س ص ∴ $\frac{\text{ع ل}}{\text{ل ص}} = \frac{\text{س ع}}{\text{س ص}}$

∴ $\frac{\text{ع ل}}{\text{ص ل}} = \frac{٥}{٨}$ ∴ ٨ ع ل = ٥ ص ل

(وهو المطلوب)

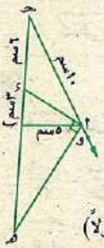
١٣

∵ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{١٥}{٩} = \frac{٥}{٣}$ ، $\frac{\text{د جـ}}{\text{ب د}} = \frac{١٠}{٦} = \frac{٥}{٣}$

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{ب د}}$ ∴ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ

(وهو المطلوب)

١٤



∵ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

، $\frac{\text{جـ د}}{\text{د ب}} = \frac{٦}{٣} = ٢$

∴ $\frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{د ب}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ ب أ جـ (المطلوب أولاً)

∵ أ ∈ $\overleftrightarrow{\text{و جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ينصف ∠ جـ أ ب ، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{أ هـ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ و أ ب ∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\frac{٥}{١٠} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{٩ + ب هـ}}$ ∴ ٤٥ + ٥ ب هـ = ١٠ ب هـ

∴ ب هـ = ٩ سم (المطلوب ثانيًا)

١٥

في Δ أ ب د :

∵ $\overleftarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ د ب س ∴ $\frac{\text{د م}}{\text{أ م}} = \frac{\text{د ب}}{\text{أ ب}}$

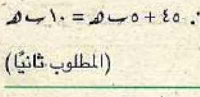
، في Δ أ جـ د :

∵ $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ ينصف ∠ د جـ ص ∴ $\frac{\text{د م}}{\text{أ م}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{أ جـ}}$ ∴ $\frac{\text{د ب}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ م}}$ ينصف ∠ ب أ جـ (وهو المطلوب)

١٦



∵ $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ د}}{\text{أ ب}}$

∴ $\frac{\text{أ هـ}}{٩} = \frac{٢}{٦}$ ∴ أ هـ = ٣ سم (المطلوب أولاً)

، ∵ $\frac{\text{أهـ}}{\text{هـحـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{بحـ}} = \frac{1}{2}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{بهـ}}$ ينصف ∠ أبحـ (المطلوب ثانيًا)

١٧

∵ $\overline{\text{هـء}} \parallel \overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

∴ $\frac{\text{هـس}}{\text{بس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{حـص}}$ (١)

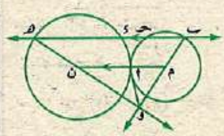
، ∵ أء × بس = أحـ × هـس

∴ $\frac{\text{هـس}}{\text{بس}} = \frac{\text{أء}}{\text{أحـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{حـص}} = \frac{\text{أء}}{\text{أحـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أص}}$ ينصف ∠ حـ أ ء (وهو المطلوب)

١٨



فى ∆ بوهـ :

∵ $\overleftrightarrow{\text{من}} \parallel \overleftrightarrow{\text{بهـ}}$

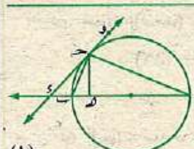
∴ $\frac{\text{بم}}{\text{مو}} = \frac{\text{هـن}}{\text{ون}}$

، ∵ بم = مأ ، هـن = أن

∴ $\frac{\text{مأ}}{\text{مو}} = \frac{\text{أن}}{\text{ون}}$ ∴ $\frac{\text{مأ}}{\text{أن}} = \frac{\text{مو}}{\text{ون}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{وأ}}$ ينصف ∠ م و ن (وهو المطلوب)

١٩



∵ $\frac{\text{ءب}}{\text{بهـ}} = \frac{\text{ءحـ}}{\text{حـهـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{حـب}}$ ينصف ∠ ءحـهـ (١)

∵ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة

∴ ق(∠ أحـب) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أحـ}} \perp \overline{\text{بحـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $\overleftrightarrow{\text{حـأ}}$ ينصف ∠ و حـ هـ

(منصفا الزاوية متعامدان) (المطلوب أولاً)

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ءحـ}}{\text{حـهـ}}$

، ∵ $\frac{\text{ءب}}{\text{بهـ}} = \frac{\text{ءحـ}}{\text{حـهـ}}$

∴ $\frac{\text{أء}}{\text{أهـ}} = \frac{\text{ءب}}{\text{بهـ}}$ ∴ $\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{بهـ}}$ (المطلوب ثانيًا)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

فى ∆ أبحـ : ∵ حـء = ١٠ − ٤ = ٦ سم

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ (المطلوب أولاً)

فى ∆ أبو : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ينصف ∠ أ ، $\overline{\text{أهـ}} \perp \overline{\text{بو}}$

من تطابق ∆∆ أهـب ، أهـو

∴ ∆ أبو متساوى الساقين

∴ أب = أو = ٦ سم

∴ حـو = ٩ − ٦ = ٣ سم

، ∵ ∆∆ بأو ، بحـو مشتركان فى الرأس ب

، و ∈ $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\text{أبو})}{\text{م}(\Delta\text{حـبو})} = \frac{\text{أو}}{\text{وحـ}} = \frac{٦}{٣} = ٢$ (المطلوب ثانيًا)

إرشادات تمارين 9

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (جـ) (٢) (ب) (٣) (أ) (٤) (د) (٥) (أ)

(٦) (أ) (٧) (د) (٨) (أ) (٩) (جـ) (١٠) (أ)

(١١) (د) (١٢) (د) (١٣) (د) (١٤) (جـ) (١٥) (جـ)

(١٦) (ب) (١٧) (جـ) (١٨) (جـ) (١٩) (ب) (٢٠) (جـ)

(٢١) (د) (٢٢) (أ) (٢٣) (أ) (٢٤) (جـ) (٢٥) (ب)

(٢٦) (جـ) (٢٧) (د) (٢٨) (أ) (٢٩) (د) (٣٠) (أ)

(٣١) (جـ) (٣٢) (ب) (٣٣) (ب) (٣٤) (جـ) (٣٥) (جـ)

(٣٦) (جـ) (٣٧) (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

1 (١) ٦٣ (٢) صفر (٣) ١

2

(١) ∵ ق$_{م}$(أ) = -٣٦ < ٠ ∴ أ تقع داخل الدائرة

، ∵ ق$_{م}$(أ) = (م أ)^{2} - نق^{2}

∴ -٣٦ = (م أ)^{2} - ١٠٠

∴ (م أ)^{2} = ٦٤ ∴ أ م = ٨ سم

(٢) ∵ ق$_{م}$(ب) = ٩٦ > ٠ ∴ ب تقع خارج الدائرة

، ∵ ق$_{م}$(ب) = (م ب)^{2} - نق^{2}

∴ ٩٦ = (م ب)^{2} - ١٠٠

∴ (م ب)^{2} = ١٩٦ ∴ م ب = ١٤ سم

(٣) ق$_{م}$(حـ) = ٠ ∴ حـ تقع على الدائرة

∴ م حـ = نق = ١٠ سم

3

∵ ق$_{م}$(أ) = (م أ)^{2} - نق^{2} ∴ ٤٠٠ = ٦٢٥ - نق^{2}

∴ نق^{2} = ٢٢٥ ∴ نق = ١٥ سم (وهو المطلوب)

4

∵ أء مماسة للدائرة عند ء ∴ أء = √ق$_{م}$(أ)

∴ ق$_{م}$(أ) = (أء)^{2} = (٨)^{2} = ٦٤ (وهو المطلوب)

5

∵ أ تقع خارج الدائرة ، أب مماسة للدائرة عند ب

∴ أب = √ق$_{م}$(أ) = √٨١ = ٩ سم (المطلوب أولًا)

، ∵ ق$_{م}$(أ) = (م أ)^{2} - نق^{2}

∴ ٨١ = (م أ)^{2} - ١٤٤

∴ (م أ)^{2} = ٢٢٥ ∴ م أ = ١٥

∴ أ حـ = ١٥ - ١٢ = ٣ سم (المطلوب ثانيًا)

6

∵ ق$_{م}$(أ) = (م أ)^{2} - نق^{2}

= (٢٣)^{2} - (٣١)^{2}

= -٤٣٢

، ∵ ق$_{م}$(أ) = - أب × أحـ

∴ -٤٣٢ = - أب × أحـ ∴ ٤٣٢ = أب × أحـ

، ∵ أب = ٣ أحـ

∴ ٤٣٢ = ٣ أحـ × أحـ ∴ (أحـ)^{2} = ١٤٤

∴ أحـ = ١٢ سم ∴ أب = ٣٦ سم

∴ ب حـ = ٣٦ + ١٢ = ٤٨ سم (المطلوب أولًا)

بفرض أن بعد الوتر ب حـ عن مركز الدائرة هو م ء

حيث : م ء ⊥ ب حـ

∴ ء منتصف ب حـ

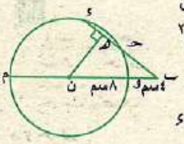
، ∵ ق$_{م}$(ء) = (م ء)^{2} - نق^{2} = - ب ء × ء حـ

∴ (م ء)^{2} - (٣١)^{2} = -٢٤ × ٢٤

∴ (م ء)^{2} = ٣٨٥

∴ م ء ≃ ١٩,٦ سم (المطلوب ثانيًا)

7



∵ ق$_{ن}$(ب) = (ن ب)^{2} - نق^{2}

= (١٢)^{2} - (٨)^{2}

= ٨٠

، ∵ ق$_{ن}$(ب) = ب حـ × ب ء

∴ ٨٠ = ب حـ × ب ء

، ∵ ب حـ = حـ ء

∴ ٨٠ = حـ ء × ٢ حـ ء

∴ حـ ء = ٢ √١٠ سم (المطلوب أولًا)

بفرض أن بعد الوتر حـ ء عن مركز الدائرة هو ن هـ

حيث : ن هـ ⊥ حـ ء

∴ هـ منتصف حـ ء

، ∵ ق$_{ن}$ (هـ) = (هـ ن)^{٢} − نق^{٢} = − هـ حـ × هـ ء

∴ (هـ ن)^{٢} − (٨)^{٢} = − $\sqrt{١٠}$ × $\sqrt{١٠}$

∴ ن هـ = ٣ $\sqrt{٦}$ سم (المطلوب ثانيًا)

٨

∵ ق$_{م}$ (حـ) = حـ ء × حـ أ = ١٦ × ٢٥ = ٤٠٠

، ∵ حـ تقع خارج الدائرة

، $\overline{حـ ب}$ مماسة للدائرة عند ب

∴ حـ ب = $\sqrt{ق_{م} (حـ)}$ = $\sqrt{٤٠٠}$ = ٢٠ سم

∴ (أ ب)^{٢} = (أ حـ)^{٢} − (حـ ب)^{٢} = (٢٥)^{٢} − (٢٠)^{٢}

= ٢٢٥

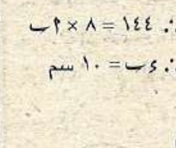
∴ أ ب = ١٥ سم

∴ أ م = نق = ٧,٥ سم (المطلوب أولًا)

، مـ (△ أ ب حـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ × ٢٠ = ١٥٠ سم^{٢}

(المطلوب ثانيًا)

٩



∵ أ تقع خارج الدائرة

، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ يمس الدائرة عند حـ

∴ أ حـ = $\sqrt{ق_{م} (أ)}$ = $\sqrt{١٤٤}$

= ١٢ سم

، ∵ ق$_{م}$ (أ) = أ ء × أ ب ∴ ١٤٤ = ٨ × أ ب

∴ أ ب = ١٨ سم ∴ ء ب = ١٠ سم

، ∵ ق$_{م}$ (أ) = أ هـ × أ و

∴ ١٤٤ = أ هـ × (أ هـ + ١٨)

∴ ١٤٤ = (أ هـ)^{٢} + ١٨ أ هـ

∴ (أ هـ)^{٢} + ١٨ أ هـ − ١٤٤ = ٠

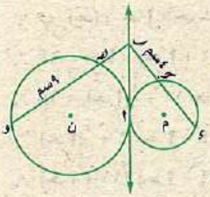
∴ (أ هـ + ٢٤) (أ هـ − ٦) = ٠

∴ أ هـ = ٦ سم (المطلوب أولًا)

∴ ق$_{م}$ (س) = − ء س × س ب = −٤ × ٦ = −٢٤

(المطلوب ثانيًا)

١٠



∵ أ تقع على الدائرة م

، أ تقع على الدائرة ن

∴ ق$_{م}$ (أ) = ق$_{ن}$ (أ) = ٠

، ∵ $\overleftrightarrow{ب أ}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ ق$_{م}$ (ب) = (أ ب)^{٢}

، ∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة ن عند أ

∴ ق$_{ن}$ (ب) = (أ ب)^{٢} ∴ ق$_{م}$ (ب) = ق$_{ن}$ (ب)

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن (المطلوب أولًا)

∵ ق$_{م}$ (ب) = ب حـ × ب ء ∴ ٣٦ = ٤ × ب ء

∴ ب ء = ٩ سم ∴ حـ ء = ٥ سم

، ∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م

∴ أ ب = $\sqrt{ق_{م} (ب)}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

، ∵ ق$_{م}$ (ب) = ق$_{ن}$ (ب)

، ∵ ق$_{ن}$ (ب) = ب هـ × ب و

∴ ٣٦ = ب هـ × (٩ + ب هـ)

∴ ٣٦ = (ب هـ)^{٢} + ٩ ب هـ

∴ (ب هـ)^{٢} + ٩ ب هـ − ٣٦ = ٠

∴ (ب هـ + ١٢) (ب هـ − ٣) = ٠

∴ ب هـ = ٣ سم (المطلوب ثانيًا)

١١

∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن

∴ ق$_{م}$ (أ) = ق$_{ن}$ (أ) = ٠

وبالمثل : ق$_{م}$ (ب) = ق$_{ن}$ (ب) = ٠

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن

، ∵ حـ ∈ $\overleftrightarrow{أ ب}$

∴ $\overleftrightarrow{حـ ب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن

(المطلوب أولًا)

∵ ق$_{ن}$(حـ) = حـ أ × حـ ب

∴ ٦٤ = حـ أ × (حـ أ + ١٢)

∴ ٦٤ = (حـ أ)^{٢} + ١٢ حـ أ

∴ (حـ أ)^{٢} + ١٢ حـ أ − ٦٤ = ٠

∴ (حـ أ + ١٦) (حـ أ − ٤) = ٠

∴ حـ أ = ٤ سم

، ∵ حـ ∈ المحور الأساسي للدائرتين

∴ ق$_{م}$(حـ) = ق$_{ن}$(حـ)

، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة م عند ء

∴ حـ ء = $\sqrt{\text{ق}_{م}(\text{حـ})}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم (المطلوب ثانيًا)

١٢

∵ أ تقع على الدائرة م ، أ تقع على الدائرة ن

∴ ق$_{م}$(أ) = ق$_{ن}$(أ) = ٠

وبالمثل : ق$_{م}$(ب) = ق$_{ن}$(ب)

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن

(المطلوب أولًا)

، ∵ س ∈ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∴ ق$_{م}$(س) = ق$_{ن}$(س)

، ∵ ق$_{م}$(س) = س ء × س حـ

، س ء = ٢ ء حـ ∴ ١٤٤ = ٢ ء حـ × ٣ ء حـ

∴ (ء حـ)^{٢} = ٢٤ ∴ ء حـ = ٢ $\sqrt{٦}$ سم

∴ س حـ = ٦ $\sqrt{٦}$ سم

، ∵ ق$_{ن}$(س) = س و × س هـ

∴ ١٤٤ = س و × (س و + ١٠)

∴ ١٤٤ = (س و)^{٢} + ١٠ س و

∴ (س و)^{٢} + ١٠ س و − ١٤٤ = ٠

∴ (س و + ١٨) (س و − ٨) = ٠

∴ س و = ٨ سم (المطلوب ثانيًا)

∵ ق$_{م}$(س) = ق$_{ن}$(س)

∴ س ء × س حـ = س و × س هـ

∴ الشكل حـ ء و هـ رباعي دائري (المطلوب ثالثًا)

١٣

(١) ١٥° = $\frac{1}{2}$ [س − ٦٠°] ∴ ٣٠° = س − ٦٠°

∴ س = ٩٠°

∴ ص = ٣٦٠° − (١٣٠° + ٦٠° + ٩٠°) = ٨٠°

، ع = $\frac{1}{2}$ [١٣٠° − ٨٠°] = ٢٥°

(٢) ص = ٣٦٠° − ٢ س

، س = $\frac{1}{2}$ [(٣٦٠° − ٢ س) − ٢ س]

∴ ٢ س = ٣٦٠° − ٤ س

∴ ٦ س = ٣٦٠° ∴ س = ٦٠°

∴ ص = ٢٤٠°

(٣) ∵ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ (٨ س − ٤ س)

، ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ (٥ س − ٢٠°)

∴ ٨ س − ٤ س = ٥ س − ٢٠°

∴ س = ٢٠°

١٤

∵ ق(∠ب ء حـ) = ٧٠°

∴ ق(∠حـ ء س) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

، ∵ ق(∠حـ ء س) = $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{\text{حـ س}}$) + ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)]

∴ ١١٠° = $\frac{1}{2}$ [(١٠٠° + ق($\overset{\frown}{\text{س ص}}$)) + ٩٤°]

∴ ٢٢٠° = ١٠٠° + ق($\overset{\frown}{\text{س ص}}$) + ٩٤°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{س ص}}$) = ٢٦° (المطلوب أولًا)

، ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = ٢ ق(∠ب أ حـ) = ٦٦°

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٣٦٠° − (٩٤° + ٦٦° + ١٠٠° + ٢٦°)

= ٧٤° (المطلوب ثانيًا)

∴ ق(∠ب هـ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) − ق($\overset{\frown}{\text{س ص}}$)]

= $\frac{1}{2}$ [٦٦° − ٢٦°] = ٢٠° (المطلوب ثالثًا)

١٥

∵ أب = بحـ = حـ ء = ء هـ

= أهـ (خواص الخماسى المنتظم)

∴ ق(أب⌢) = ق(بحـ⌢) = ق(حـ ء⌢)

= ق(ء هـ⌢) = ق(أهـ⌢) = ٣٦٠° ÷ ٥ = ٧٢°

∴ ق(أهـ⌢) = ٧٢° (المطلوب أولاً)

، ق(أحـ هـ⌢) = ٣٦٠° − ٧٢° = ٢٨٨°

∴ ق(∠أس هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(أحـ هـ⌢) − ق(أهـ⌢)]

= $\frac{1}{2}$ [٢٨٨° − ٧٢°]

= ١٠٨° (المطلوب ثانيًا)

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

(١) (د)   (٢) (جـ)

إرشادات الحل :

(١) ∵ أب قطر فى الدائرة

∴ ق(أهـ⌢) + ق(هـب⌢) = ١٨٠°   (١)

، ∵ ق(∠هـ حـ ء) = ١٥٠°

∴ ق(∠هـ حـ أ) = ٣٠°

∴ $\frac{1}{2}$ [ق(أهـ⌢) − ق(هـب⌢)] = ٣٠°

∴ ق(أهـ⌢) − ق(هـب⌢) = ٦٠°   (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) :

٢ ق(أهـ⌢) = ٢٤٠°

∴ ق(أهـ⌢) = ١٢٠°

ومنها θ = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

(٢)

∵ بحـ قطر فى الدائرة

∴ ٢س + ص = ١٨٠°   (١)

، ∵ ق(∠ء) = ٢١°

∴ $\frac{1}{2}$ [س − ص] = ٢١°

∴ س − ص = ٤٢°   (٢)

بجمع (١) ، (٢) : ∴ ٣س = ٢٢٢°

∴ س = ٧٤°

∴ ص = ٣٢°

∴ ق(∠ب) = $\frac{1}{2}$ [٧٤° + ٣٢°] = ٥٣°

فى Δ أبء :

ق(∠أ) = ١٨٠° − (٥٣° + ٢١°) = ١٠٦°

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الرابعة

١

∵ ق(∠ب) = ق(∠ء) = ٩٠° (وهما فى وضع تبادل)

∴ أب // ءحـ   ∴ أهـ ÷ أحـ = بهـ ÷ ءب

∴ ٦٠ ÷ أحـ = ٤٥ ÷ ١٥٠   ∴ أحـ = ٢٠٠ م

∴ بُعد الموقع حـ عن الموقع أ = ٢٠٠ متر

(وهو المطلوب)

٢

∵ بهـ // حـ ء   ∴ أب ÷ بحـ = أهـ ÷ هـ ء

∴ أب ÷ ٣٣ = ١٣٠ ÷ ٣٩   ∴ أب = ١١٠ م

∴ طول بقعة الزيت = ١١٠ أمتار   (وهو المطلوب)

٣

نعم ، تقسيم يوسف للشريط صحيح.

∵ المسافة العمودية «المحصورة» بين كل سطرين من سطور الورقة متساوية.

∴ عندما يتم وضع طرفى الورقة على سطرين من سطور الورقة وتكون حافة الورقة على شكل قاطع لسطور الورقة

فإن الأجزاء المحصورة تكون متساوية فى الطول.

٤

∵ $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بهـ}} \parallel \overline{\text{حـو}}$ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{هـء}}{\text{ءو}}$

∴ $\frac{1,2}{\text{أحـ}} = \frac{0,8}{12,8}$ ∴ أحـ = ١٩,٢ مترًا

∴ طول الأنبوب ≃ ١٩ مترًا (وهو المطلوب)

٥

فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى حـ :

∵ $(\text{أحـ})^2 = (\text{أب})^2 - (\text{بحـ})^2$

$= (٤,١)^2 - (٠,٩)^2$

$= ١٦$

∴ أحـ = ٤ أمتار

، ∵ $\overline{\text{هـء}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ∴ $\frac{\text{بهـ}}{\text{بأ}} = \frac{\text{حـء}}{\text{حـأ}}$

∴ $\frac{\text{بهـ}}{٤,١} = \frac{٢,٤}{٤}$ ∴ بهـ = ٢,٤٦ مترًا

∴ المسافة التى يصعدها الرجل على السلم

= ٢,٤٦ مترًا (وهو المطلوب)

٦

∵ أب : ب حـ : حـ ء = ٥ : ٤ : ٣

∴ $\frac{\text{أب}}{٥} = \frac{\text{بحـ}}{٤} = \frac{\text{حـء}}{٣}$ ∴ $\frac{١٨٠}{٥} = \frac{\text{بحـ}}{٤} = \frac{\text{حـء}}{٣}$

∴ ب حـ = ١٤٤ سم ، حـ ء = ١٠٨ سم

، ∵ $\overline{\text{أهـ}} \parallel \overline{\text{بو}} \parallel \overline{\text{حـس}} \parallel \overline{\text{ءص}}$

∴ $\frac{\text{هـص}}{\text{هـو}} = \frac{\text{أء}}{\text{أب}}$ ∴ $\frac{\text{هـص}}{٢٠٠} = \frac{٤٣٢}{١٨٠}$

∴ هـ ص = ٤٨٠ سم (وهو المطلوب)

٧

فى Δ أ ب هـ :

∵ أب = ب هـ ، ق(∠ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ب أ هـ) = ٤٥° (١)

∵ ق(∠ب أ ء) = ٩٠°

∴ ق(∠ء أ س) = ٤٥° (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق(∠ب أ س) = ق(∠ء أ س)

∴ $\overrightarrow{\text{أس}}$ ينصف ∠أ فى Δ أ ب ء

∴ $\frac{\text{بس}}{\text{سء}} = \frac{\text{بأ}}{\text{أء}} = \frac{٤٢}{٥٦} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{بس}}{\text{بس} + \text{سء}} = \frac{٣}{٣ + ٤}$

∴ $\frac{\text{بس}}{\text{بء}} = \frac{٣}{٧}$

∵ Δ أ ب س ، Δ أ ب ء لهما نفس الارتفاع

∴ $\frac{\text{م}(\Delta\,\text{أبس})}{\text{م}(\Delta\,\text{أبء})} = \frac{\text{بس}}{\text{بء}} = \frac{٣}{٧}$

∴ م(Δ أ ب س) = $\frac{٣}{٧}$ × م(Δ أ ب ء)

= $\frac{٣}{٧} \times \frac{١}{٢} \times ٤٢ \times ٥٦$ = ٥٠٤ متر مربع

(المطلوب أولاً)

فى Δ ب أ ء القائم الزاوية فى أ :

∴ $(\text{بء})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{أء})^2 = (٤٢)^2 + (٥٦)^2 = ٤٩٠٠$

∴ ب ء = ٧٠ مترًا

، ∵ $\frac{\text{بس}}{\text{بء}} = \frac{٣}{٧}$ ∴ $\frac{\text{بس}}{٧٠} = \frac{٣}{٧}$

∴ ب س = ٣٠ مترًا

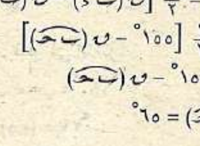
∴ س ء = ٧٠ − ٣٠ = ٤٠ مترًا

∴ $\text{أس} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أء} - \text{بس} \times \text{سء}}$

$= \sqrt{٤٢ \times ٥٦ - ٣٠ \times ٤٠}$

= $٢٤\sqrt{٢}$ مترًا (المطلوب ثانيًا)

٨



∵ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{\text{بء}}$) − ق($\overset{\frown}{\text{بحـ}}$)]

∵ ٤٥° = $\frac{١}{٢}$ [١٥٥° − ق($\overset{\frown}{\text{بحـ}}$)]

∴ ٩٠° = ١٥٥° − ق($\overset{\frown}{\text{بحـ}}$)

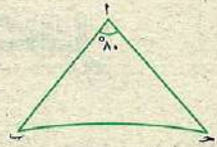
∴ ق($\overset{\frown}{\text{بحـ}}$) = ٦٥°

∴ ق(⌒ءحـ) = ٣٦٠° − (١٥٥° + ٦٥°) = ١٤٠°

∴ طول (⌒ءحـ) = ١٤٠°/٣٦٠° × ٢ × ١٠ × π

= ٢٤,٤ سم (وهو المطلوب)

٩



ق(∠ أ) = ١/٢ [(٣٦٠° − ق(⌒بحـ)) − ق(⌒بحـ)]

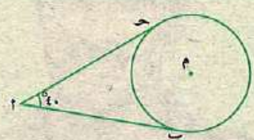
∴ ٨٠° = ١/٢ [٣٦٠° − ٢ ق(⌒بحـ)]

∴ ١٦٠° = ٣٦٠° − ٢ ق(⌒بحـ)

∴ ٢ ق(⌒بحـ) = ٢٠٠°

∴ ق(⌒بحـ) = ١٠٠° (وهو المطلوب)

١٠



∵ ق(∠ أ) = ١/٢ [(٣٦٠° − ق(⌒بحـ)) − ق(⌒بحـ)]

∴ ٤٠° = ١/٢ [٣٦٠° − ٢ ق(⌒بحـ)]

∴ ٨٠° = ٣٦٠° − ٢ ق(⌒بحـ)

∴ ٢ ق(⌒بحـ) = ٢٨٠°

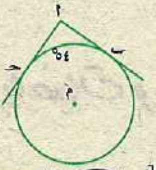
∴ ق(⌒بحـ) = ١٤٠°

∴ ق(⌒بحـ) الأكبر = ٣٦٠° − ١٤٠° = ٢٢٠°

∴ طول (⌒بحـ) الأكبر = ٢٢٠°/٣٦٠° × ٢ × ٩ × π

= ٣٤,٥٦ سم (وهو المطلوب)

١١



ق(∠ أ) = ١/٢ [ق(⌒بحـ) الأكبر − ق(⌒بحـ)]

= ١/٢ [٣٦٠° − ٥٤° − ٥٤°]

= ١٢٦° (المطلوب أولًا)

∵ طول (⌒بحـ) = ٥٤°/٣٦٠° × ٢ π نق

∴ ٦٠١١ = ٥٤°/٣٦٠° × ٢ × π × نق

∴ نق = (٦٠١١ × ٣٦٠°)/(٥٤° × ٢ × π) ≃ ٦٣٧٨ كم (المطلوب ثانيًا)